Giedrius Alkauskas

Funkcinės lygtys moksleivių matematikos olimpiadose

Funkcija – svarbiausia matematinės analizės, aibių teorijos, topologijos sąvoka. Ji padeda atskleisti sudėtingų struktūrų savybes, yra galingas ginklas tiek sprendžiant visų matematikos šakų problemas, tiek taikant matematiką. Iki devyniolikto amžiaus funkcija buvo suprantama kaip išreikštiniu pavidalu užrašyta kintamojo ir funkcijos reikšmių aibių atitiktis. Vėliau, suformavus tvirtus analizės pagrindus, funkcija tapo dėsnio, nustatančio tam tikrą dviejų aibių atitiktį, sinonimu.

Dažnai pasitaiko funkcijų, kurių reikšmės tenkina kokį nors sąryšį arba lygtį. Pavyzdžiui, lyginės funkcijos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ apibūdinamos sąryšiu (arba funkcine lygtimi) $f(x) = f(-x)$. Neretai funkcijos funkcine lygtimi yra ir apibrėžiamos. Svarbios matematinės analizės funkcijos, pavyzdžiui, Γ, B, ζ, tenkina vieną ar net keletą funkcinių lygčių. Be to, funkcijos radimas iš jos funkcinės lygties yra populiari matematinių konkursų tema. Šis straipsnelis yra skirtas įvairių funkcinių lygčių, pasitaikančių moksleivių olimpiadose, apžvalgai bei sprendimo metodams.

Tolydaus kintamojo funkcinės lygtys

Šis skyrelis yra pats „neelementariausias" iš visų. Tačiau ir nestudijavęs matematinės analizės moksleivis jį nesunkiai supras. Nagrinėsime lygtis, kai argumento kitimo sritis yra realiųjų skaičių aibė $\mathbb{R}$ arba intervalas. Jei žinoma papildoma informacija apie funkciją (tolydumas, glodumas, t.y. išvestinių egzistavimas), dažnai galima pereiti prie ribos, diferencijuoti, nustatyti asimptotines savybes.

1 uždavinys. *Išspręskite funkcinę lygtį*

$$f(xy) = [f(x)]^{y^\beta} [f(y)]^{x^\beta};$$

čia β *– teigiama konstanta,* f *– tolydi funkcija,* $x, y > 0$.

Sprendimas. Išspręsti funkcinę lygtį reiškia rasti visas ją tenkinančias funkcijas. Kadangi $f > 0$, tai galime logaritmuoti. Tegu $h(x) = \ln f(x)$. Tuomet $h(xy) = y^\beta h(x) + x^\beta h(y)$. Pažymėję $g(x) = h(x)/x^\beta$, ir padalije paskutinę lygtį iš $x^\beta y^\beta$, gausime $g(xy) = g(x) + g(y)$. Įveskime dar vieną žymenį $\tau(x) = g(e^x)$. Kadangi funkcija g apibrėžta visiems teigiamiems realiesiems skaičiams ir yra tolydi, tai $\tau(x)$ apibrėžta visoje aibėje $\mathbb{R}$ ir taip pat yra tolydi. Be to, ji tenkina funkcinę lygtį

$$\tau(x+y) = g(e^{x+y}) = g(e^x e^y) = g(e^x) + g(e^y) = \tau(x) + \tau(y).$$

Tokia tolydi funkcija τ būtinai yra tiesinė[1] $\tau(x) = Cx$, $C \in \mathbb{R}$. Grįžkime atgal:

$$g(x) = \tau(\ln x) = C\ln x; \quad h(x) = Cx^{\beta}\ln x; \quad f(x) = e^{Cx^{\beta}\ln x}.$$

Visada privalu patikrinti, ar gautoji funkcija tenkina funkcinę lygtį; juk ją spręsdami mes jau tariame, kad sprendinys egzistuoja. Taigi visų samprotavimų išvada yra tokia: *jei sprendinys egzistuoja, tai tik toks, kokį gavome.* Nesunku įsitikinti, kad mūsų atveju sprendinys lygčiai tinka.

