O.A.S. Karamzadeh
Apibendrinimai matematikoje

Straipsnio autorius – Ahvazo universiteto (Iranas) profesorius. Matematikos daktaro laipsnį (Ph. D.) įgijęs Exeterio universitete parašė apie 30 mokslo darbų iš nekomutatyvios algebros ir topologijos. Jau 10 metų ruošia Irano moksleivių komandą tarptautinėms matematikos olimpiadoms. Straipsnis parašytas specialiai mūsų žurnalui.

Didelė kasmet matematinėje literatūroje paskelbiamų rezultatų dalis yra tik jau žinomų rezultatų apibendrinimai. Tai ne visada lengva pastebėti, nes kai kurie autoriai, norėdami pabrėžti, kad jų darbas yra didžiai originalus, nemini panašių darbų, kurie paskelbti jau anksčiau. Kai kurie žmonės, rašydami savo darbą, nėra pakankamai gerai susipažinę su savo srities literatūra. Kiekvienas matematikas supranta apibendrinimo reikšmę, tiek sprendžiant uždavinius, tiek atliekant tyrimus. Akivaizdu, kad mūsų, kaip mokytojų ir dėstytojų, pareiga padaryti visa, kas įmanoma, kad sužadintume studentų susidomėjimą ir parodytume, kaip kuriama matematika. Mano nuomone, daug galima pasiekti skatinant juos tyrinėti savarankiškai ir atskleidžiant skirtingų rezultatų ryšius. Turėtume skatinti juos kurti uždavinius ir kelti klausimus. Vienas iš būdų tai daryti – parodyti jiems apibendrinimo techniką. Reikia pabrėžti, kad visa matematikos istorija yra tik sekančių vienas kitą matematinių apibendrinimų aprašymas. Panagrinėkime kelis pavyzdžius.

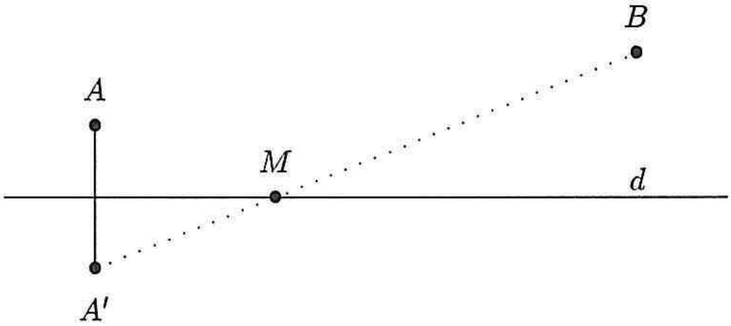
Herono uždavinys

Pradėsiu nuo gerai žinomo pavyzdžio, kurį tikriausiai matė kiekvienas, kas mokėsi geometrijos.

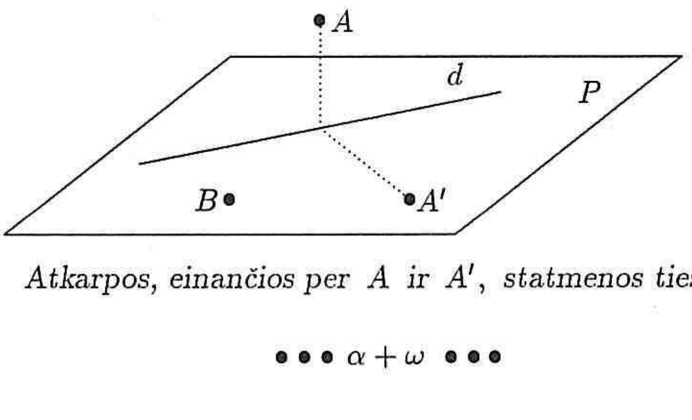
- *Tiesė d dalija plokštumą į dvi dalis. Vienoje jos pusėje pažymėti taškai A, B. Raskite tiesės d tašką M, kad atkarpų ilgių suma $MA+MB$ būtų minimali.*

Pavadinkime šį uždavinį Herono uždaviniu. Dauguma mokytojų sprendžia jį tokiu būdu, kuris išties yra paties Herono metodas. Tegu taškas A' yra simetriškas taškui A tiesės d atžvilgiu. Tada tiesės d ir $A'B$ susikirtimo taškas ir yra ieškomasis taškas M. Kad tuo įsitikintume, imkime kitą tiesės d tašką N; akivaizdu, kad $NA+NB > MA+MB = A'B$. Atidžiau patyrinėkime sprendimą. Viskas čia aišku, išskyrus tą žingsnį, kuriuo randame A'. Studentai gali visiškai teisėtai paklausti, kokie matematiniai svarstymai paskatino ieškoti taško A'. Dėstytojai auditorijose paprastai nenurodo įtikinamos priežasties ir paprasčiausiai sako, kad tai yra matematinė gudrybė. Aš manau, kad dėl visų šių nepaaiškintų žingsnių, vadinamų matematinėmis gudrybėmis, ir atsiranda visi matematikos suvokimo sunkumai. Mums reikėtų vengti auditorijose tokių nepaaiškintų žingsnių. Heronas pateikė ką tik aptartą sprendimo būdą, nes jis jau žinojo tam tikras fizikos aksiomas, kurios ir sudaro įrodymo idėją.

