Jürgen Flachsmeyer

Skritulio kvadratūra ir apskritimo ilgis

Apskritimo skaičiaus π istorija siekia tolimus žmonių civilizacijos laikus. Mūsų žurnale[1] jau rašyta apie šį skaičių analiziniu ir skaičių teorijos aspektu. Šiame straipsnyje skaičius π nagrinėjamas geometriniu požiūriu. Straipsnio autorius – Greifswaldo universiteto profesorius, dirbantis geometrijos ir topologijos srityse. Straipsnis parašytas specialiai mūsų žurnalui.

Skritulio kvadratūra pagal Ahmes

Senojo Egipto papiruse (Rindo papiruse, apie 2000 m. pr. Kr.) surašytuose pavyzdžiuose ir nurodymuose apskaičiuojamas skritulio plotas. Skritulio formos su skersmeniu d plotas užrašomas reiškiniu

$$\left(d-\frac{d}{9}\right)^2=d^2\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2.$$

Tai atitinka tokią π reikšmę:

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{8}{9}\right)^2,\quad \text{t. y.}\quad \pi=\frac{256}{8}=3,160493827\ldots.$$

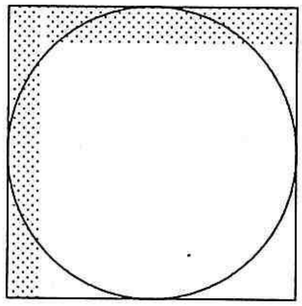
paklaida yra tik $0,601643041\cdots\%$ (gaunama reikšmė didesnė už tikrąją vertę). Tai stebėtinas artinys. Kaip egiptiečiai įstengė jį gauti? Tikėtiną paaiškinimą davė Greifswaldo matematikas Franz von Krbekas (*Franz von Krbek* (1898–1984)), parašęs pasisekimą pelniusių knygų apie matematiką ir fiziką. Jo matematikos populiarinimui skirtame 1962 metų rašinyje „Geometriniai mažmožiai“ skaitome:

> Neseniai specialistas pareiškė nuomonę, kad neturint naujų tekstų nelabai yra prasmės reikšti hipotezes apie formulės atsiradimą, nes akivaizdu, kad artimiausias kelias neveda tiesiog prie tikslo. Nepaisydamas stipraus žodžio „akivaizdu“, man atrodo, kad aš suradau paaiškinimą, kuris būdingas egiptiečių svarstymams ir todėl atrodo įtikinamas.

Koks gi tas Krbeko paaiškinimas? Rindo papiruso 48 pavyzdys rodo, kad egiptiečiai lygino skritulį su kvadratu ir suprato tokio palyginimo nepriklausomumą nuo mastelio. Skritulys neužpildo kvadrato. Su kokiu mažesniu kvadratu

[1] Žr. G. Bareikis. Skaičiaus π istorija, *Alfa plius omega*, 1997, 2(4), 61–70.

skritulys yra lygiaplotis? Šis mažesnis kvadratas ir reikštų skritulio kvadratūrą, skritulio plotą būtų galima pakeisti kvadrato plotu. Mažesnysis kvadratas skiriasi nuo didžiojo stataus kampo formos kraštu (žr. 1 brėž.).

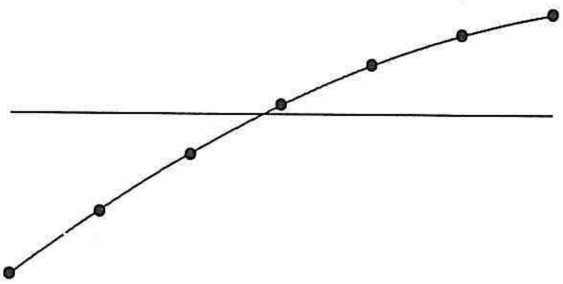


1 brėž. Reikia nupjauti stataus kampo formos figūrą, kad gautume su skrituliu lygiaplotį kvadratą.

Visiškai taip, kaip būdinga egiptiečių skaičiavimams, tarę, kad šio kampo plotis lygus trupmenai $1/n$, gauname tokią mažojo kvadrato, kartu ir skritulio ploto reikšmę:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^2=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Remiantis patirtimi, galėjo būti nustatyta, kad $n=9$, nes, kai $n=8$ ir $n=10$, gaunami blogesni artiniai; tai galėjo būti žinoma todėl, kad egiptiečiai javams laikyti naudojo ritinių formos talpas. Tokius argumentus matematikos istorikas Helmutas Gericke pateikė kaip Krbeko paaiškinimą.



2 brėž. Funkcijų $f(x)=\pi/4$ ir $g(x)=(1-1/x)^2$ grafikų palyginimas; juodi taškai atitinka $g(x)$ reikšmes, kai $x=6,7,\ldots,11,12$.

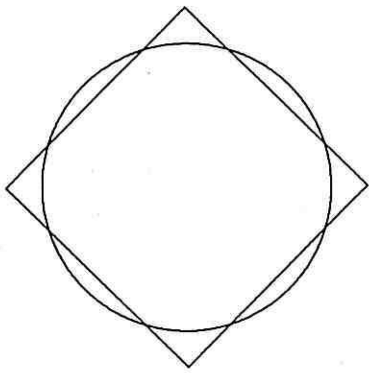
Skritulio kvadratūra pagal Albrechtą Diurerį

Treji metai prieš Albrechto Diurerio (*Albrecht Dürer*) mirtį, 1525 metais pasirodė jo meno teorijos veikalas „Nurodymai apie tiesių, plokštumų ir visų kūnų matavimus skriestuvu ir liniuote" (*Underweysungen der Messungen mit Zirkel und Richtscheyt, in Linien Ebenen und gantzen Corporen*). Albrechtas Diureris buvo aukšto rango menininkas, domėjęsis su paveikslų tapyba susijusiais matematiniais tyrinėjimais. Minėtą veikalą galima interpretuoti kaip elementariosios geometrijos iliustraciją. Jame Diureris dėsto tokią apytikslę skritulio kvadratūrą.