2 uždavinys. *Raskite visas funkcijas* $f : (0,\infty) \to (1,\infty)$, *tenkinančias sąlygas:*

a) $f(x) \leqslant 2(x+1)$;
b) $f(x+1) = \bigl(f^2(x) - 1\bigr)/x$.

Sprendimas. Akivaizdu, kad funkcija $f(x) = x+1$ sąlygas tenkina. Jei $f(x) \neq x+1$ kuriam nors x, tai galime tikėtis, kad kelis kartus pritaikę b) sąlygą, gausime prieštarą arba a) sąlygai, arba nelygybei $f(x) > 1$. Taip iš tikrųjų ir yra. Tegu kokiam nors x teisinga lygybė $f(x) = \epsilon(x+1)$, $\epsilon > 0$. Tuomet iš b) sąlygos išplaukia

$$f(x+1) = \epsilon^2(x+2) + \frac{\epsilon^2 - 1}{x}.$$

Jei $\epsilon > 1$, tai $f(x+1) > \epsilon^2(x+2)$. Pakartotinai taikydami samprotavimus, gauname $f(x+K) > \epsilon^{2^K}\cdot(x+K+1)$. Pakankamai dideliam K tai prieštarauja sąlygai a). Jei $\epsilon < 1$, tai $f(x+1) < \epsilon^2(x+2)$. Lygiai taip pat $f(x+K) < \epsilon^{2^K}(x+K+1)$. Kai $K \to \infty$, dešinioji pusė artėja prie 0 – prieštara f aprėžtumui vienetu iš apačios. Taigi $\epsilon = 1$ ir $f(x) = x+1$.

3 uždavinys. *Tegu* $y(x)$ *yra tolydus funkcinės lygties*

$$y(x) = \frac{y^2(x+1)}{x} + y(x+1)$$

sprendinys, čia $y(x) > 0$, *kai* $x > 0$. *Įrodykite, kad* $\lim\limits_{x\to\infty}[y(x)\ln x] = 1$.

Sprendimas. Funkcinę lygtį perrašysime taip:

$$\frac{1}{y(x+1)} - \frac{1}{y(x)} = \frac{y(x+1)}{xy(x)}. \tag{1}$$

Įrodysime, kad $\lim\limits_{n\to\infty}[y(n)\ln n] = 1$, t.y. n perbėga natūraliuosius skaičius. Visiškai analogiškai bet kokiam x gautume $\lim\limits_{n\to\infty}[y(x+n)\ln(x+n)] = 1$. Papildomi samprotavimai, naudojant funkcijos tolydumą, garantuotų sąryšį, kurio reikalauja uždavinio sąlyga.

---

[1] Žr. J. Mačio straipsnį „Susipažinkite: funkcinės lygtys" šiame žurnalo numeryje.

Sumuokime (1) lygybes, kai $x = 1, 2, \ldots, N-1$, ir pasinaudokime funkcine lygtimi:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y(N)} - \frac{1}{y(1)} &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{y(k+1)}{ky(k)} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k}\Big(1 - \frac{y(k+1)}{y(k)}\Big) = \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{y^2(k+1)}{y(k)}.\end{aligned} \tag{2}$$

Kadangi $y(k+1) < y(k) \leqslant y(1)$ (nelygybę nesunku nustatyti iš funkcinės lygties), tai $y^2(k+1) < y(1)y(k)$. Dabar palyginę (2) lygybės abi puses ir pasinaudoję tuo, kad

$$\Big|\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} - \ln N\Big| \leqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^2} \frac{y^2(k+1)}{y(k)} < y(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = C_1,$$

gauname

$$\Big|\frac{1}{y(N)} - \ln N\Big| \leqslant C_2.$$

Padaliję šią nelygybę iš $\ln N$, gauname tai, ką reikėjo įrodyti.

