LJMM

Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla

Antanas Apynis
Eugenijus Stankus

Pirmieji LJMM mokslo metai

Bemaž visi pripažįsta, kad mokinių matematinio išprusimo lygis pastaraisiais metais krinta. Apie tai liudija abitūros egzaminų rezultatai, silpnos įstojusių į universitetus studentų žinios, žemi pirmųjų egzaminų sesijų aukštosiose mokyklose pažymiai. Dalį kaltės dėl tokios padėties turime prisiimti ir mes – aukštųjų mokyklų dėstytojai bei vidurinių mokyklų mokytojai. Jau suvokėme, kad užleistas matematikos populiarinimas.

Tikintis pagerinti esamą padėtį ir buvo atkurta Lietuvos jaunųjų matematikų neakivaizdinė mokykla, kurios darbas prieš dešimtmetį buvo nutrūkęs. Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklą 1998 m. rugsėjo 17 d. atkūrė Lietuvos universitetų matematikai, Lietuvos matematikų draugija, Matematikos ir informatikos institutas, Lietuvos matematikos mokytojų asociacija. Mokykla negalėtų gyvuoti be nuolatinio šių bei kitų ją remiančių organizacijų palaikymo, o taip pat be laikraščio „Dialogas“ ir žurnalo „Alfa plius omega“ paramos. Dabar jau veikia LJMM Interneto svetainė (http://www.maf.vu.lt/ljmm), kurioje skelbiamos užduotys bei metodinė medžiaga. Mokyklos taryba dėkoja kolegei V. Dragūnienei (MII) ir kolegai A. Juozapavičiui (VU) už Interneto svetainės sukūrimą, kolegėms K. Lyndienei ir N. Mačiulienei už nuoširdų triūsą tvarkant moksleivių atsiųstus darbus, mokytojams ir studentams, negailintiems laiko sprendimams tikrinti, ir, žinoma, visiems kolegoms matematikams, rengiantiems metodinę medžiagą ir užduotis.

Dabar Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla baigė pirmuosius mokslo metus, per kuriuos paskelbtos trys užduotys. Neseniai pabaigti tikrinti trečiosios užduoties sprendimai. Kiekvienam moksleiviui, atsiuntusiam sprendimus, išsiunčiame jo darbo įvertinimą kartu su užduočių sprendimais. Pagal mokyklos tarybos planą buvo išnagrinėtos šios temos:

- Kvadratinis trinaris ir jo savybės. Kvadratinio trinario šaknų padėtis tam tikro skaičiaus atžvilgiu. Kvadratinės lygtys ir nelygybės su parametrais. Teorinę medžiagą ir užduotis parengė Vilniaus pedagoginio universiteto docentas Juozas Šinkūnas.
- Rekurenčiosios sekos. Pirmojo ir antrojo laipsnio homogeninės ir nehomogeninės rekurenčiosios sekos. Aukso pjūvis, Fibonačio skaičiai. Atskiri rekurenčiųjų sekų atvejai: aritmetinė ir geometrinė progresijos. Teorinę medžiagą ir užduotis parengė Vilniaus universiteto docentas Gediminas Stepanauskas. Šia tema galima paskaityti ir jo straipsnį žurnale „Alfa plius omega" 1998, **2**(**6**), 78–84.
- Elementariosios matematikos uždavinių kai kurie sprendimo metodai: invariantų metodas, kraštinio elemento metodas, Dirichlė principas, geometrinių vietų metodas, indukcijos principas. Teorinę medžiagą ir užduotis parengė Vilniaus universiteto docentas Romualdas Kašuba.

Antraisiais mokslo metais moksleiviai giliau susipažins su funkcijomis ir jų savybėmis, sveikąja ir trupmenine skaičiaus bei funkcijos dalimis, paanalizuos kombinatorikos ir tikimybių teorijos pradmenis, paspręs uždavinių iš optimizavimo bei grafų teorijos. Mokslo metų gale, greičiausiai kovo mėnesį, mūsų moksleivių laukia uždavinių sprendimo konkursas ir, aišku, LJMM baigimo pažymėjimų įteikimas Vilniaus universitete.

