Juozas Mačys

Susipažinkite: funkcinės lygtys

Pažįstamos nepažįstamosios

Puikiai žinome, ką reiškia išspręsti lygtį, pavyzdžiui,

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0:$$

turime rasti *lygties šaknis*, t.y. tas kintamojo x reikšmes, su kuriomis ši lygtis virsta teisinga skaitine lygybe. Tiesa, ir čia kartais gali kilti abejonių. Pavyzdžiui, jeigu užrašę lygtį

$$(x-2)(x+3)(x^2+1) = 0, \tag{1}$$

guvų trečiokėlį (vietoje x^2 parašę $x \cdot x$) paklausime, kam lygus x , jis atsakys, kad $x = 2$. Aštuntokas pasakytų, kad šaknys yra dvi: $x = 2$ ir $x = -3$. O štai abiturientas gali paklausti, ar reikia rasti tik realiąsias šaknis, ar ir kompleksines. Kitaip sakant, (1) lygtį galima spręsti natūraliųjų skaičių aibėje $\mathbb{N}$, realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$ ir kompleksinių skaičių aibėje $\mathbb{C}$. Šiaip jau apie tai pasakoma uždavinio sąlygoje, bet dažniausiai nagrinėjamoji aibė numanoma. Paprastai mokykloje ar per egzaminus turima galvoje, kad (jei nenurodyta kitaip) reikia rasti realiąsias lygties šaknis.

O kas gi yra *funkcinė lygtis* ir ką reiškia ją išspręsti? Geriausia tai suvokti, paėmus konkretų pavyzdį.

- *Funkcija* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tenkina sąlygą*

$$f^2(x) + f(x)f(y) = x^2 + xy \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Raskite visas tokias funkcijas.

Matome, kad sąlygoje labai kruopščiai nurodyta, kad vieno kintamojo funkcija f apibrėžta realiųjų skaičių aibėje, įgyja reikšmes iš realiųjų skaičių aibės ir su visomis poromis (x, y), $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, tenkina (2) sąlygą. Trumpiau šis uždavinys formuluojamas taip:

- *Išspręskite funkcinę lygtį*

$$f^2(x) + f(x)f(y) = x^2 + xy. \tag{3}$$

Vėl, kadangi nepasakyta kitaip, suprantame, kad funkcija apibrėžta (ir įgyja reikšmes) aibėje $\mathbb{R}$, o lygybė tenkinama su visomis poromis (x, y), $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. O išspręsti (3) lygtį reiškia rasti visas funkcijas f, kurios tą lygtį tenkina. Skirtumas nuo įprastinių lygčių čia tas, kad (3) lygybė turi būti tenkinama ne atskiriems x ir y, o visiems x ir y *iš karto*. Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = x$ tenkina (3) lygtį:

$$x^2 + xy = x^2 + xy$$

(t.y. paverčia lygtį tapatybe), o funkcija $f(x) = |x|$ – netenkina, nes lygybė

$$|x^2| + |x||y| = x^2 + xy$$

nėra tapatybė: ji neteisinga, pavyzdžiui, kai $x = 1$, $y = -1$.

Beje, kartais atspėti kokią nors funkciją f – *funkcinės lygties sprendinį* – nėra sunku (kaip ir šiuo atveju). Visas sunkumas yra surasti *visas* tokias funkcijas (t.y. nurodyti sprendinius ir įrodyti, kad daugiau jų nėra). Skaitytojui (3) lygties atveju tai siūlome atlikti pačiam (uždaviniai, jų sprendimai ir atsakymai pateikiami straipsnio gale skyreliuose „*Uždaviniai*“ ir „*Uždavinių sprendimai*“; žr. **3** uždavinį).

Ar mokykloje dažnai susiduriame su funkcinėmis lygtimis? Pasirodo – ir taip, ir ne. Imkime lygybę

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Visi pasakys, kad čia užrašytas lyginės funkcijos apibrėžimas. Kita vertus, jei pasiūlytume *išspręsti funkcinę lygtį*

$$f(x) = f(-x),$$

tai atsakymas būtų toks: šią lygtį tenkina kiekviena lyginė funkcija. Vaizdžiau visus sprendinius galima būtų nusakyti taip: neneigiamiesiems x apibrėžiame

$f(x)$ bet kaip (pavyzdžiui, „braižome" bet kokį grafiką), o kiekvienam neigiamajam x reikšmę $f(x)$ imame tokią pat, kaip ir $f(|x|)$ (pratęsiame grafiką simetriškai Oy ašies atžvilgiu).

Kiekvienas nesunkiai atpažins ir funkcinę lygtį

$$f(-x) = -f(x)$$

(ją tenkina visos nelyginės funkcijos), ir funkcinę lygtį

$$f(x+T) = f(x) \quad (T = \text{const})$$

(ją tenkina visos periodo T periodinės funkcijos).

Nė vieno nenustebins ir lygybė

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{4}$$

– juk tai rodiklinės funkcijos $f(x) = a^x$ savybė: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. Kitaip tariant, rodiklinė funkcija $f(x) = a^x$ tenkina (4) funkcinę lygtį. Kaip pamatysime vėliau, funkcija $f(x) = a^x$ nėra vienintelė, kuri tenkina šią lygtį (žr. **5** uždavinį). Vis dėlto pasirodo, kad jei spręstume uždavinį

- *Raskite visas tolydžiąsias reikšmės* 0 *neįgyjančias funkcijas, tenkinančias sąlygą*

  $$f(x+y) = f(x)f(y),$$

  tai nurodytoji funkcija iš tikrųjų būtų vienintelis sprendinys.

Panašiai funkcinės lygties

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

tolydieji sprendiniai yra funkcijos $f(x) = kx$ $(k = \text{const})$, funkcinės lygties

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad x > 0,\ y > 0,$$

tolydieji sprendiniai yra

$$f(x) = k \log x \ (k = \text{const})$$

(žr. **6** uždavinį), o funkcinės lygties

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

●●● $\alpha + \omega$ ●●●

tolydieji sprendiniai $f\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$ yra

$$f(x)=x^k \quad (k=\mathrm{const})$$

(žr. 4 uždavinį).

Funkcinių lygčių pasitaiko per stojamuosius egzaminus. Pavyzdžiui, ir Lietuvoje per stojamuosius egzaminus neseniai buvo tokie du uždaviniai:

- *Funkcija* $f(x)$ *su visais* $x\neq 0$ *tenkina lygybę*

$$2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=5x.$$

  Raskite $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

- *Funkcija* $f(x)$ *su visais* x *tenkina lygybę*

$$2f(x)+3f(1-x)=5x.$$

  Raskite $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

Žinoma, čia nevartojamas terminas funkcinė lygtis, neprašoma rasti visas funkcijas $f(x)$ ir t.t., bet sprendimas dėl to iš esmės nesikeičia (žr. **1** ir **2** uždavinius).

Funkcinių lygčių pasitaiko ir per Amerikos vidurinių mokyklų egzaminus AHSME. Štai uždavinys iš 1979 ir 1998 metų egzaminų testų (žr. **7–9** uždavinius):

- *Funkcija* f *tenkina funkcinę lygtį*

$$f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1$$

  su kiekviena realiųjų skaičių pora (x,y). *Jeigu* $f(1)=1$, *tai kiek yra sveikųjų skaičių* n, $n\neq 1$, *tenkinančių lygybę* $f(n)=n$?

Ką jau ir kalbėti apie įvairias olimpiadas – ne tik tarptautinėse, bet ir Lietuvos olimpiadose vos ne kasmet duodama spręsti funkcinių lygčių. Žinoma, ir čia jos dažnai „užmaskuotos“. Pavyzdžiui, dar 1981 m. Lietuvos olimpiadoje buvo toks uždavinys:

- *Realiųjų skaičių seka* $a_0,a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ *tenkina sąlygą*

$$a_{m+n}+a_{m-n}=a_{3m}\quad (m\geqslant n\geqslant 0).$$

Raskite tą seką.

Užtenka uždavinį suformuluoti kitaip, ir gausime „funkcinę lygtį" :

- *Funkcija* $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ (*čia* $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$) *tenkina sąlygą*

$$f(x+y) + f(x-y) = f(3x) \quad \forall\, x \in \mathbb{Z}^+,\ y \in \mathbb{Z}^+,\ x \geqslant y.$$

Raskite visas tokias funkcijas.