Adityviosios funkcijos

Grįžkime prie 1 uždavinio funkcijos τ. Realioji funkcija vadinama adityviąja, jei visiems $x, y \in \mathbb{R}$ ji tenkina lygybę

$$\tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y).$$

Tokia funkcija dar vadinama Koši funkcija. Akivaizdu, kad tiesinės funkcijos $f(x) = \lambda x$ yra adityvios. Jei adityviai funkcijai f teisinga nors viena iš sąlygų (paskutines dvi moksleivis gali praleisti):

- f tolydi nors viename taške;
- f aprėžta nulio aplinkoje[2] ;
- f monotoninė nors viename intervale;
- f mati Lebego prasme;
- f grafikas nėra tankus visoje plokštumoje,

tai f yra tiesinė funkcija.[3] Ši maža teorijos dalis labai praverčia olimpiadose, kur neretai pasitaiko adityvių funkcijų. Sprendėjas iš anksto turi žinoti, kad adityviai funkcijai labai nedaug trūksta iki tiesinės.

---

[2] Iš tiesų užtenka aprėžtumo vienoje aplinkos pusėje.

[3] Žr. J. Mačio straipsnį „Susipažinkite: funkcinės lygtys" šiame žurnalo numeryje.

4 uždavinys. *Raskite visas funkcijas* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *tenkinančias sąlygas:*

a) $f(x+y)=f(x)+f(y)$;
b) $f(xy)=f(x)f(y)$.

Sprendimas. Iš b) sąlygos gauname $f(x^2)=f^2(x)\geqslant 0$. Jei $f(1)=0$, tuomet iš b) išplaukia $f(x)=f(x)f(1)\equiv 0$. Toliau laikysime $f(1)>0$. Pagal aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę

$$f(x^2)+f\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\geqslant 2\sqrt{f(x^2)f\Big(\frac{1}{x^2}\Big)}=2\sqrt{f(1)}=C>0.$$

Taigi $f\big(x^2+\frac{1}{x^2}\big)\geqslant C$. Kai x perbėga $\mathbb{R}$, reiškinys $x^2+\frac{1}{x^2}$ įgyja visas reikšmes iš intervalo $[2,+\infty)$. Todėl $f(x)\geqslant C>0$, kai $x\geqslant 2$. Iš b) gauname $f(1)=f(x)f\big(\frac{1}{x}\big)\geqslant Cf\big(\frac{1}{x}\big)$, kai $x\geqslant 2$. Taigi $0\leqslant f(x)\leqslant C_1$, kai $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, t. y. mūsų adityvioji funkcija aprėžta vienpusėje nulio aplinkoje. Tada ji yra tiesinė, $f(x)=\lambda x$. Įstatę į b) $f(x)=\lambda x$, gauname $\lambda=\lambda^2$, t.y. $f(x)=x$ arba $f(x)=0$.

Injekciškumas

Funkcija vadinama injekcine, jei iš sąlygos $f(x)=f(y)$ išplaukia $x=y$, t.y. funkcija kiekvieną reikšmę įgyja ne daugiau kaip vieną kartą. Sprendžiant funkcinę lygtį, naudinga ištirti, ar funkcija injekcinė.

5 uždavinys. *Raskite visas funkcijas* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, *tenkinančias* $f\big(f(m)+f(n)\big)=m+n$.

Sprendimas. Nustatyti injekciškumą – tiesiausias kelias sprendimo link. Iš tiesų, jei $f(m)=f(m')$, tai bet kokiam $n\geqslant 1$ $f(f(m)+f(n))=f(f(m')+f(n))$. Tada iš uždavinio lygties $m'+n=m+n$ ir $m'=m$. Taigi funkcija injekcinė. Toliau $f\big(f(m+1)+f(1)\big)=f\big(f(m)+f(2)\big)=m+2$. Kadangi funkcija injekcinė, tai $f(m+1)+f(1)=f(m)+f(2)$, t.y. $f(m+1)-f(m)=C$. Vadinasi, f reikšmės sudaro aritmetinę progresiją: $f(n)=An+B$. Įstatę į funkcinę lygtį, nesunkiai gauname, kad $f(n)\equiv n$ yra vienintelis sprendinys.

6 uždavinys. *Raskite visas funkcijas* $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ *(čia* $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$*), tenkinančias sąlygas:*

a) $f\big(xf(y)\big)f(y)=f(x+y)$, *kai* $x,y\geqslant 0$,
b) $f(2)=0$, $f(x)\neq 0$, *kai* $0\leqslant x<2$.