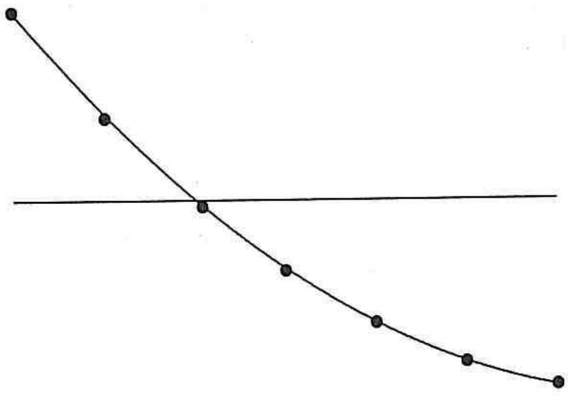
Skritulio skersmuo dalijamas į 8 lygias dalis (vienetus). „Lygiaplotį" kvadratą Diureris gauna brėždamas kvadratą, kurio įstrižainę sudaro 10 vienetų. Šitaip gaunama $16\pi = 10 \cdot 5$, t.y. Diurerio π vertė lygi

$$\frac{25}{8} = 3,125.$$

Tai sudaro $0,5281605...\%$ dydžio neigiamą paklaidą.



3 brėž. Diureris skritulio plotą lygina su kvadrato plotu



4 brėž. Funkcijų $f(x) = \pi/4$ ir $g(x) = (1 + 2/x)^2/2$ grafikų palyginimas; juodi taškai atitinka $g(x)$ reikšmes, kai $x = 6, 7, \ldots, 11, 12$.

Diureris nepateikia paaiškinimo, kaip atsirado toks artinys. Ar žvelgiant iš matematikos pozicijų šis artinys kuo nors ypatingas? Atsakymas – taip! Lyginant vienetinio skritulio ir kvadrato su įstrižaine $1 + 2/x$ plotus ir imant tik sveikuosius skaičius x, skirtumas yra mažiausias, kai $x = 8$ (žr. 4 brėžinį, $f(x) = S_{apskr}$, $g(x) = S_{kvadr}$). Taigi Diurerio konstrukcijoje su apskritimo skersmeniu $d = 8$ ir kvadrato įstrižaine $D = 10$ kaip tik ir pasiekiamas šis minimumas.

Beje, Gericke knygoje minimama, kad π reikšmę $3\frac{1}{8}$ žinojo jau babiloniečiai.

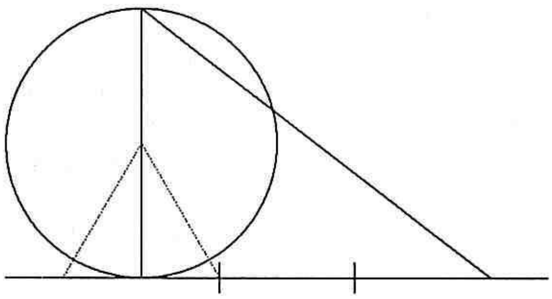
$\bullet\bullet\bullet\ \alpha + \omega\ \bullet\bullet\bullet$

Apskritimo ilgis pagal Kochanskį

Adamas Adamandus Kochanskis (*Adam Adamandus Kochanski*, (1631–1700)) buvo lenkų jėzuitas. Nuo 1680 metų jis užsiėminėjo matematika Varšuvoje, 1686 tapo lenkų karaliaus dvaro kapelionu, nuo 1691 metų – karališkuoju matematiku. Apytikslis apskritimo ilgio įvertis yra žymiausias jo rezultatas. Šis artinys konstruojamas taip: apskritimui nubrėžiama liestinė ir jai statmenas skersmuo. Ant liestinės kaip pagrindo nubrėžiamas lygiakraštis trikampis, kurio aukštinė lygi apskritimo spinduliui (žr. 5 brėž.) Nuo kairiosios šio trikampio viršūnės liestinėje atidedama atkarpa, kurios ilgis lygus trims spinduliams. Stačiojo trikampio, kurio vienas statinys sutampa su gautąja liestinės atkarpa, o kitas – su apskritimo skersmeniu, įžambinė yra apytiksliai lygi pusei apskritimo ilgio! Pasirėmę Pitagoro teorema ir tarę, kad apskritimo spindulys lygus vienetui, gauname tokią įžambinės ilgio reikšmę:

$$c = \sqrt{4 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 3,1415333387\ldots.$$

Tai įspūdingas π skaičiaus artinys! Paklaida sudaro tik $0,0018805\%$.



5 brėž. *Kochanskio trikampis*

Kochanskio trikampio, kurio įžambinė apytiksliai lygi pusei apskritimo ilgio, kampai lygūs:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3 - \frac{\sqrt{3}}{3}}\right) \approx 39,5411167\ldots^\circ, \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{3 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{2}\right) \approx 50,4588832\ldots^\circ.$$

Suprantama, taip gaunama ir skritulio kvadratūra. Naudojantis Euklido statinių teorema arba aukštinių dėsniu galima nubrėžti kvadratą, lygiaplotį stačiakampiui, kurio vienas statinis lygus Kochanskio trikampio įžambinei, o kitas – apskritimo spinduliui.