Ir skyrelio pabaigai apie patį terminą „funkcinė lygtis". Dažnai jis be reikalo pakeičiamas terminu „funkcionalinė lygtis". Dalykas čia labai paprastas: lietuvių kalboje yra trys panašūs žodžiai: „funkcinis", „funkcionalus" ir „funkcionalinis", bet į daugelį kalbų (pavyzdžiui, anglų, vokiečių, rusų) jie verčiami vienu žodžiu (functional, функциональный). Žodis „funkcinis" labai artimai susijęs su „funkcija" - plg. „funkcinis susirgimas", „funkcinė priklausomybė" ir pan. Žodis „funkcionalus" labiau nutolęs nuo „funkcijos", bet irgi reiškia „gerai atliekantis savo funkciją", „gerai atitinkantis savo paskirtį" (plg. „funkcionalumas"). Pagaliau „funkcionalinis" galėtų būti siejamas tik su matematikų „funkcionalu" ir, pavyzdžiui, „funkcionalinė išraiška" reikštų kažką, kas išreikšta funkcionalu ar funkcionalais. Beje, lenkai ir ukrainiečiai jau seniai yra paskelbę karą tokiam sąvokų painiojimui.

Koši funkcinė lygtis

Funkcinę lygtį

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} \tag{5}$$

vadiname *Koši funkcine lygtimi.* Funkciją, kuri tenkina (5) lygtį, vadiname adityvia. Pasirodo, kad rasti visas adityviąsias funkcijas – labai sunkus uždavinys. Žymiai lengviau išspręsti šį uždavinį ne visų, o tolydžiųjų funkcijų aibėje, t.y. rasti visas tolydžiąsias adityviąsias funkcijas.

Imdami lygtyje (5) $y = x$, gauname

$$f(2x) = 2f(x).$$

Tada (5) lygtyje imdami $y = 2x$, turime

$$f(3x) = f(2x) + f(x) = 2f(x) + f(x) = 3f(x),$$

o tęsdami (matematinė indukcija!) gauname

$$f(nx) = nf(x).$$

Įstatę į šią lygtį $x = \frac{m}{n}y$ $(m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N})$, gauname

$$f\Big(n\frac{m}{n}y\Big) = nf\Big(\frac{m}{n}y\Big), \qquad f(my) = nf\Big(\frac{m}{n}y\Big), \qquad mf(y) = nf\Big(\frac{m}{n}y\Big),$$

t.y.

$$f\Big(\frac{m}{n}y\Big) = \frac{m}{n}f(y). \tag{6}$$

Į (6) lygtį įstatę $y = 1$ ir $y = 0$, turime $f\Big(\frac{m}{n}\Big) = \frac{m}{n}f(1)$ ir

$$f(0) = 0. \tag{7}$$

Pažymėję $f(1) = k$, gauname, kad

$$f\Big(\frac{m}{n}\Big) = k\frac{m}{n}$$

visiems $m \geqslant 0,\ n > 0$, t.y.

$$f(r) = kr \tag{8}$$

visiems neneigiamiesiems racionaliesiems skaičiams. Bet į (5) lygtį įstatę $y = -x$, gauname

$$f(0) = f(x) + f(-x),$$

ir iš (7) lygybės

$$f(x) + f(-x) = 0, \quad \text{arba} \quad f(-x) = -f(x).$$

Tai reiškia, kad kiekviena adityvioji funkcija yra nelyginė. Todėl jeigu s – bet kuris neigiamasis racionalusis skaičius, tai remiantis (8) lygybe

$$f(s) = -f(-s) = -k(-s) = ks,$$

ir (8) lygybė teisinga visiems racionaliesiems skaičiams. Kitaip sakant, jeigu spręstume uždavinį

- *Raskite visas funkcijas $f:\ \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, tenkinančias sąlygą*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x \in \mathbb{Q},\ \forall y \in \mathbb{Q},$$

tai atsakymas būtų toks: $f(x) = kx$ $(k = \text{const})$.

Dabar tarkime, kad x – bet kuris realusis skaičius. Tada galima rasti tokią racionaliųjų skaičių seką $\{x_n\}$, kad $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Remdamiesi ieškomosios funkcijos tolydumu, randame, kad

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(kx_n) = k\lim_{n\to\infty} x_n = kx.$$

• • • $\alpha + \omega$ • • •

Patikrinę įsitikiname, kad $f(x)$ tenkina (5) lygtį:

$$f(x+y) = k(x+y) = kx + ky = f(x) + f(y).$$

Taigi tolydžiųjų funkcijų klasėje adityviosios funkcijos yra tik tiesinės funkcijos.

Išdėstytas funkcinių lygčių sprendimo metodas vadinamas *Koši metodu.*

Kiekviena tolydžioji funkcija uždarajame intervale yra aprėžta, t. y. $|f(x)| \leqslant M$. Todėl natūralu kelti tokį uždavinį:

- *Raskite visas funkcijas, kurios tenkina* (5) *lygtį ir yra aprėžtos iš viršaus bent viename uždarajame intervale.*

Tarkime, kad adityvioji funkcija aprėžta iš viršaus, $f(x) \leqslant M$, intervale $[a, a+T]$, kur T – fiksuotas teigiamasis skaičius. Įrodykime, kad tada funkcija $f(x)$ aprėžta iš viršaus ir intervale $[0,T]$. Iš tikrųjų, tegu $x \in [0,T]$. Tada $x + a \in [a, a+T]$, todėl

$$f(x+a) = f(x) + f(a) \leqslant M,$$

ir $f(x) \leqslant M - f(a)$. Pažymėję dešinę pusę M_1, turime $f(x) \leqslant M_1$ visiems $x \in [0,T]$.

Nagrinėkime funkciją $g(x) = f(xT)$. Ta funkcija adityvi ir aprėžta iš viršaus intervale $[0,1]$: jei $x \in [0,1]$, tai $xT \in [0,T]$, ir $g(x) = f(xT) \leqslant M_1$. Pažymėkime $g(1) = k$. Mes žinome adityviąją funkciją, kuri taške 1 įgyja reikšmę k – tai funkcija kx. Nagrinėkime funkciją $h(x) = g(x) - kx$ (tai labai primena mokyklinį kintamųjų keitimą – jei x_0 yra lygties šaknis, tai dažnai pravartu keisti kintamąjį: $y = x - x_0$). Funkcija $h(x)$ taip pat yra adityvi (patikrinkite!) ir aprėžta iš viršaus intervale $[0,1]$:

$$h(x) = g(x) - kx \leqslant g(x) + |k|x \leqslant M_1 + k \equiv M_2,$$

o svarbiausia, kad ji periodinė su periodu 1:

$$\begin{aligned} h(x+1) &= g(x+1) - k(x+1) = g(x) + g(1) - kx - k = \\ &= g(x) + k - kx - k = g(x) - kx = h(x). \end{aligned}$$

Bet jei funkcija yra periodinė su periodu 1 ir aprėžta iš viršaus skaičiumi M_2 intervale $[0,1]$, tai ji yra aprėžta iš viršaus skaičiumi M_2 visoje tiesėje $\mathbb{R}$.

O dabar įrodysime, kad $h(x)$ tapačiai lygi 0. Kadangi ji 1-periodinė, tai užtenka įrodyti, kad $h(x) \equiv 0$ intervale $[0,1]$. Tarkime priešingai – kad

$h(x_0) \neq 0$ taške $x_0 \in [0,1]$. Sakykime iš pradžių, kad $h(x_0) > 0$. Tada $h(nx_0) = nh(x_0)$ (prisiminkite Koši metodą), ir natūralųjį n galima paimti tokį didelį, kad būtų $nh(x_0) > M_2$. Bet tada $h(nx_0) > M_2$, o tai prieštarauja funkcijos aprėžtumui: $h(x) \leqslant M_2$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Lygiai taip pat, jei $h(x_0) < 0$, tai $h(-nx_0) = -nh(x_0)$, ir paėmę n pakankamai didelį, gauname, kad teisinga nelygybė $h(-nx_0) > M_2$.

Vadinasi, $h(x) \equiv 0$. Tai reiškia, kad $g(x) = h(x) + kx = kx$. Bet tada $f(x) = g\left(\frac{x}{T}\right) = \frac{k}{T}x$, ir $f(x)$ – tiesinė funkcija.