Sprendimas. Nors injekciškumu nesinaudosime, bet samprotausime analogiškai. Jei $x\geqslant 2$, tai iš a) sąlygos $f(x)=f(2)f\big((x-2)f(2)\big)$, todėl $f(x)=0$, kai $x\geqslant 2$. Taigi $f(x)=0$ ekvivalentu $x\geqslant 2$. Jei $0\leqslant y<2$, tai pakartotinai naudodami funkcinę lygtį gauname tokią ekvivalenčių teiginių grandinę:

$$xf(y)\geqslant 2\iff f\big(xf(y)\big)=0\iff f(x+y)=0\iff x+y\geqslant 2.$$

Vadinasi, intervalai $x\geqslant 2/f(y)$ ir $x\geqslant 2-y$ sutampa, tai yra $f(y)=\frac{2}{2-y}$, $0\leqslant y<2$, $f(y)=0$, $y\geqslant 2$. Šiuo atveju reikia patikrinti, ar funkcija tenkina funkcinę lygtį. Mūsų samprotavimai būtų puikiaisiai tikę, jei, pavyzdžiui, vietoje $f(y)$ funkcinės lygties kairiosios pusės antrasis dauginamasis būtų $f(y^2/2)$.

Funkcijų grupės

Dviejų funkcijų $f, g : A \to A$ kompozicija vadinama funkcija $h : A \to A$, apibrėžiama šitaip: $h(x) = f(g(x))$. Kompozicija paprastai žymima $h = f \circ g$. Pavyzdžiui, jei $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, tai $(f \circ g) = \sin^2 x$. Pastebėkime, kad $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, tačiau dažniausiai $f \circ g \neq g \circ f$. Vieneto vaidmenį kompozicijos operacijoje atlieka funkcija $e(x) = x$. Iš tikrųjų bet kokiai kitai funkcijai f teisingos lygybės $f \circ e = e \circ f = f$.

Sakysime, kad funkcijų sistema

$$G = \{g_0, g_1, \ldots, g_s\}, \quad g_i : A \to A, \ g_0 = e,$$

sudaro baigtinę grupę, jei bet kokioms funkcijoms $g_i, g_j \in G$ jų kompozicija taip pat yra tos pačios sistemos funkcija, t.y. $g_i \circ g_j \in G$, ir bet kokiai $g_i \in G$ yra kita funkcija $g_j \in G$, kad $g_i \circ g_j = e$. Tokiu atveju funkcija g_j vadinama funkcijos g_i atvirkštine. Pavyzdžiui, funkcijų grupę sudaro tokia sistema

$$G = \left\{x, \ \frac{1}{1-x}, \ 1 - \frac{1}{x}\right\}.$$

Koks funkcinių lygčių ir funkcijų grupių ryšys? Tarkime, funkcijai f užrašyta kokia nors funkcinė lygtis, kuri sieja reiškinius $f(g_1(x)), f(g_2(x))$, čia g_1, g_2 priklauso tai pačiai baigtinei funkcijų grupei G. Įstatę į šią lygtį $x = g(x)$, čia $g \in G$, gausime kitus sąryšius (baigtinę jų aibę), iš kurių galima tikėtis rasti $f(x)$.

Štai keli pavyzdžiai, kai tokia strategija sėkminga.

7 uždavinys. *Raskite visas funkcijas* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, *tenkinančias lygtį*

$$f(x)(x^2 + 1) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Sprendimas. Kadangi funkcijos x ir $\frac{1}{x}$ sudaro grupę, įstatykime vietoj x funkciją $\frac{1}{x}$. Tada $f(\frac{1}{x})(\frac{1}{x^2} + 1) + f(x) = 1$. Padauginkime pirmą lygtį iš $\frac{1}{x^2} + 1$ ir atimkime panariui iš jos antrąją. Gausime $f(x)(1 + x^2 + \frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2}$, t.y. $f(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}$. Tiesiogiai patikriname, kad rastoji funkcija tenkina lygtį.