Tiems skaitytojams, kurie neturėjo progos susipažinti su mokyklos užduotimis, pateikiame visų trijų skelbtų užduočių sąlygas.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Raskite skaičius a, b ir c, kurių suma lygi 2, o lygtis $ax^2+bx+c=0$ turi vienintelį sprendinį.

2. Raskite didžiausią sumos $p+q$ reikšmę, kai lygties $x^2+px+q=0$ šaknų skirtumas lygus 5, o šaknų kubų skirtumas 35.

3. Raskite funkcijos $y=\sqrt{x^2+2x+10}$ reikšmių sritį.

4. Su kuria neigiama parametro a reikšme kvadratinio trinario $ax^2+2x+7,5$ mažiausia reikšmė intervale $[1-\frac{1}{a}; \frac{3}{2}-\frac{1}{a}]$ yra lygi 3,5?

5. Iš Molėtų į Giedraičius išėjo pėsčiasis, o po 3,5 h išvažiavo dviratininkas, kuris pėsčiąjį pavijo Giedraičiuose. Kitą dieną vienu metu dviratininkas išvyko iš Molėtų, o pėsčiasis iš Giedraičių ir po 1 h 40 min susitiko. Kiek laiko reikia dviratininkui nuvykti iš Molėtų į Giedraičius (dviratininko ir pėsčiojo greičiai pastovūs)?

6. Du darbininkai turėjo nušienauti pievą. Jie susitarė nušienauti po pusę pievos. Pirmasis darbininkas darbą pradėjo 2 h 16 min anksčiau už antrąjį. Iki 12 valandos jie nušienavo 40% pievos, tada jie pietavo ir ilsėjosi 1,5 h. Pirmasis darbininkas darbą baigė 19 h 54 min, o antrasis – 20 h 10 min. Kada kiekvienas darbininkas pradėjo šienauti pievą?

7. Šachmatų turnyre dalyvavo du devintokai ir keletas dešimtokų. Abu devintokai kartu surinko 8 taškus, o kiekvienas dešimtokas surinko po vienodą skaičių taškų. Kiek dešimtokų dalyvavo turnyre?

Pastaba. Visi turnyro dalyviai žaidė tarpusavyje po vieną kartą. Už laimėtą partiją šachmatininkui skiriamas vienas taškas, už lygiąsias – pusė taško, o už pralaimėtą partiją – nulis.

8. Su kuriomis k reikšmėmis abi lygties $(1+k)x^2 - 2x + k - 2 = 0$ šaknys yra teigiamos?

9. Su kuriomis m reikšmėmis lygties $(m+2)x^2 - 2(3m+10)x + 3(3m+4) = 0$ šaknys yra tarp 0 ir 4?

10. Parašykite didėjimo tvarka skaičius x_1, x_2, 0 ir 2, jeigu x_1 ir x_2 yra lygties $x^2 - 2ax + 2a^2 - 4a + 3 = 0$ šaknys. Ištirkite šių skaičių išsidėstymo priklausomybę nuo parametro a reikšmių.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Įrodykite, kad natūraliųjų skaičių kvadratų seka $u_1 = 1^2, u_2 = 2^2, \cdots, u_n = n^2, \cdots$ yra 3-iosios eilės rekurenčioji seka.

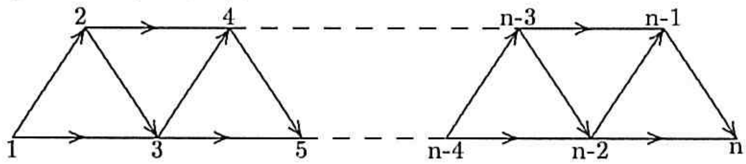
2. Begalinės geometrinės progresijos su vardikliu, kurio modulis mažesnis už 1, suma yra lygi 12, o pirmųjų trijų progresijos narių suma yra lygi 10,5. Raskite šios progresijos pirmąjį narį ir vardiklį.