Žinoma, tą patį rezultatą gautume, jeigu $f(x)$ aprėžta iš apačios, t. y. $f(x) \geqslant -M$. Tada funkcija $h(x) = -f(x)$ būtų aprėžta iš viršaus, ir vėl gautume, kad $h(x)$ (taigi ir $f(x)$) yra tiesinė. Kitaip sakant, adityvioji funkcija, kuri apibrėžta visoje tiesėje $\mathbb{R}$ ir nėra tiesinė, būtinai neaprėžta ir iš apačios, ir iš viršaus kiekviename (kad ir kiek mažame) intervale. Toliau pamatysime, kaip galima tokias funkcijas (neadityviąsias ir adityviąsias) konstruoti. Bet pasirodo, kad tokia adityvioji funkcija turi dar vieną įdomią savybę: jos grafikas visur tankus plokštumoje xOy. Tai reiškia štai ką:

kad ir kokį mažą skrituliuką pasirinksime plokštumoje, bus grafiko taškų $(x, f(x))$, *kurie yra to skrituliuko vidiniai taškai.*

Tai tas pat, kas pasakyti, kad visuomet galima rasti grafiko taškų seką $(x_n, f(x_n))$, kuri artėtų į iš anksto pasirinktą tašką $(x; y)$.

Beje, adityvumo dėka tai užtenka įrodyti taškui $(0, y)$: iš tikrųjų, jeigu radome seką $x_n \to 0$, $f(x_n) \to y - f(x)$, tai seka $x_n + x \to x$, $f(x_n + x) = f(x_n) + f(x) \to y - f(x) + f(x) = y$.

Įrodysime, kad su kiekvienu k intervale $\left[-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right]$ yra taškas x_0, kuriame $|f(x_0) - y| < \frac{1}{2^k}$. Tai ir reikš, kad yra grafiko taškų, kiek norima artimų taškui $(0; y)$. Iš pradžių raskime „didelę" reikšmę $f(x)$. Kadangi $f(x)$ intervale $\left[-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right]$ neaprėžta iš viršaus, tai jame yra toks taškas x, kad $f(x) = M > |y|+1$. Ieškokime tame intervale tokios taškų $\{x_n\}$ sekos, kad $f(x_n) \to y$. Tų taškų patogu ieškoti pavidalo $x_n = r_n x$, kur r_n – racionalūs, tada lengva apskaičiuoti $f(x)$ reikšmes juose: $f(x_n) = f(r_n x) = r_n f(x) = r_n M$. Vadinasi, jei imsime seką racionaliųjų taškų $r_n \to \frac{y}{M}$, tai $f(x_n) \to y$. Be to, taškai $x_n = r_n x$ pakankamai dideliems n priklausys mūsų intervalui, nes $|x_n| = |r_n||x| \leqslant |r_n|\frac{1}{2^k}$, $r_n \to \frac{y}{M}$, o $\left|\frac{y}{M}\right| \leqslant \frac{|y|}{|y|+1} < 1$. Vadinasi, kai tik $|f(x_n) - y| \leqslant \frac{1}{2^k}$, kaip x_0 tiks bet kuris iš taškų x_n.

$\bullet\bullet\bullet\ \alpha+\omega\ \bullet\bullet\bullet$

„Blogos" funkcijos

Matėme, kad „geros" (pavyzdžiui, tolydžios ar aprėžtos) adityvios funkcijos yra tiesinės. O kas, jeigu funkcija „bloga" - ir netolydi, ir neaprėžta (kiekviename intervale!)? Ar įmanoma nurodyti adityviąją funkciją, kuri būtų netiesinė? Pasirodo, kad tokių funkcijų yra, tik norėdami su jomis susipažinti, turime pasipratinti prie „blogų", arba, kaip kartais sakoma, prie patologiškų funkcijų.

Vienas iš žinomiausių „blogos" funkcijos pavyzdžių yra vadinamoji Dirichlė funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeigu } x \text{ racionalus,} \\ 0, & \text{jeigu } x \text{ iracionalus.} \end{cases}$$

Lengva apskaičiuoti jos reikšmę bet kuriame taške x : užtenka nustatyti, ar x racionalus, ar iracionalus. Sunku kalbėti apie jos grafiką - aišku tik, kad visi jos grafiko taškai yra tiesėse $y = 0$ ir $y = 1$, ir kiekvienoje tiesėje jie „visur tankūs" (kad ir kokią mažą tiesės atkarpą imsime, joje bus grafiko taškų; žinoma, taip pat visur tankūs Ox ašyje tiek racionalieji, tiek ir iracionalieji taškai: tarp bet kurių dviejų racionaliųjų taškų yra (be galo daug!) iracionaliųjų taškų, o tarp dviejų iracionaliųjų taškų yra be galo daug racionaliųjų taškų).

Dirichlė funkciją galima truputį pakeisti ir nagrinėti tokią funkciją:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeigu } x \text{ racionalus,} \\ -1, & \text{jeigu } x \text{ iracionalus.} \end{cases}$$

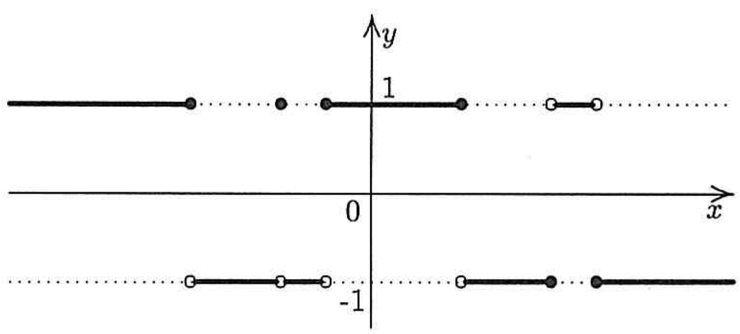
Ji nedaug skiriasi nuo Dirichlė funkcijos, bet įdomu, kad jos kvadratas (arba modulis) ypač paprastas:

$$f^2(x) = 1 \quad (|f(x)| = 1).$$

Bet norime perspėti, kad jeigu sprendžiame funkcinę lygtį

$$f^2(x) = 1,$$

tai jos sprendiniai yra ne tik funkcijos $f(x) \equiv 1$ ir $f(x) \equiv -1$, bet ir Dirichlė tipo funkcija, ir apskritai visos funkcijos, įgyjančios tik reikšmes 1 ar -1 (plg. **3** uždavinį paskutiniame skyrelyje). Apie tokių funkcijų grafikus galima susidaryti vaizdą iš šio paveikslo:



• • • $\alpha + \omega$ • • •

Dirichlė tipo funkcijos nėra „baisiai" blogos – jos, pavyzdžiui, aprėžtos. Bet galima jas dar labiau sugadinti: nagrinėkime funkciją

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{jeigu } x \text{ racionalus,} \\ -x, & \text{jeigu } x \text{ iracionalus.} \end{cases} \tag{9}$$

Aišku, kad jos kvadratas „labai geras" : $f^2(x) = x^2$ (tik šios funkcinės lygties taip pat nespręskime „traukdami šaknį" – žr. **3** uždavinį), bet jos grafiko taškai „tupi" kiekvienoje iš dviejų tiesių $y = x$ ir $y = -x$ visur tankiai, taigi ji nėra aprėžta nei iš viršaus, nei iš apačios.

Bet „blogumui galo nėra", ir mes dar galime būti nepatenkinti, kad (9) funkcija kiekviename baigtiniame intervale aprėžta. Todėl nagrinėkime funkciją

$$f(x) = \begin{cases} m, & \text{jei } x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ \frac{m}{n} \text{ nesuprastinama,} \\ 0, & \text{jei } x \text{ iracionalus.} \end{cases}$$

Nesunku įsitikinti, kad ji neaprėžta kiekvieno taško aplinkoje. Pavyzdžiui, imkime $m > 0$ ir nagrinėkime seką

$$x_k = \frac{mp^k + n}{np^k},$$

kur p – pirminis skaičius, didesnis už bet kurį pirminį m ir n daugiklį. Trupmena x_k nesuprastinama: jei $mp^k + n$ ir n turėtų bendrų pirminių daugiklių, tai jų turėtų taip pat mp^k ir n; bet nei m, nei p^k neturi bendrų daliklių su n. Todėl $f(x_k) = mp^k + n \geqslant mp^k \geqslant p^k \geqslant 2^k$, ir $f(x_k) \to \infty$, o

$$\left|x_k - \frac{m}{n}\right| = \frac{mp^k + n}{np^k} - \frac{mp^k}{np^k} = \frac{n}{np^k} = \frac{1}{p^k} \leqslant \frac{1}{2^k} \to 0.$$

Vis dėlto ši funkcija teigiamiesiems x aprėžta iš apačios, o neigiamiesiems – iš viršaus. Bet ją galima dar „pagadinti" taip, kad ji nebūtų aprėžta nei iš viršaus, nei iš apačios kiekvieno taško aplinkoje (kiek norima mažame atvirajame intervale, kuriam priklauso tas taškas). Iš tikrųjų, tokia yra funkcija

$$f(x) = \begin{cases} m, & \text{jei } x = \frac{m}{2n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ \dfrac{m}{2n} \text{ nesuprastinama,} \\ -m, & \text{jei } x = \frac{m}{2n-1},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ \dfrac{m}{2n-1} \text{ nesuprastinama,} \\ 0, & \text{jei } x \text{ iracionalus.} \end{cases}$$

Beje, aišku, kad ji yra nelyginė.