Aš siūlau tokį paaiškinimą. Pradėkime nuo klausimo: jei A, B yra du pažymėti taškai, tai kur yra taškas M, kad suma $MA + MB$ yra minimali? Kiekvienam visiškai aišku, kad jei ABM yra trikampis, tai $MA + MB > AB$. Taigi suradę tašką M, kuriam $MA + MB = AB$, būsime radę sprendinį. Taigi tinka bet kuris atkarpos AB taškas M. Dabar paklauskime kitaip: tegu tiesė d kerta atkarpą AB; kuris tiesės taškas M tenkina minėtą minimalumo sąlygą? Kadangi visi atkarpos AB taškai tenkina šią sąlygą, tai ieškomasis M yra tiesės ir atkarpos susikirtimo taškas. Pagaliau mes priartėjome Herono uždavinio.



Panagrinėję atskirą atvejį, dabar galime tarti, kad A, B yra toje pat tiesės d pusėje. Galime paklausti, ar nėra taško A' kitoje tiesės pusėje, kad A ir A' būtų vienodai nutolę nuo kiekvieno tiesės d taško. Tai kiekvienam taip pat akivaizdu. Taigi randame A' ir sprendinį – $A'B$ ir d susikirtimo tašką. Pastebėkime, kad šitaip sprendžiant nebereikia įrodinėti, kad bet kuriam kitam taškui N $NA + NB > MA + MB$. Taigi pradėjome nuo trivialaus uždavinio ir paprastu būdu apibendrinę gavome Herono uždavinį. Jeigu nagrinėtume trimatį atvejį ir pakeistume tiesę d plokštuma P, tai sprendimas būtų visai toks pat. Tačiau reikia pasakyti, kad su tokios rūšies apibendrinimais gero vardo neįgysi. Norėdami netrivialiai apibendrinti Herono uždavinį plokštumai, tarkime, kad du taškai A, B ir tiesė d nėra vienoje plokštumoje. Spręsdami uždavinį, norėtume jį suvesti į plokštumos atvejį, tad pabandykime perkelti kiek galima daugiau objektų į vieną plokštumą. Nubrėžkime per d ir B plokštumą P ir paklauskime, ar nėra joje taško A', kad atstumai nuo bet kurio d taško iki A ir A' būtų tie patys. Laimei, toks taškas A' yra ir šitaip uždavinys yra suvedamas į Herono uždavinį plokštumoje.



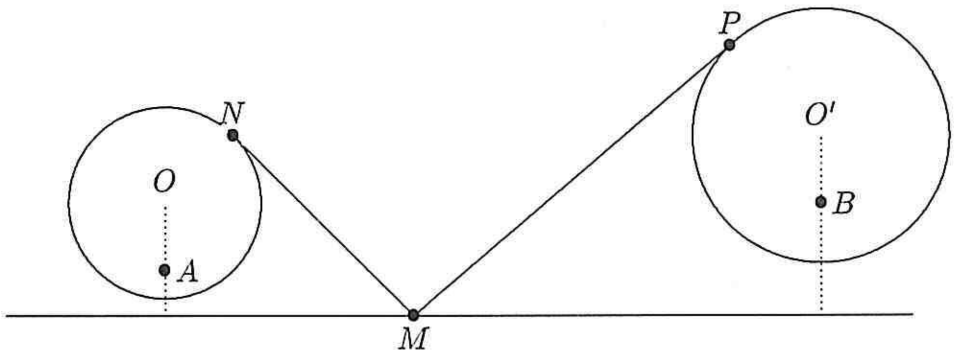
Atkarpos, einančios per A ir A', statmenos tiesei d

••• $\alpha + \omega$ •••

O dabar ieškokime kitų uždavinio apibendrinimų.