3. Trikampio kraštinių ilgiai sudaro didėjančią geometrinę progresiją. Ar šios progresijos vardiklis gali būti didesnis už 2?

4. Raskite visų triženklių skaičių, kurie dalijasi iš 7, sumą.

5. Tinklinio pirmenybėse dalyvavo 12 komandų. Komandos susitiko tarpusavyje po vieną kartą. Už laimėjimą komandai skiriamas vienas taškas, už pralaimėjimą taškų neskiriama, lygiųjų tinklinyje nebūna. Po pirmenybių paaiškėjo, kad komandų surinkti taškai sudaro aritmetinę progresiją. Kiek taškų surinko paskutinę vietą užėmusi komanda?

6. Duotas grafas (žr. 1 brėž.). Įrodykite, kad skirtingų maršrutų iš 1-osios viršūnės į $n-$ąją skaičius yra lygus $n-$ajam Fibonačio skaičiui F_n. Galima judėti rodyklių kryptimis.

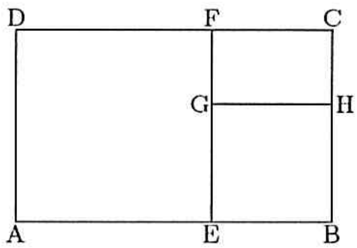


1 brėž.

7. Įrodykite, kad Fibonačio skaičiams F_n yra teisinga lygybė $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

8. Petras paprašė Povilo užpildyti skaičiais dešimt eilučių. Į pirmąją ir antrąją eilutes įrašyti bet kokius natūraliuosius skaičius, o į kiekvieną kitą eilutę (pradedant trečiąja) – dviejų prieš jį esančių eilučių sumą. Petras paprašė jam parodyti tik septintąją eilutę. Įdėmiai į ją pažiūrėjęs, jis pasakė, kam lygi visų dešimties eilučių suma. Kokiu būdu Petras, žinodamas tik septintąją eilutę, galėjo suskaičiuoti visų dešimties eilučių sumą?

9. Jei stačiakampio kraštinių santykis yra lygus α ($\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$), tai stačiakampis vadinamas *auksinės proporcijos stačiakampiu.* Į auksinės proporcijos stačiakampį $ABCD$ įbrėžkime kvadratą $AEFD$ (žr. 2 brėž.). Įrodykite, kad stačiakampis $EFCB$ taip pat yra auksinės proporcijos stačiakampis, o jeigu $EGHB$ – kvadratas, tai $GHCF$ – irgi auksinės proporcijos stačiakampis.



2 brėž.

••• $\alpha + \omega$ •••

10. Įrodykite, kad apie taisyklingąjį dešimtkampį apibrėžto apskritimo spindulio ir šio dešimtkampio kraštinės santykis yra lygus α ($\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$).

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Įrodykite, kad iš 35 dviženklių skaičių (pirmas skaitmuo nelygus nuliui) visada galima rasti tris skaičius, kurių skaitmenų suma vienoda.

2. Įrodykite tokį teiginį: jeigu turime 88 skirtingus sveikuosius skaičius, tai visada kuris nors iš jų dalijasi iš 88 arba keleto iš jų suma dalijasi iš 88.

3. Plokštumoje turime iškiląjį penkiakampį, kurio viršūnių koordinatės yra sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad šio penkiakampio viduje visada atsiras toks taškas, kurio koordinatės taip pat yra sveikieji skaičiai.