Dabar grįžkime prie adityviųjų funkcijų. Funkciją f racionaliųjų skaičių aibėje $\mathbb{Q}$ apibrėžkime taip, kad ji aibėje $\mathbb{Q}$ būtų tiesinė, pavyzdžiui, $f(r) = r$. Dabar funkciją f apibrėžkime aibėje $\{r\sqrt{2}\}$, kur $r \in \mathbb{Q}$, taip, kad ji ir toje aibėje būtų tiesinė, pavyzdžiui, $f(r\sqrt{2}) = r$. O dabar funkciją f apibrėžkime visų pavidalo $r_1 + r_2\sqrt{2}$ skaičių aibėje kaip tų funkcijų „sumą": kai $x = r_1 + r_2\sqrt{2}$, tai

$$f(x) = f(r_1 + r_2\sqrt{2}) = r_1 + r_2.$$

Funkcija $f(x)$ yra apibrėžta tiesės $\mathbb{R}$ visur tankioje aibėje $\mathbb{R}(1, \sqrt{2}) = \{r_1 + r_2\sqrt{2}\}$ (žinoma, visur tanki jau aibė $\{r_1\} = \mathbb{Q}$) ir adityvi: jei $x' = r_1' + r_2'\sqrt{2}$, $x'' = r_1'' + r_2''\sqrt{2}$, tai $x' + x'' = (r_1' + r_1'') + (r_2' + r_2'')\sqrt{2}$, ir

$$f(x' + x'') = r_1' + r_1'' + r_2' + r_2'' = f(x') + f(x'').$$

Beje, ši funkcija nėra tiesinė:

$$1 = \frac{f(1)}{1} \neq \frac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bet įdomiausia, kad ji neaprėžta kiekvieno taško aplinkoje, ir, negana to, jos grafikas visur tankus plokštumoje. Iš tikrųjų, imkime tašką (x, y) ir raskime tokias sekas $\{r_{1n}\}$ ir $\{r_{2n}\}$, kad būtų

$$r_{1n} + r_{2n}\sqrt{2} \to x, \quad r_{1n} + r_{2n} \to y.$$

Tam užtenka paimti (išsprendus „lygtis", kuriose vietoj lygybės ženklo $=$ stovi ženklas $\to$) racionaliųjų skaičių sekas

$$r_{1n} \to \frac{x - y\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}, \quad r_{2n} \to \frac{x - y}{\sqrt{2} - 1}.$$

Tada $x_n = r_{1n} + r_{2n}\sqrt{2} \to x$, o $f(x_n) = r_{1n} + r_{2n} \to y$.

Taigi išsprendėme tokį uždavinį:

- *Aibėje, kuri būtų visur tanki tiesėje $\mathbb{R}$, sukonstruokite adityviąją funkciją, neaprėžtą tiek iš viršaus, tiek iš apačios.*

Tarsi pasiekėme ne taip mažai: sukonstravome adityviąją funkciją, apibrėžtą visur tankioje aibėje. Ta funkcija neaprėžta ir iš viršaus, ir iš apačios, jos grafikas visur tankus plokštumoje. Trūksta, atrodytų, nedaug: taip apibrėžti ją likusiuose tiesės $\mathbb{R}$ taškuose, kad ji išliktų adityvi.

Beje, nesunku panašių funkcijų nurodyti ir daugiau. Kadangi

$$f(x) = f(r_1 + r_2\sqrt{2}) = r_1 f(1) + r_2 f(\sqrt{2}),$$

tai laisvai pasirinkę reikšmes $f(1)$ ir $f(\sqrt{2})$, gausime adityviąsias funkcijas, apibrėžtas aibėje $\mathbb{R}(1,\sqrt{2})$.

Imkime funkciją $f(r_1+r_2\sqrt{2})=r_1+r_2$ (nebūtų geriau pasirinkus kitas $f(1)$ ir $f(\sqrt{2})$ reikšmes, o ne vienetus) ir pabandykime taškuose, kurie nėra pavidalo $r_1+r_2\sqrt{2}$, imti $f(x)=0$. Iš pradžių atrodytų, kad viskas labai gerai, ir taip apibrėžta funkcija tarsi adityvi: jei imsime taškus $x'=r_1'+r_2'\sqrt{2}$ ir $x''=r_1''+r_2''\sqrt{2}$, tai $x'+x''=(r_1'+r_2')+\sqrt{2}(r_1''+r_2'')$, todėl

$$f(x'+x'')=r_1'+r_2'+r_1''+r_2''=f(x')+f(x'').$$

Jei imsime taškus x' ir x'', nepriklausančius aibei $\mathbb{R}(1,\sqrt{2})$, ir jų suma nepriklauso $\mathbb{R}(1,\sqrt{2})$, tai vėl viskas gerai:

$$f(x'+x'')=0=0+0=f(x')+f(x'').$$

Deja, blogai, jei x' ir x'' nepriklauso $\mathbb{R}(1,\sqrt{2})$, bet suma $x'+x''=r_1+r_2\sqrt{2}$ priklauso $\mathbb{R}(1,\sqrt{2})$; tada gauname (kai $r_1+r_2\neq 0$)

$$f(x')+f(x'')=0\neq r_1+r_2=f(r_1+r_2\sqrt{2})=f(x'+x'').$$

Pavyzdžiui, imkime skaičių $\sqrt{3}$, kuris nepriklauso $\mathbb{R}(1,\sqrt{2})$. Tada $x'=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ir $x''=\sqrt{2}-\sqrt{3}$ nepriklauso $\mathbb{R}(1,\sqrt{2})$. (Iš tikrųjų, jei, pavyzdžiui, $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbb{R}(1,\sqrt{2})$, t.y. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=r_1+r_2\sqrt{2}$, tai $(r_2-1)\sqrt{2}=\sqrt{3}-r_1$, $2(r_2-1)^2=3+r_1^2-2r_1\sqrt{3}$. Jei $r_1\neq 0$, tai kairėje yra racionalus, o dešinėje iracionalus skaičius, – prieštara. Jei $r_1=0$, tai iš pradinės lygybės $\sqrt{2}+\sqrt{3}=r_2\sqrt{2}$, $5+2\sqrt{6}=2r_2^2$, ir $\sqrt{6}$ racionalus, – prieštara.) Bet $x=x'+x''=2\sqrt{2}$ priklauso $\mathbb{R}(1,\sqrt{2})$, ir $f(x)=f(2\sqrt{2})=2$, o $f(x')=f(x'')=0$, ir lygybė $f(x'+x'')=f(x')+f(x'')$ neteisinga.

Taigi taip paprastai sukonstruoti adityviąją funkciją visoje aibėje $\mathbb{R}$ nepavyko. Pabandykime „didinti" mūsų aibę $\mathbb{R}(1,\sqrt{2})$, ir nagrinėkime aibę $\mathbb{R}(1,\sqrt{2},\sqrt{3})=\{r_1+r_2\sqrt{2}+r_3\sqrt{3}\}$. Aišku, kad ji apima aibę $\mathbb{R}(1,\sqrt{2})$. Vėl pasirinkę reikšmes $f(1)$, $f(\sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$, gausime adityviąją funkciją, apibrėžtą aibėje $\mathbb{R}(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$. Galima dar išplėsti apibrėžimo sritį ir nagrinėti $\mathbb{R}(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$, ir vėl gauti joje apibrėžtą adityviąją funkciją.

Beje, apibrėžimo sritį reikia plėsti atsargiai – būtent todėl neverta nagrinėti $\mathbb{R}(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{8})$. Pavyzdžiui, apibrėžiant joje adityviąją funkciją, nebegalima laisvai pasirinkti reikšmių $f(1)$, $f(\sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$, $f(\sqrt{8})$ – juk $f(\sqrt{8})=f(2\sqrt{2})$ turi būti lygi (Koši metodas!) $2f(\sqrt{2})$. Kitaip sakant, į „bazinių" elementų sąrašą – bazę – neverta traukti naujų elementų, kuriuos jau galima racionaliai išreikšti senaisiais baziniais elementais. Sakoma, kad baziniai elementai turi būti racionaliai nepriklausomi; aibės $\mathbb{R}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ atveju tai reikštų, kad lygybė $r_1 \cdot 1 + r_2\sqrt{2} + r_3\sqrt{3} + r_4\sqrt{5} = 0$ galima tik kai $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$.