8 uždavinys. *Raskite funkciją* $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$, *tenkinančią sąlygą:*

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2(1-2x)}{x(1-x)}, \quad x \neq 0, \ x \neq 1. \tag{3}$$

Sprendimas. Jau minėjome, kad funkcijos x, $\frac{1}{1-x}$, $1-\frac{1}{x}$ sudaro grupę. Vietoje x įstatome $\frac{1}{1-x}$:

$$f(\frac{1}{1-x})+f(1-\frac{1}{x})=\frac{2(x+1)(1-x)}{x}. \tag{4}$$

Dar kartą atlikę analogišką keitinį, gauname

$$f(1-\frac{1}{x})+f(x)=\frac{2(x-2)x}{1-x}. \tag{5}$$

Sudėję (3) ir (5), atėmę iš jų (4) ir padaliję iš 2, randame $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

Jei bandytume panašiu būdu nagrinėti lygtį $\Gamma(x+1)=\Gamma(x)\cdot x$, mums nepavyktų. Funkcija $x+1$ nepriklauso jokiai baigtinei grupei – ji generuoja begalinę grupę $\{x+n : n\in\mathbb{Z}\}$.

Periodinės funkcijos

Periodinės funkcijos nagrinėjamos jau mokykloje. Tai trupmeninė dalis, sinusas ir kt. Uždaviniuose dažnai pasitaiko funkcijų, tenkinančių sąryšį, iš kurio išplaukia periodiškumas.

9 uždavinys. *Tegu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ yra funkcija, tenkinanti sąlygą $|f(x)|\leqslant 1$ ir lygtį*

$$f(x+\alpha+\beta)+f(x)=f(x+\alpha)+f(x+\beta),$$

čia α,β yra tokios teigiamos konstantos, kad $\frac{\alpha}{\beta}$ – racionalusis skaičius. Įrodykite, kad f yra periodinė funkcija.

Sprendimas. Tegu natūralieji skaičiai m,n yra tokie, kad $m\alpha=n\beta$. Iš sąlygos išplaukia, kad funkcija $g(x)=f(x+\alpha)-f(x)$ yra periodinė su periodu β. Tuomet funkcija $h(x)=g(x)+g(x+\alpha)+\ldots+g(x+(m-1)\alpha)=f(x+m\alpha)-f(x)$ irgi yra periodinė su periodu β, taigi, ir periodu $n\beta=m\alpha$. Vadinasi, $f(x+(K+1)m\alpha)-f(x+Km\alpha)=h(x+Km\alpha)=h(x)$. Sudėję paskutines lygybes, kai $K=0,1,\ldots,N-1$, gauname $f(x+Nm\alpha)-f(x)=Nh(x)$. Kadangi $|f|\leqslant 1$, tai $h(x)\equiv 0$. Priešingu atveju $f(x+Nm\alpha)$ įgytų kiek norima didelę reikšmę. Taigi $f(x+m\alpha)\equiv f(x)$.

10 uždavinys. *Raskite visas funkcijas $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, tenkinančias sąlygas $f(0)\neq 0, f(1)=\sqrt{3}$ ir tapatybę*

$$f(n)f(m)\equiv f(n+m)+f(n-m),\quad n,m\in\mathbb{Z}.$$

Sprendimas. Kai $m=0$, iš funkcinės lygties randame $f(n)f(0)=2f(n)$. Kadangi $f(1)\neq 0$, tai įrašę $n=1$, gauname $f(0)=2$. Įrašę į funkcijos lygtį $m=1$, randame $f(n)f(1)=f(n+1)+f(n-1)$, $n\in\mathbb{Z}$. Kadangi žinome reikšmes $f(0)$ ir $f(1)$, iš šio rekurenčiojo sąryšio randame $f(2),f(3),\ldots$.

Be to, taip pat randame $f(-1), f(-2), \ldots$. Taigi funkcijos reikšmės vienareikšmiškai nusakomos šiuo rekurenčiuoju sąryšiu. Pastebėkime, kad funkcija $f(n) = 2\cos(\pi n/6)$ tenkina pradines sąlygas. Iš kur toks genialus spėjimas? Suskaičiavome dešimt f reikšmių ir iškart pastebėjome periodiškumą. Belieka įsitikinti, kad f tenkina funkcinę lygtį. Iš tiesų

$$\begin{aligned} f(n)f(m) &= 4\cos(\pi n/6)\cos(\pi m/6) \\ &= 2\cos(\pi(n-m)/6) + 2\cos(\pi(n+m)/6) = f(n-m) + f(n+m). \end{aligned}$$

