Peter Taylor

Vieno uždavinio sprendimas

Praeitais metais šiame žurnale paskelbtame straipsnyje „Matematinis ugdymas Australijoje“[1] pasiūliau keletą uždavinių, kurie buvo sprendžiami Australijos matematinėse varžybose. Vienas iš jų buvo toks.

AMK (1983)

◇◇◇

Ant skalbinių virvės reikia padžiauti keturias poras kojinių. Kiekvieną porą sudaro visiškai vienodo dydžio kojinės, tačiau visų porų spalvos skirtingos. Kiek skirtingų spalvų išsidėstymų galima gauti sukabinus kojines, jei tos pačios poros kojinės negali kabėti greta?

(A) 792 (B) 630 (C) 2520 (D) 864 (E) 720

Prieš įtraukdami šį uždavinį į sąrašą, mes kurį laiką svarstėme. Tai uždavinys su pasirenkamu atsakymu, skirtas varžyboms, kurių dalyviai per 75 minutes turėjo išspręsti 30 uždavinių. Uždaviniai buvo nevienodi. Kai kuriuos buvo galima išspręsti visai paprastai. „Kojinių“ uždavinys, kurį ką tik suformulavome, buvo vienas iš sunkiausių, tai buvo tartum iššūkis Australijos komandos tarptautinėje matematikų olimpiadoje dalyviams. Prieš įtraukdamas šį uždavinį, aš, kaip organizacinio komiteto pirmininkas, norėjau įsitikinti, ar olimpiados dalyviui įmanoma teisingu būdu rasti teisingą atsakymą per keletą (tarkime, 10–12) minučių.

Organizaciniam komitetui savo sprendimą pateikė autorius. Sprendimas, nors ir teisingas, naudojo labai sudėtingą indukciją, kurioje n (indukcijos kintamasis) buvo kojinių pora. Tai nebuvo įprasta matematinės indukcijos forma, todėl man atrodė, kad metodas yra pernelyg sudėtingas šios rūšies

[1] Žr. *Alfa plius omega*, 1998, 1(5), 95–99.

uždaviniams. Nusprendžiau paieškoti priimtinesnio sprendimo ir buvau patenkintas, kai suradau, visai natūralų skaičiavimo būdą.

Pirmas sprendimas

Pažymėkime kojines aa, bb, cc, dd. Iš viso yra $4 \times 3 \times 2 = 24$ būdai parinkti tris pirmąsias skirtingas spalvas, panagrinėkime atvejį abc. Tada kitas galima sukabinti taip (žr. 1 lentelę).

abc	a	bdcd cdbd dbdc cd cdb bd	6	
	b	simetriškai su a	6	
	d	abcd dc cbd db dbc cb	6	
	b	simetriškai su a	6	
	c	simetriškai su a	6	30

1 lentelė

aba	b	cdcd dcdc	2	
	c	bdcd dbcd bdc cbd cdb	5	
	d	simetriškai su c	5	12

2 lentelė

Taigi yra $24 \times 30 = 720$ išdėstymų, prasidedančių trimis skirtingomis spalvomis. Yra iš viso $4 \times 3 = 12$ būdų pasirinkti pirmąjį trejetą, analogišką aba. Toliau galima išdėstyti kaip pavaizduota 2 lentelėje.

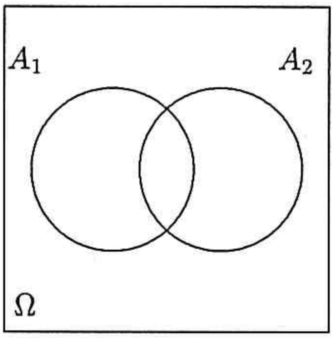
Taigi iš viso yra $12 \times 12 = 144$ išdėstymų, prasidedančių aba. Pagaliau, $720 + 144 = 864$, todėl teisingas atsakymas yra (D).

Suskaičiuoti buvo nelengva, tačiau mano šalies geriausi moksleiviai buvo pakankamai sumanūs rasti sprendimą. Tereikėjo nurodyti tik atsakymą, todėl, suprantama, sprendimai nebuvo užrašomi.