Taigi konstruojant adityviąsias funkcijas užtenka paimti keletą bet kokių racionaliai nepriklausomų skaičių, pavyzdžiui, $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, ir nagrinėti jų racionaliuosius tiesinius darinius $r_1 + r_2\sqrt{2} + r_3\sqrt{3} + r_4\sqrt{5}$. Pasirinkus „bazines" reikšmes $f(1) = a_1$, $f(\sqrt{2}) = a_2$, $f(\sqrt{3}) = a_3$, $f(\sqrt{5}) = a_4$, galima apibrėžti funkciją aibėje $\mathbb{R}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ taip:

$$f(r_1 + r_2\sqrt{2} + r_3\sqrt{3} + r_4\sqrt{5}) = r_1a_1 + r_2a_2 + r_3a_3 + r_4a_4.$$

Kiek gi galima didinti mūsų aibę? Ar galėtų bazinių elementų skaičius būti begalinis? Pasirodo – taip. Nagrinėkime begalinę bazę $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{p}, \ldots$, sudarytą iš visų pirminių skaičių kvadratinių šaknų, o aibę $\mathbb{R}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots)$ apibrėžkime kaip tų šaknų baigtinių darinių su racionaliaisiais koeficientais aibę

$$\{r_1\sqrt{p_1} + r_2\sqrt{p_2} + \ldots + r_k\sqrt{p_k}\}.$$

Galima įrodyti, kad kiekvienas aibės $\mathbb{R}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots)$ elementas išreiškiamas baziniais elementais vieninteliu būdu ($r_1\sqrt{p_1} + r_2\sqrt{p_2}$ ir $r_1\sqrt{p_1} + r_2\sqrt{p_2} + 0\sqrt{p_3}$ nelaikomi skirtingais būdais), o tada, laisvai apibrėžę f reikšmes baziniams elementams, vėl gausime adityviąją funkciją. Panašiai dar į bazę būtų galima įtraukti, sakysime, kubines šaknis $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, ..., logaritmus $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$, $\ln 7$, ..., skaičius $\pi, \sqrt{\pi}, \sqrt[3]{\pi}, \ldots$ ir daug ką kita.

Čia ir iškyla klausimas: ar taip elgdamiesi mes kada nors gausime visų realiųjų skaičių aibę? Kitaip sakant, ar realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$ egzistuoja tokia (aišku, begalinė) bazė, kad kiekvieną $\mathbb{R}$ elementą galima racionaliai išreikšti baigtiniu bazinių elementų dariniu ir ta išraiška būtų vienintelė? Šį klausimą išsprendė vokiečių matematikas G. Hamelis (dar 1905 metais!): tokia bazė egzistuoja. Jo įrodymas visai paprastas, bet remiasi aibių teorija (pavyzdžiui, transfiničiąja indukcija ir vadinamąja rinkimo, arba Cermelo, aksioma). Mums užtenka žinoti, kad tokia bazė – vadinamoji Hamelio bazė – egzistuoja.

O štai dabar nusakyti visas adityviąsias funkcijas, apibrėžtas aibėje $\mathbb{R}$, jau mokame: užtenka laisvai pasirinkti funkcijos f reikšmę $f(h)$ kiekvienam Hamelio bazės H elementui h, o kiekvienam x, $x = r_1h_1 + r_2h_2 + \ldots + r_nh_n$, imti $f(x) = r_1f(h_1) + r_2f(h_2) + \ldots + r_nf(h_n)$, ir taip apibrėžta funkcija bus adityvi.

••• $\alpha + \omega$ •••

Iš tikrųjų, įrodykime lygybę $f(x'+x'')=f(x')+f(x'')$ $\forall x'\in\mathbb{R}$, $\forall x''\in\mathbb{R}$. Sakykime, kad x' ir x'' išraiškoje sutampa k bazės elementų (jiems galima suteikti pirmuosius numerius – $h_1,h_2,\ldots,h_k$), elementas x' dar turi s kitų, o x'' – t dar kitų bazinių elementų:

$$x'=r_1'h_1+\ldots+r_k'h_k+r_{k+1}h_{k+1}+\ldots+r_{k+s}h_{k+s},$$
$$x''=r_1''h_1+\ldots+r_k''h_k+r_{k+s+2}h_{k+s+2}+\ldots+r_{k+s+t}h_{k+s+t}.$$

Tada

$$\begin{aligned} x'+x''=&(r_1'+r_1'')h_1+(r_2'+r_2'')h_2+\ldots+(r_k'+r_k'')h_k+\\ &+r_{k+1}h_{k+1}+r_{k+2}h_{k+2}+\ldots+r_{k+s}h_{k+s}+\\ &+r_{k+s+1}h_{k+s+1}+r_{k+s+2}h_{k+s+2}+\ldots+r_{k+s+t}h_{k+s+t},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x'+x'')=&(r_1'+r_1'')f(h_1)+(r_2'+r_2'')f(h_2)+\ldots+(r_k'+r_k'')f(h_k)+\\ &+r_{k+1}f(h_{k+1})+r_{k+2}f(h_{k+2})+\ldots+r_{k+s}f(h_{k+s})+\\ &+r_{k+s+1}f(h_{k+s+1})+r_{k+s+2}f(h_{k+s+2})+\ldots+r_{k+s+t}f(h_{k+s+t}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x')=&r_1'f(h_1)+r_2'f(h_2)+\ldots+r_k'f(h_k)+\\ &+r_{k+1}f(h_{k+1})+r_{k+2}f(h_{k+2})+\ldots+r_{k+s}f(h_{k+s}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x'')=&r_1''f(h_1)+r_2''f(h_2)+\ldots+r_k''f(h_k)+\\ &+r_{k+s+1}f(h_{k+s+1})+r_{k+s+2}f(h_{k+s+2})+\ldots+r_{k+s+t}f(h_{k+s+t}).\end{aligned}$$

Kad gautoji funkcija būtų tiesinė, užtenka imti reikšmes $f(h)=kh$ $\forall h\in H$, t.y. $\frac{f(h)}{h}$ turi sutapti visoms bazinėms reikšmėms h. O jeigu $\frac{f(h)}{h}$ nesutaps bent dviem h reikšmėms, t.y. bus $\frac{f(h_1)}{h_1}\neq\frac{f(h_2)}{h_2}$, tai gausime netiesinę adityviąją funkciją. „Paprasčiausią“ netiesinę funkciją gausime taip: į Hamelio bazę įtraukime 1, o tada imkime $f(1)=1$, $f(h)=0$ $\forall h\in H$, $h\neq 1$. Realiųjų skaičių aibę galima išskaidyti į du poaibius: tuos $x\in\mathbb{R}$, į kurių išraišką įeina 1, ir tuos, į kurių išraišką 1 neįeina. Jei į x išraišką 1 neįeina, tai $f(x)\equiv 0$, ir visoms tokioms x reikšmėms grafiko taškai bus x-ų ašyje. Jei į x išraišką 1 įeina (pavyzdžiui, $x=r\cdot 1+\sqrt{3}$, kur $r\in\mathbb{Q}$), tai $f(x)=f(r)+f(\sqrt{3})=rf(1)+f(\sqrt{3})=r+0=r$. Kaip įsivaizduoti tokios funkcijos grafiką? Visiems racionaliesiems skaičiams r grafiko taškai „tupės“ tiesėje $y=x$. Visiems pavidalo $x=r+\sqrt{3}$ skaičiams funkcijos reikšmės „tupės“ tiesėje $y=x-\sqrt{3}$. Visiems skaičiams r_1+r_2h, $h\in H$, $h\neq 1$, funkcijos reikšmės „tupės“ tiesėje $y = x - r_2 h$, ir t.t. Visos tokios tiesės bus lygiagrečios tiesei $y = x$, jos (kaip ir turi būti!) užpildys visą plokštumą visur tankiai ir pan. Žinoma, tokią funkciją įsivaizduoti sunkoka.

Uždaviniai

Šiame skyrelyje pateikiame įvairių funkcinių lygčių uždavinių. Spręsti uždavinius galima ir neskaičius ankstesnio teksto, tik kartais prireiks tokių faktų: *jei adityvioji funkcija tolydi ar aprėžta, tai ji tiesinė, o jeigu jokių papildomų (be adityvumo) sąlygų jai nekeliama, tai ji gali būti ir netiesinė.*

1. *Išspręskite funkcinę lygtį*

$$2f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = 5x.$$

2. *Išspręskite funkcinę lygtį*

$$2f(x) + 3f(1 - x) = 5x.$$

3. *Išspręskite funkcinę lygtį*

$$f^2(x) + f(x)f(y) = x^2 + xy \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

4. *Išspręskite funkcinę lygtį*

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

intervale $[1, 2]$ *aprėžtų funkcijų klasėje.*

5. *Išspręskite funkcinę lygtį*

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

intervale $[1, 2]$ *aprėžtų funkcijų klasėje.*

6. *Išspręskite funkcinę lygtį*

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \forall x \neq 0,\ \forall y \neq 0$$

intervale $[1, 2]$ *aprėžtų funkcijų klasėje.*

● ● ● $\alpha + \omega$ ● ● ●

7. *Funkcija f tenkina funkcinę lygtį*

$$f(x) + f(y) = f(x + y) - xy - 1$$

su kiekviena realiųjų skaičių pora (x, y). Jeigu $f(1) = 1$, tai kiek yra sveikųjų skaičių n, $n \neq 1$, tenkinančių lygybę $f(n) = n$?