Tokiu būdu gavome, kad vienintelis sprendinys – periodinė funkcija $f(n) = 2\cos(\pi n/6)$. Įdomu, kad pareikalavę $f(1) = \frac{5}{2}$, gautume funkciją $f(n) = 2^n + 2^{-n}$, kuri, nors iš pirmo pirmo žvilgsnio ir skiriasi nuo $2\cos(\pi n/6)$, vis dėlto yra jai labai giminínga.

Galima iš karto parašyti atsakymą bet kokiam realiajam $f(1)$: jei $|f(1)| < 2$, tai $f(n) = 2\cos Cn$; jei $|f(1)| > 2$, tai $f(n) = C^n + C^{-n}$; jei $f(1) = 2$, tai $f(n) \equiv 2$; jei $f(1) = -2$, tai $f(n) = (-1)^n 2$, kur C – tinkamai parinkta konstanta.

11 uždavinys. *Raskite visas funkcijas, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenkinančias funkcinę lygtį $f(x+1) = 2f(x)$.*

Sprendimas. Uždavinys labai paprastas, tačiau dažnai daroma tokia klaida. Tvirtinama, kad lygtį tenkina tik funkcijos $f(x) = C \cdot 2^x$. Tačiau teisingas atsakymas yra toks: $f(x) = h(x) \cdot 2^x$, čia $h(x)$ – bet kokia periodinė su periodu 1 funkcija.

Aritmetinės funkcijos

Paprastai aritmetinėmis funkcijomis vadinamos natūralaus argumento funkcijos, įgyjančios kompleksines reikšmes. Dažniausiai jos vienaip ar kitaip susijusios su pirminiais skaičiais bei natūraliųjų skaičių aibės aritmetika. Yra graži teorija, nagrinėjanti dažniausiai skaičių teorijoje pasitaikančias – adityviąsias ar multiplikatyviąsias – funkcijas. Pamatysime, kad su kai kuriomis jų savybėmis susiduriame spręsdami uždavinius. Dažnai funkcinėje lygtyje jau slypi funkcijos „aritmetinė prigimtis“, tačiau reikia išradingumo ją nustatyti.

12 uždavinys. *Tegu $\mathbb{Q}_+$ – teigiamų racionaliųjų skaičių aibė. Sukonstruokite funkciją f, apibrėžtą šioje aibėje ir visiems $x, y \in \mathbb{Q}_+$ tenkinančią sąlygą*

$$f(x \cdot f(y)) = \frac{f(x)}{y}.$$

Sprendimas. Kaip ir anksčiau pastebėkime, kad ši funkcija yra injekcinė (žr. skyrelį „Injekciškumas“). Įstatę $x = y = 1$, gauname $f(f(1)) = f(1)$. Kadangi funkcija injekcinė, tai $f(1) = 1$. Kai $x = 1$, tai

$$f(f(y)) = \frac{1}{y}. \tag{6}$$

Įstatę į (6) $f(y)$ vietoje y ir panaudoję (6) lygybę pakartotinai, gauname,

$$f(f(f(y))) = f(\frac{1}{y}) = \frac{1}{f(y)}. \tag{7}$$

Pagaliau įstačius į pradinę lygtį vietoje y reikšmę $f(1/y)$, ir pasirėmus (6) ir (7),

$$f\Big(xf(f(\frac{1}{y}))\Big) = \underline{f(xy)} = \frac{f(x)}{f(\frac{1}{y})} = \underline{f(x)f(y)}.$$