Po varžybų aš klausiausi mano kolegos profesoriaus Mike Newmano pranešimo, kuriame jis aiškino uždavinių sprendimus kai kuriems dalyvavusiems varžybose moksleiviams. Jis nežinojo mano sprendimo, tačiau surado savąjį gražų sprendimą, kuriame panaudojamas rėčio principas.[2]

Antras sprendimas

Šį sprendimą galima apibendrinti n kojinių porų ($n \neq 4$) atvejui. Panagrinėkime dviejų porų atvejį, pavaizdavę jį Venno diagrama.



Čia Ω reiškia visų galimų išdėstymų aibę, o A_1 – išdėstymų, kuriuose pirmos poros kojinės yra greta, aibę. Mums reikia suskaičiuoti

$$N(\overline{A_1 \cup A_2}) = N(\Omega) - \sum_{i=1}^{2} N(A_i) + N(A_1 \cap A_2);$$

čia $N(B)$ žymi aibės B elementų skaičių, $N(\Omega) = 4!/2^2$ (dalijome iš 2^2, nes tos pačios poros kojinės gali būti sukeistos, nepakeičiant spalvų išdėstymo).

Tada

$$N(A_1) = N(A_2) = \frac{3!}{2^1}, \quad N(A_1 \cap A_2) = \frac{2!}{2^0},$$

taigi atsakymas

$$\frac{4!}{4} - \frac{3!}{2} + 2 = 6 - 6 + 2 = 2.$$

Pritaikius rėčio principą n porų atveju gaunama

$$N\Big(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\Big) = N(\Omega) - \sum_{i=1}^{n} N(A_i) + \sum_{i \neq j} N(A_i \cap A_j) - \ldots + (-1)^n N\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big).$$

Trijų porų atveju atsakymas toks:

$$\frac{6!}{2^3} - 3\frac{5!}{2^2} + 3\frac{4!}{2^1} - 3! = 90 - 90 + 36 - 6 = 30.$$

---

[2] Mūsų žurnale apie rėčio principą rašyta straipsnyje V. Stakėnas, G. Stepanauskas, Analizinės skaičių teorijos apžvalga, *Alfa plius omega*, 1996, 1, 24–25.

Keturioms poroms gauname

$$\frac{8!}{2^4} - 4\frac{7!}{2^3} + 6\frac{6!}{2^2} - 4\frac{6!}{2} + 4! = 2520 - 2520 + 1080 - 240 + 24 = 864.$$

Kai porų yra n, atsakymas užrašomas formule

$$\binom{n}{0}\frac{(2n)!}{2^n} - \binom{n}{1}\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}\frac{n!}{2^n}.$$

Pabaigai

Man atrodo, kad gražiausia matematikos ypatybė – jos vientisumas. Bet kurio uždavinio atsakymas vienintelis, nepriklausantis nuo sprendimo būdo. Sužinojus antrąjį sprendimą, uždavinio tinkamumas varžyboms tapo dar akivaizdesnis. Tačiau manau, kad dauguma teisingų atsakymų buvo gauti pirmuoju būdu.

Išties, tik nedaugelis yra tokie gabūs matematikai, kad jų talentas įgalina juos atrasti naujus matematikos faktus. Tačiau taip pat tik nedaugelis yra tokie gabūs muzikai, kad galėtų ją kurti. Vis dėlto yra daug žmonių, kurie supranta muziką, groja, arba bent sugeba ja gėrėtis. Mes manome, kad žmonių, sugebančių suprasti paprastas matematikos idėjas nėra mažiau nei tų, kurie vadinami muzikaliais, ir kad jų susidomėjimas gali būti skatinamas, jeigu tiktai pavyktų pašalinti antipatiją, kurią daugelis atsineša iš vaikystės.

Hans Rademacher, Otto Toeplitz,
The Enjoyment of Mathematics,
Princeton University, 1966, p.5.