Nurodykite teisingą atsakymą:

A — 0, **B** — 1, **C** — 2, **D** — 3, **E** — *be galo daug.*

8. *Funkcija f tenkina sąlygas*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy + 1, \quad f(1) = 1.$$

Kiek yra sveikųjų skaičių n, $n \neq 1$, tenkinančių lygybę $f(n) = n$?

9. *Raskite visas tolydžiąsias funkcijas f, kurios tenkina sąlygas*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy + 1, \quad f(1) = 1.$$

10. *Išspręskite funkcinę lygtį*

$$f(x + y) + f(x - y) = f(3x) \quad (x \in \mathbb{Z}^+,\ y \in \mathbb{Z}^+,\ x \geqslant y).$$

Uždavinių sprendimai

1 uždavinio sprendimas. Kadangi jokių apribojimų sąlygoje nėra, laikome, kad $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, o f tenkina lygtį $2f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = 5x$ su visais $x \neq 0$. Nesunku suvokti, kad x verta pakeisti reiškiniu $\frac{1}{x}$. Tada

$$3f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5}{x}.$$

Padauginę duotąją lygtį iš 2, o pastarąją iš 3 (atpažįstate dviejų tiesinių lygčių sistemą su dviem kintamaisiais?) ir panariui atėmę, gauname:

$$5f(x) = \frac{15}{x} - 10x,$$
$$f(x) = \frac{3}{x} - 2x.$$

Patikriname - lygybė $2(\frac{3}{x} - 2x) + 3(3x - \frac{2}{x}) = 5x$ teisinga su visais $x \neq 0$.

●●● $\alpha + \omega$ ●●●

Atsakymas. $f(x) = \frac{3}{x} - 2x$.

2 uždavinio sprendimas. Laikome, kad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o lygybė $2f(x) + 3f(1-x) = 5x$ teisinga su visais x. Pakeitę x reiškiniu $1-x$, gauname

$$3f(x) + 2f(1-x) = 5 - 5x.$$

Iš lygybių sistemos randame, kad

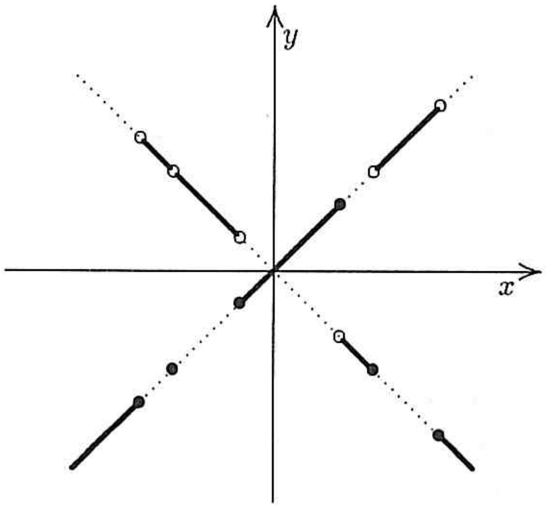
$$f(x) = 3 - 5x.$$

Ši funkcija tenkina lygtį.

Atsakymas. $f(x) = 3 - 5x$.

3 uždavinio sprendimas. Į lygybę $f^2(x) + f(x)f(y) = x^2 + xy$ įstatome $x = y = 0$: $2f^2(0) = 0$, $f(0) = 0$. Įstatome $y = 0$: $f^2(x) = x^2$. Įstatykime x^2 vietoj $f^2(x)$ į pradinę lygtį. Mūsų lygtis virsta $f(x)f(y) = xy$. Įstatykime čia $x = y = 1$: $f^2(1) = 1$. Todėl arba a) $f(1) = 1$, arba b) $f(1) = -1$. a) atveju $y = 1 \Rightarrow f(x) = x$. b) atveju $f(x) = -x$. Patikriname: $(\pm x)^2 + (\pm x)(\pm y) = x^2 + xy$, taigi abu sprendiniai tinka (imami arba viršutiniai, arba apatiniai ženklai).

Didelė klaida būtų „traukti šaknį“ iš lygybės $f^2(x) = x^2$ ir rašyti, kad $f(x) = x$ arba $f(x) = -x$. Iš tikrųjų, lygybę $f^2(x) = x^2$ tenkina dar ir funkcijos $f(x) = |x|$ ir $f(x) = -|x|$ (jos, beje, netgi tolydžios), ir iš viso bet kuri funkcija $f(x) = \pm x$, kuri kiekviename taške x_0 įgyja reikšmę x_0 arba $-x_0$. Kitaip sakant, galima bet kaip „marginti“ dvi tieses $y = x$ ir $y = -x$:



●●● $\alpha + \omega$ ●●●

Beje, „gudrybė“ netraukti šaknies labai primena laipsnio žeminimą sprendžiant lygtį $\cos^2 x = 1/2$: $(1+\cos 2x)/2 = 1/2$, $\cos 2x = 0$ ir t.t.

Atsakymas. $f(x) = x$ ir $f(x) = -x$.

4 uždavinio sprendimas. Į lygybę $f(xy) = f(x)f(y)$ statome $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = f^2(0) \Rightarrow f(0) = 1$ arba $f(0) = 0$. Jei $f(0) = 1$, tai $y = 0 \Rightarrow 1 = f(x)\cdot 1$, $f(x) \equiv 1$. Ši funkcija tinka, ir gavome vieną sprendinį. Toliau laikysime, kad $f(0) = 0$.

Imkime $x = y = 1 \Rightarrow f(1) = f^2(1) \Rightarrow f(1) = 0$ arba $f(1) = 1$. Jei $f(1) = 0$, tai $y = 1 \Rightarrow f(x) = f(x)\cdot 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$. Ši funkcija taip pat tinka, ir gavome antrą sprendinį. Toliau laikysime, kad $f(1) = 1$.

Imkime $x = y = -1 \Rightarrow f^2(-1) = 1 \Rightarrow$ a) $f(-1) = 1$ arba b) $f(-1) = -1$. a) $f(-1) = 1$, $y = -1 \Rightarrow f(-x) = f(x)$, funkcija $f(x)$ lyginė; b) $f(-1) = 1$, $y = -1 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$, funkcija $f(x)$ nelyginė.

Vadinasi, abiem atvejais užtenka nagrinėti $x > 0$, $y > 0$. $x = y = \sqrt{t}$ $(t > 0) \Rightarrow f(\sqrt{t}) = f^2(\sqrt{t}) \geqslant 0$. Įrodysime, kad $f(x) \neq 0$, jei $x \neq 0$. Iš tikrųjų, jei $f(x_0) = 0$ su $x_0 \neq 0$, tai $f(y) = f(\frac{y}{x_0}\cdot x_0) = f(\frac{y}{x_0})\cdot f(x_0) \equiv 0$, o funkciją $f(x) \equiv 0$ jau turime. Vadinasi, $f(x) > 0$, kai $x > 0$. Logaritmuojame (štai kodėl išskyrėme atvejį $f(x_0) = 0$!): $\ln f(xy) = \ln f(x) + \ln f(y)$. Pažymėkime $\ln f(x) = g(x)$, tada $g(xy) = g(x) + g(y)$, $x > 0$, $y > 0$. Pažymėkime $x = e^k$; $y = e^v$, tada $g(e^u \cdot e^v) = g(e^u) + g(e^v)$, $g(e^{u+v}) = g(e^u) + g(e^v)$. Pažymėję $g(e^t) = h(t)$, turime: $h(u+v) = h(u) + h(v)$ $\forall u \in \mathbb{R}$, $\forall v \in \mathbb{R}$. Kadangi $h(u)$ aprėžta intervale [1,2], tai $h(u) = Cu$, $g(e^u) = ku$, $\ln f(e^u) = g(e^u) = ku$, $f(e^u) = e^{ku} = (e^u)^k$, $f(x) = x^k$ $(x > 0)$. Dabar jei $f(x)$ lyginė, tai gauname $f(x) = |x|^k$, o jei nelyginė, tai $f(x) = x|x|^{k-1}$. Beje, funkcija $|x|^k$, kai $k < 0$, trūki taške 0, bet tai ne bėda – taške 0 turime $f(0) = 0$. Gavome keturias funkcijas:

$$f(x) \equiv 1, \quad f(x) \equiv 0, \quad f(x) = \begin{cases} |x|^k, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x|x|^{k-1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