4. Ant kortelių surašėme sveikuosius skaičius nuo 1 iki 99. Po to korteles užvertėme, sumaišėme jas ir vėl surašėme sveikuosius skaičius nuo 1 iki 99. Ar abiejose kortelių pusėse parašytų skaičių skirtumų sandauga gali būti nelyginis skaičius?

5. Duota atkarpa AB. Raskite smailiųjų trikampių ABC viršūnių C geometrinę vietą (t.y. plokštumos dalį, kurioje turi būti taškas C, kad trikampis ABC būtų smailusis).

6. Plokštumoje duoti trys vienoje tiesėje nesantys taškai A, B ir C. Kiek plokštumoje yra tiesių, vienodai nutolusių nuo tų trijų taškų?

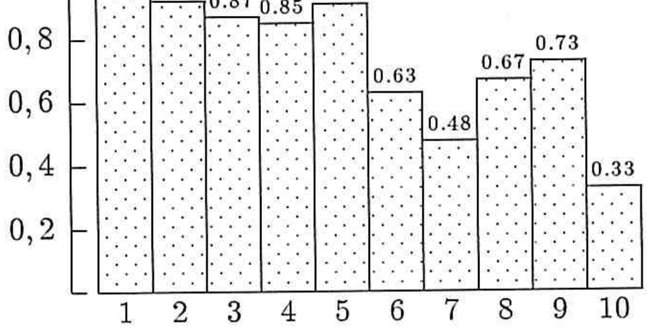
7. Ar galima žvaigždutes pakeisti pliusais ir minusais taip, kad gautume lygybę $*1*2*3*4*\cdots*1999 = 2000$?

8. A, B, C ir D yra plokštumos taškai. Ar gali atsitikti taip, kad atstumai tarp poromis imamų taškų būtų: 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm ir 6 cm?

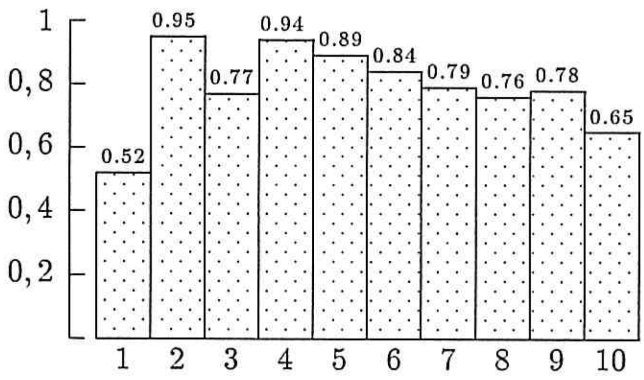
9. Įrodykite, kad skaičius $2^{6n} + 18n - 1$ dalijasi iš 81, kai n yra natūralusis skaičius.

10. Įrodykite, jog paėmę 46 skirtingus natūraliuosius skaičius, visada galėsime tarp jų nurodyti tokius du, kurių suma ar skirtumas dalijasi iš 88.

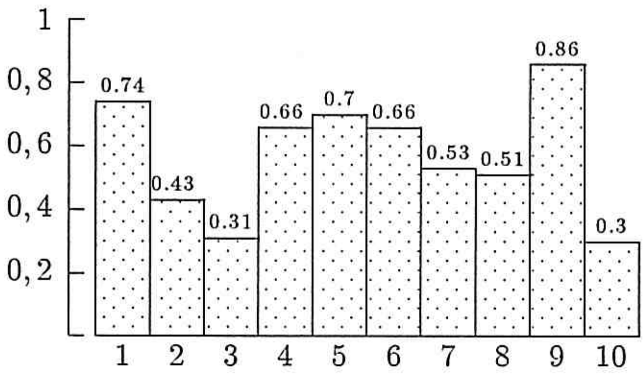
Pirmosios užduoties sprendimus atsiuntė 478, antrosios – 432, trečiosios – 329 moksleiviai. Uždavinių sprendimai vertinami taškais: 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1. Ar sunkūs buvo pateiktieji uždaviniai, rodo 1, 2 ir 3 diagramos, kuriose pavaizduoti kiekvieno uždavinio įvertinimo vidurkiai (pirmosios užduoties – 1-oje diagramoje, antrosios – 2-oje, trečiosios – 3-ioje). Informacija apie surinktų balų kiekį pateikta 4-oje diagramoje. Dar žvilgterkime į 1-ąją lentelę, kurioje matome LJMM moksleivių skaičiaus „geografinę" dinamiką per pirmuosius mokslo metus. Joje surašyti moksleivių, atsiuntusių užduočių sprendimus iš įvairių Lietuvos vietovių, skaičiai.