- *Tiesė d dalija plokštumą į dvi dalis, apskritimai C ir C' yra toje pačioje plokštumos pusėje. Raskite tiesės d tašką M, kad atstumų suma $MN+MP$ būtų mažiausia, čia MN ir MP yra apskritimų C, C' liestinės, N, P – atitinkami lietimosi taškai.*

Spręsdami šį uždavinį vėl norėtume, kad vietoje apskritimų būtų taškai. Tad vėl klauskime, ar įmanoma, neprarandant bendrumo, pakeisti apskritimus taškais. Taip, tai vėl yra įmanoma. Nagrinėkime d kaip radikalinę apskritimo C ir tam tikro taško A tiesę ir raskime A. [1] Analogiškai suradę tašką B, suvedame uždavinį į Herono problemą tiesei ir taškams.



Jeigu nagrinėsime dvi sferas ir tiesę erdvėje, galime kelti panašų klausimą. Paliekame šį atvejį skaitytojui. Literatūroje galima rasti daug uždavinių, kuriuos galima suvesti į Herono problemą.

Dar vienas pavyzdys

Panagrinėsime dar vieną gerai žinomą uždavinį.

- *Jei a, b, c yra trikampio kraštinių ilgiai, o S plotas, tai*

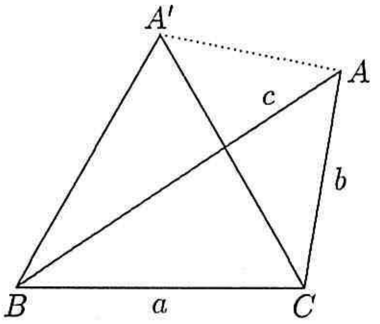
$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\geqslant 0;$$

ši lygybė galioja tada ir tik tada, kai trikampis yra lygiakraštis.

Nors šis uždavinys paskelbtas dar 1919 metais žurnale *Mathematische Zeitschrift*, 1961 metais jis buvo įtrauktas į tarptautinės matematikų olimpiados uždavinių sąrašą.

[1] Redaktoriaus komentaras apie radikalinę tiesę. Tegu Q yra apskritimas, o X – jo išorės taškas. Jei per X išvesime tiesę, kertančią Q taškuose U, V, tai sandaugos $XU \cdot XV$ reikšmė nepriklauso nuo tiesės, ji priklauso tik nuo Q ir X. Šis skaičius vadinamas X laipsniu Q apskritimo atžvilgiu. Akivaizdu, kad taško Q laipsnis lygus XW^2, čia XW yra Q liestinė, W – lietimosi taškas. Jei Q_1, Q_2 du apskritimai, tai geometrinė vieta taškų, turinčių tą patį laipsnį abiejų apskritimų atžvilgiu, yra tiesė. Ji ir vadinama radikaline Q_1 ir Q_2 tiese. Jei Q_1 yra taškas, o Q_2 apskritimas, tai radikalinę tiesę sudaro taškai X, kuriems $XQ_1 = XW$, čia XW yra Q_2 liestinė, W – lietimosi taškas. Žinant, kad radikalinė tiesė egzistuoja ir yra vienintelė, nesunku rasti tašką, kuris reikalingas Herono uždaviniui apskritimams spręsti: turint apskritimą Q ir tiesę d reikia rasti tašką A, kad d būtų A ir Q radikalinė tiesė (žr. brėž.).

Literatūroje galima rasti daug šios teoremos įrodymų. Tačiau turėtume žinoti, kad 1811 metais matematikas Simon Lhuilier įrodė, kad bet koks trikampis ortogonalia projekcija gali būti suprojektuotas į iš anksto nustatytos formos trikampį. Nesunku parodyti, kad suformuluotoji nelygybė ekvivalenti specialiam Lhuiliero teoremos atvejui: bet koks trikampis ortogonalia projekcija gali būti suprojektuotas į lygiakraštį trikampį. Taigi nelygybė nebuvo naujas rezultatas jau 1919 metais. Tačiau ši teorema padeda rasti kitą įrodymą. Iš pradžių pastebėkime, kad dydį $a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S$ galime interpretuoti kaip trikampio artumo lygiakraščiui matą. Tai įrodymo idėja. Tegu $\angle C > 60°$; nubrėžkime lygiakraštį trikampį $A'BC$ su viena iš kraštinių BC. Akivaizdu, kad atkarpos AA' ilgis taip pat yra trikampio nukrypimo nuo lygiakraščio matas.



Tačiau

$$AA'^2 = \frac{a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S}{2},$$

ir įrodymas baigtas. Pastebėkime, kad $AA' > b-a, AA' > c-a$, taigi $AA' > (b+c-a)/2$, todėl gauname stipresnę nelygybę

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S \geqslant \frac{(b+c-a)^2}{2}.$$

Kadangi ankstesnė nelygybė ekvivalenti specialiam Lhuiliero teoremos atvejui, natūralu klausti, ar yra nelygybė, ekvivalenti Lhuiliero teoremai. Turbūt tai pastebėjo D. Pedo ir prieš kelis metus žurnale *American Mathematical Monthly* paskelbė nelygybę kaip uždavinį, nepaminėdamas ryšio su minėta teorema. Pastebėkime, kad Pedo nelygybė yra tik kita Lhuiliero teoremos forma, todėl jai nebereikia įrodymo. Nelygybė atrodo taip.