(įdomu, kad funkcija $f(x) \equiv 1$ nesutampa su

$$f(x) = \begin{cases} |x|^0, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

– jų reikšmės taške $x = 0$ skiriasi). Dabar reikia patikrinti, ar visos 4 funkcijos tenkina pradinę lygtį. Tai akivaizdu pirmų dviejų funkcijų atveju: $1\cdot 1 = 1$ ir $0\cdot 0 = 0$. Tikriname trečią funkciją (beje, iš tikrųjų trečia funkcija – tai funkcijų šeima, priklausanti nuo konstantos k; pasirinkę konkrečią k reikšmę, gauname konkrečią funkciją; tai liečia ir ketvirtą funkciją). Jei $x = 0$ (arba $y = 0$), tai gauname $0 = 0$. Jei $x \neq 0$, $y \neq 0$, tai $|xy|^k = |x|^k|y|^k$. Ketvirtajai funkcijai, kai $x \neq 0$, $y \neq 0$, turime $xy|xy|^{k-1} = x|x|^{k-1} \cdot y|y|^{k-1}$. Vadinasi, visos 4 funkcijos tinka.

Atsakymas. Funkcijos

$$f(x) \equiv 0, \quad f(x) \equiv 1, \quad f(x) = \begin{cases} |x|^k, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x|x|^{k-1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

5 uždavinio sprendimas. Į lygybę $f(x+y) = f(x)f(y)$ statome $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = f^2(0) \Rightarrow f(0) = 0$ arba $f(0) = 1$. Jeigu $f(0) = 0$, tai $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$, ir gauname funkciją $f(x) \equiv 0$, kuri tenkina lygtį. Kita vertus $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right) = f^2\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant 0$. Jei bent viename taške x_0 bus $f(x_0) = 0$, tai $f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = 0$, ir vėl gauname $f(x) \equiv 0$. Vadinasi, toliau galime laikyti, kad $f(x) > 0$. Logaritmuojame:

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y);$$

pažymėję $\ln f(x) = g(x)$, turime $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Funkcija $g(x)$ aprėžta intervale $[1, 2]$, todėl $g(x) = kx$, tada $f(x) = e^{g(x)} = e^{kx} = a^x$ $(a > 0)$. Patikriname: $a^{x+y} = a^x a^y$ - funkcija tinka (beje, kai $a = 1$, gauname funkciją $f(x) \equiv 1$).

Atkreipiame dėmesį, jog čia rėmėmės tuo, kad lygtis $g(x+y) = g(x) + g(y)$ kuriame nors intervale aprėžtų (ir juo labiau tolydžių) funkcijų klasėje turi tik $g(x) = kx$ pavidalo sprendinius.

Atsakymas. $f(x) \equiv 0$ ir $f(x) = a^x$ $(a > 0)$.

6 uždavinio sprendimas. Į lygybę $f(xy) = f(x) + f(y)$ statome:
$x = y = 1 \Rightarrow f(1) = 0$,
$x = y = -1 \Rightarrow f(1) = f(-1) + f(-1),\ 2f(-1) = 0,\ f(-1) = 0$,
$f(-x) = f(-1 \cdot x) = f(-1) + f(x) = f(x)$.

Vadinasi, mūsų funkcija yra lyginė, todėl nagrinėsime teigiamuosius x ir y. Imkime $x = e^u$, $y = e^v$, tada $f(e^u e^v) = f(e^{u+v}) = f(e^u) + f(e^v)$. Pažymėję $f(e^u) = g(u)$, turime $g(u+v) = g(u) + g(v)$. Funkcija $g(u)$ aprėžta intervale $[\ln 1, \ln 2]$, todėl $g(u) = ku$, $f(e^u) = ku$, $f(x) = k \ln x,\ x > 0$. Kadangi mūsų funkcija lyginė, gauname funkciją

$$f(x) = k \ln |x|, \quad x \neq 0.$$

••• $\alpha + \omega$ •••

Patikrinkime ją: $k\ln|xy| = k\ln|x| + k\ln|y|$. Kai $k = 0$, gauname funkciją $f(x) = 0$ $(x \neq 0)$.

Atsakymas. $f(x) = k\ln|x|$ $(x \neq 0)$.

Pastaba. Jeigu atsisakytume sąlygos $x \neq 0$, $y \neq 0$ ir spręstume lygtį

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},$$

mūsų lauktų didelis netikėtumas: $y = 0 \Rightarrow f(0) = f(x) + f(0)$, ir gautume tik trivialiąją funkciją $f(x) \equiv 0$.

7 uždavinio sprendimas. Pirmas būdas. Labai įdomi testinių uždavinių ypatybė yra tai, kad „spręsti" uždavinį visai nebūtina – jei kokiais nors argumentais jūs save įtikinate, kad teisingas, pavyzdžiui, atsakymas A, tai jūs jį nurodote ir negaištate laiko (pilnai išspręsti šį uždavinį visai nelengva – tai sunkokas olimpiadinis uždavinys, žr. **8** ir **9** uždavinius).

Pamėginkime atspėti (bent) vieną lygties $f(x) + f(y) = f(x+y) - xy - 1$ sprendinį. Sandauga xy mums sufleruoja, kad $f(x+y)$ galėtų būti sumos kvadratas, t.y. $f(x) = x^2$. Bet tada gauname lygybę

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - xy - 1,$$

kuri neteisinga. Kad sandauga xy išnyktų, bandome $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Tada

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2 - xy - 1,$$

ir mums jau kliudo tik -1. „Pataisome" $\frac{1}{2}x^2$ ir bandome $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$. Tada

$$\frac{1}{2}x^2 - 1 + \frac{1}{2}y^2 - 1 = \frac{1}{2}(x+y)^2 - 1 - xy - 1,$$

taigi $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ tenkina duotąją lygtį.

Bet iškyla dar vienas sunkumas: rastosios funkcijos reikšmė $f(1) = -\frac{1}{2}$, o turi būti $f(x) = 1$. Matome, kad neblogai būtų prie $f(x)$ pridėti $\frac{3}{2}$ – bet tada kairėje pusėje tektų pridėti dukart po $\frac{3}{2}$, o dešinėje – tik vienąkart. Štai visai kitas reikalas, jei prie $f(x)$ pridėsime $\frac{3}{2}x$ – tada taške 1 prie $f(x)$ ir bus pridėta $\frac{3}{2}$, o prie abiejų lygties pusių $\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}(x+y)$.

Atspėjome sprendinį $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$. Gal jų yra ir daugiau, bet iš sąlygos išeitų, kad atsakymui tai lyg ir neturi įtakos. Todėl sprendžiame lygtį $f(n) = n$ $(n \in \mathbb{Z})$:

$$\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 1 = n, \quad n^2 + n - 2 = 0, \quad n = 1 \text{ arba } n = -2.$$

Kadangi $n \neq 1$, tai $n = -2$, taigi norimų reikšmių tėra viena.

Antras būdas. Kitaip atspėkime, kokia galėtų būti ta funkcija. Išbandykime trinarį $f(x) = ax^2 + bx + c$ (jis apima visas kvadratines ir tiesines funkcijas). Įstatykime jį į lygtį bei sąlygą $f(x) = 1$ ir nustatykime jo koeficientus:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c + ay^2 + by + c = a(x+y)^2 + b(x+y) + c - xy - 1, \\ a + b + c = 1, \end{cases}$$
$$\begin{cases} c = 2axy - xy - 1, \\ a + b + c = 1. \end{cases}$$

Aišku, kad patogu imti $a = \frac{1}{2}$, tada $c = -1$, o $b = \frac{3}{2}$ (spręsti nereikia, užtenka „atspėti“ kokius nors a, b, c). Taigi funkcija $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$ tenkina uždavinio sąlygas.