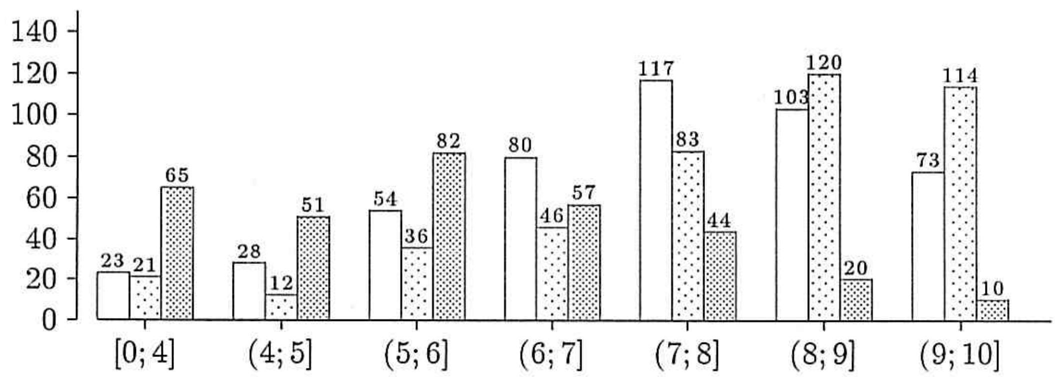
1 diagrama



2 diagrama



3 diagrama



4 diagrama. Trijų užduočių sprendimo rezultatų palyginimas. Pirmas, antras ir trečias stulpeliai vaizduoja atitinkamai pirmąją, antrąją ir trečiąją užduotis.

1 lentelė

Miestas	priimta	1 užduotis	2 užduotis	3 užduotis
Alytus	42	40	28	27
Anykščiai	3	3	2	2
Druskininkai	3	3	3	0
Jonava	6	3	3	2
Joniškis	2	2	2	2
Jurbarkas	5	5	5	1
Kaišiadorys	4	3	3	2
Kaunas	74	48	47	32
Kėdainiai	25	22	19	19
Kelmė	3	3	2	2
Klaipėda	22	20	19	18
Kretinga	9	8	6	4
Kupiškis	7	6	6	4
Kuršėnai	3	0	1	0
Marijampolė	6	6	6	5
Mažeikiai	37	32	27	19
N. Akmenė	1	0	0	0
Pakruojis	13	10	5	1
Palanga	3	3	0	0
Panevėžys	16	16	13	9
Pasvalys	6	6	6	6
Plungė	19	18	18	18
Prienai	9	8	7	4
Radviliškis	18	17	17	13
Raseiniai	16	6	6	5
Rokiškis	26	25	24	22
Skuodas	3	3	3	3
Šakiai	23	18	16	12
Šiauliai	25	22	22	19
Šilutė	3	3	2	2
Švenčionys	4	4	4	4
Tauragė	2	2	2	2
Telšiai	1	0	0	0
Trakai	1	1	1	0
Ukmergė	13	12	12	4
Utena	25	22	21	15
Varėna	6	3	6	2
Vilkaviškis	11	11	11	5
Vilnius	88	38	33	25
Visaginas	27	23	22	16
Zarasai	3	3	2	3
Iš viso	613	478	432	329