- *Bet kokiems dviems trikampiams ABC ir $A'B'C'$ su kraštinėmis a, b, c ir $a', b'c'$ bei plotais S, S' teisinga nelygybė*

$$\sum a^2(b'^2+c'^2-a'^2) \geqslant 16SS';$$

ši lygybė teisinga tada ir tik tada, kai trikampiai panašūs.

Norėdami įrodyti kitaip, turėtume nukopijuoti pirmosios nelygybės įrodymą. Nubrėžtume trikampį $A''BC$ su kraštine BC, panašų į $A'B'C'$, rastume AA'' ilgį, ir įrodymas būtų baigtas.

••• $\alpha+\omega$ •••

Literatūroje yra daug tarpusavyje susijusių rezultatų ir problemų, nors jų ryšiai ir neminimi. Mūsų pareiga nurodyti juos, kada tik pastebime. Nors tai sumažina kai kurių autorių darbų originalumą, bet labai padeda studentams ir atskleidžia matematikos grožį.

Taškai, tiesės, plokštumos ir apskritimai

Mano trečiasis pavyzdys toks.

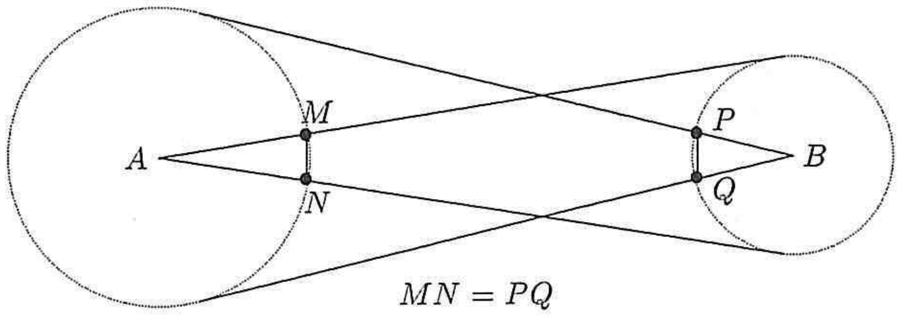
- *Taškai $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n > 4)$ nėra vienoje plokštumoje. Ar visada atsiras plokštuma, einanti lygiai per tris šios aibės taškus?*

Mes bandome apibendrinti Sylvesterio teoremą.[2]

Žinoma, kad šis teiginys nėra teisingas: imkime tieses d ir d', negulinčias vienoje plokštumoje, ir tegu vienas iš taškų yra tiesėje d, o kiti $n-1$ – tiesėje d'. Tada jokia plokštuma negali eiti lygiai per tris taškus. Taigi ne visada įmanoma pakeisti tieses plokštumomis ir apibendrinti. Tačiau galime nesunkiai parodyti, kad visada egzistuoja apskritimas, einantis lygiai per tris aibės taškus. Tegu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ yra aibės taškai. Sujunkime A_1 su $A_2, A_3, \ldots, A_n$ ir nagrinėkime plokštumą, kertančią visas atkarpas A_1A_j. Šios plokštumos ir atkarpų susikirtimo taškų aibėje raskime Sylvesterio problemos sprendinį, t. y. tiesę, einančią tik per du taškus. Šį sprendinį atitiks plokštuma, einanti lygiai per dvi atkarpas A_1A_i ir A_1A_j. Apskritimas, einantis per taškus A_1, A_i, A_j, yra ieškomasis sprendinys.

Pabaigai pabrėšime, kad pagrindiniai ir gražiausi rezultatai paprastai būna trivialių teiginių apibendrinimai. Štai vienas pavyzdys: sujunkime tašką A su tašku B ir tašką B su tašku A.

Šios konstrukcijos trivialią lygybę A ilgis $= B$ ilgis $= 0$ galima apibendrinti taip:



[2] Ją 1893 metais J. Sylvesteris paskelbė kaip uždavinį, kurį galima suformuluoti taip: jei taškai $A_1, A_2, \ldots, A_n (n \geqslant 3)$ nėra vienoje tiesėje, tai visada atsiras tiesė, einanti lygiai per du iš šių taškų. Atvejis $n = 3$, žinoma, trivialus. (Red. komentaras.)