Trečias būdas. Paeiliui skaičiuokime $f(n)$ reikšmes:

$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy + 1$, todėl
$f(x+1) = f(x) + f(1) + x \cdot 1 + 1 = f(x) + x + 2$,
$f(2) = f(1) + 1 + 2 = 4$,
$f(3) = f(2) + 2 + 2 = 8$,
$f(4) = f(3) + 3 + 2 = 13$,
$f(5) = f(4) + 4 + 2 = 19$,
$f(6) = f(5) + 5 + 2 = 26$,

ir „įsitikinome“, kad $f(n)$ didėja greičiau negu n, taigi norimų teigiamųjų n reikšmių nėra. Dabar imdami lygtyje $x = y = 0$ gauname $f(0) = f(0) + f(0) + 1$, t.y. $f(0) = -1$, o tada, imdami $y = -x$, turime $f(0) = f(x) + f(-x) - x^2 + 1$, t.y.

$f(-x) = x^2 - 2 - f(x)$, ir
$f(-1) = 1^2 - 2 - f(1) = -1 - 1 = -2$,
$f(-2) = 2^2 - 2 - f(2) = 2 - 4 = -2$,
$f(-3) = 3^2 - 2 - f(3) = 7 - 8 = -1$,
$f(-4) = 4^2 - 2 - f(4) = 14 - 13 = 1$,
$f(-5) = 5^2 - 2 - f(5) = 23 - 19 = 4$,
$f(-6) = 6^2 - 2 - f(6) = 34 - 26 = 8, \ldots$.

●●● $\alpha + \omega$ ●●●

Vėl matome, kad dešinė pusė didėja, ir norimų neigiamų reikšmių neberasime. Vadinasi, radome tik vieną neigiamąją n reikšmę: $n = -2$.

Atsakymas. **B** (t.y. viena reikšmė).

8 uždavinio sprendimas. Žinoma, tai tas pats 5 uždavinys, tik jau ne „testinis" (o, sakykime, olimpiadinis). Tai reiškia, kad sprendžiant visi teiginiai turi būti pagrįsti. Todėl gavus kaip 5 uždavinio sprendime formulę

$$f(x+1) = f(x) + x + 2, \tag{21}$$

neužtenka suskaičiuoti kelias reikšmes $n \in \mathbb{Z}$ ir teigti, kad sprendinių, tenkinančių lygybę $f(n) = n$ nėra – tai reikia įrodyti. Bet visai paprasta įrodyti, kad funkcija $g(n) = f(n) - n$ ($n \in \mathbb{Z}$) didėja, kai $n \geqslant 0$, ir mažėja, kai $n \leqslant -2$:

$$\begin{aligned} g(n+1) - g(n) &= f(n+1) - n - 1 - f(n) + n \\ &= f(n+1) - f(n) - 1 \\ &= n + 2 - 1 = n + 1. \end{aligned}$$

Dabar kadangi $g(1) = f(1) - 1 = 0$, tai $g(n) > 0$, kai $n > 1$, t.y. $f(n) > n$, o kadangi $g(-2) = f(-2) + 2 = -2 + 2 = 0$, tai $g(n) > 0$, kai $n \leqslant -3$, t.y. $f(n) > n$.

Vadinasi, lygybę $f(n) = n$ galėtų tenkinti tik n reikšmės $-2, -1, 0, 1$. Bet $n \neq 1$, o $f(-1) = -2$, $f(0) = -1$. Taigi sąlygą tenkina tik reikšmė $n = -2$: $f(-2) = -2$.

Atsakymas. Vienintelė reikšmė $n = -2$.

Pastabos. Įdomu, kad sprendžiant iškyla sprendimo korektiškumo klausimas: o ar iš viso egzistuoja tokia funkcija f, kuri tenkina visas uždavinio sąlygas? Gal tokios funkcijos iš viso nėra? Ir ko verti tada visi mūsų samprotavimai?

Paaiškinsime tai tokiu pavyzdžiu. Vos vos pakeiskime mūsų uždavinį ir pradėkime sąlygą žodžiais „*Aprėžta funkcija* f ..." . Visas mūsų sprendimas liks tas pats, ir atsakymą gautume, kad yra *viena* sveikoji n reikšmė, su kuria $f(n) = n$ ir $n \neq 1$, – tai $n = -2$: $f(-2) = -2$. O dabar jus nustebinsiu: galima įrodyti, kad tokių funkcijų, kurios tenkina *visas* naujojo uždavinio sąlygas, iš viso nėra. Taigi atsakymas turėtų būti: „Uždavinys nekorektiškas – funkcijų f, tenkinančių sąlygą, nėra", o ne „Viena reikšmė". Kaip gi mums elgtis?

Pasirodo, jog sprendžiant uždavinius galioja *nerašytas susitarimas*, kad objektas (funkcija ir pan.), apie kuriuos kalbama uždavinyje, tikrai egzistuoja.

Todėl sprendžiančiajam leidžiama tuo neabejoti. Kitas dalykas, kad per kontrolinius darbus, egzaminus ar olimpiadas pasitaiko korektūros klaidų arba kitų nesusipratimų, ir uždavinys tampa nekorektišku. Tada taisytojų garbės dalykas yra užskaityti mokiniui už tą uždavinį visus taškus, net jei mokinys uždavinio ir nesprendė (nekalbėsime apie tai, kad dažnas mokinys ir taip jau nubaustas – sutrikęs jis gali prasčiau spręsti ir kitus uždavinius). Kita kalba, kad ištirti, ar uždavinio sąlyga korektiška, taip pat yra labai įdomus uždavinys, bet čia jau „aukštasis pilotažas".

Ir dar viena pastaba, kuri tiks dažnam uždaviniui. Sprendžiant šį uždavinį, nesvarbu, egzistuoja tik viena ar kelios funkcijos, tenkinančios sąlygą (kas kita, jei uždavinyje klausiama, kiek yra tokių funkcijų, ar prašoma rasti visas tokias funkcijas). Mūsų sprendimas yra maždaug toks: „ kadangi funkcija f tenkina lygybes ..., tai ...", ir toliau mes kalbame tik apie tas lygybes. Iš tikrųjų galima įrodyti, kad šiame uždavinyje sąlygą tenkinančių funkcijų f yra net be galo daug, bet kiekviena jų tenkina tas pačias lygybes, taigi ir atsakymas nuo to nepriklauso.

9 uždavinio sprendimas. Spręsdami **7** uždavinį, jau mokėmės atspėti bent vieną sprendinį. Pasirodo, kad bent jau natūraliesiems n nieko ir spėlioti nereikia. Imkime $x = k$, $y = 1$, tada $f(k+1) = f(k) + k + 2$. Užrašykime šią lygybę su $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$f(2) = f(1) + 1 + 2\,,$$
$$f(3) = f(2) + 2 + 2\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(n) = f(n-1) + n - 1 + 2\,.$$

Sudėję šias lygybes, gauname

$$f(n) = f(1) + (1 + 2 + \ldots + n - 1) + 2(n-1)\,,$$
$$f(n) = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 1\,.$$

Lengva patikrinti, kad funkcija $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$ tenkina uždavinio lygtį natūraliesiems n. Bet tikrindami niekur nesiremiame, kad x natūralusis, taigi $f(x)$ tenkina lygtį ir su bet kuriais x. Matome, kad $f(x)$ yra tolydi, taigi ji tenkina visas uždavinio sąlygas. Vienas sprendinys (kaip dažnai sakoma, atskirasis sprendinys) rastas.

Dabar taikysime būdą, dažnai praverčiantį, kai žinome atskirąjį sprendinį. Nagrinėkime funkciją $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$. Įstatykime $f(x) = g(x) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$ į pradinę lygtį. Gauname

$$g(x+y)+\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{3}{2}(x+y)-1=$$
$$g(x)+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-1+g(y)+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}y-1+xy+1\,,$$
o suprastinę –
$$g(x+y)=g(x)+g(y).$$

Kadangi $f(x)$ tolydi funkcija, tai tolydi ir funkcija $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1$. Bet tada, kaip jau žinome, $g(x)=kx$, todėl $f(x)=kx+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-1$. Radome visas tolydžiąsias funkcijas, kurios tenkina pradinę lygtį. Iš sąlygos $f(1)=1$ gauname $k=0$, vadinasi, $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-1$.

Atsakymas. Vienintelė funkcija $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-1$.

10 uždavinio sprendimas. Į lygtį $f(x+y)+f(x-y)=f(3x)$ įstatę $x=y=0$, gauname $f(0)=0$. Tada imdami $y=0$, gauname $f(3x)=2f(x)$, o imdami $y=x$, turime $f(2x)=f(3x)=2f(x)$. Dabar imkime $x=2y$. Tada
$$f(6y)=f(3y)+f(y)=2f(y)+f(y)=3f(y).$$

Kita vertus,
$$f(6y)=f(2\cdot 3y)=2f(3y)=2\cdot 2f(y).$$

Vadinasi, $3f(y)=4f(y)$, t.y. $f(y)=0$.

Atsakymas. $f(x)\equiv 0$.