Taigi nustatėme, kad su visais racionaliaisiais x, y teisinga lygybė

$$f(xy) = f(x)f(y), \tag{8}$$

t.y. f yra multiplikatyvioji funkcija. Taip pat nesunku įsitikinti, kad iš (6) ir (8) išplaukia pradinė funkcinė lygtis. Taigi pastarosios sąlygos ekvivalenčios uždavinio funkcinei lygčiai. Funkcijos, tenkinančios (8) sąlygą, vadinamos visiškai multiplikatyviosiomis. Akivaizdu, kad užtenka apibrėžti jų reikšmes tik pirminiams skaičiams, nes užrašius racionalųjį skaičių x skirtingų pirminių skaičių laipsnių (tiek neigiamų, tiek teigiamų) sandauga ir pasinaudojus (8) sąlyga, galima rasti ir funkcijos reikšmę $f(x)$:

$$x = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {}_s^{\alpha_s}, \quad f(x) = \big[f(p_1)\big]^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \big[f(p_s)\big]^{\alpha_s}.$$

Kai $x = 1$, iš (8) gauname $f(x) = f(x)f(1)$; tad jei $f(x) \not\equiv 0$, tai $f(1) = 1$. Trivialus atvejis $f(x) \equiv 0$ netinka, nes nėra patenkintos uždavinio sąlygos.

Tegu dabar $p_1 < p_2 < \ldots$ yra visi pirminiai skaičiai, išdėstyti didėjimo tvarka. Apibrėžkime $f(p)$ taip:

$$f(p_i) = \begin{cases} p_{i+1}, & \text{jei } i \text{ – nelyginis}, \\ \dfrac{1}{p_{i-1}}, & \text{jei } i \text{ – lyginis}. \end{cases}$$

Naudodamiesi (8) sąlyga, pratęskime f apibrėžimą visiems racionaliesiems x.

Nesunku įsitikinti, kad (6) savybė teisinga pirminiams, taigi ir visiems racionaliesiems. Vadinasi, reikiamą funkciją sukonstravome.

13 uždavinys. *Nagrinėkime funkcijas* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *visiems* $s, t \in \mathbb{N}$ *tenkinančias sąlygą* $f(t^2 f(s)) = s f^2(t)$. *Raskite minimalią galimą* $f(1998)$ *reikšmę.*

Sprendimas. Šis uždavinys buvo pasiūlytas 1998 metais tarptautinėje olimpiadoje Taipėjuje ir buvo bene sunkiausias. Tačiau susipažinus su pagrindinėmis tokių uždavinių sprendimo idėjomis, belieka jas pritaikyti. Kaip ir anksčiau, galima nustatyti, kad f injekcinė funkcija, t.y. iš $f(s_1) = f(s_2)$ išplaukia $s_1 = s_2$.

Panagrinėkime atskirąjį atvejį $f(1) = 1$. Tuomet, kai $s = 1$,

$$f(t^2) = f^2(t), \tag{9}$$

kai $t = 1$,

$$f(f(s)) = s. \tag{10}$$

Vietoje s įstatę į funkcinę lygtį $f(s)$ ir pasinaudoję (10) dar kartą, gauname

$$f\Big(t^2 f(f(s))\Big) = f(t^2 s) = f(s)f^2(t). \tag{11}$$

Taigi pasinaudoję (11) ir (9), randame

$$f(a^2b^2) = f(a^2)f^2(b) = f^2(a)f^2(b).$$

Kita vertus, iš (9) išplaukia $f(a^2b^2) = f^2(ab)$. Sulyginame paskutines lygybes ($f(n) > 0$):

$$f(a)f(b) = f(ab).$$

Taigi funkcija multiplikatyvi. Tegu p yra bet koks pirminis ir $f(p) = \tau$. Tada τ – irgi pirminis skaičius. Iš tiesų, jei būtų $\tau = cd$, $c, d > 1$, tai $p = f\big(f(p)\big) = f(\tau) = f(c) \cdot f(d)$. Dėl injekciškumo $f(c) > 1$, $f(d) > 1$, ir gautume prieštarą.

Taigi $f(p)$ yra pirminis skaičius. Tegu $p_1 < p_2 < \ldots$ yra visi pirminiai skaičiai, išdėstyti didėjimo tvarka, ir $f(p_i) = p_{\sigma(i)}$, čia $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yra injekcinė funkcija. Tuomet iš (10) išplaukia $p_i = f\big(f(p_i)\big) = p_{\sigma(\sigma(i))}$, t.y. $\sigma(\sigma(i)) = i$. Vadinasi, f sukeičia kas du pirminius skaičius vietomis, t.y. jei $f(p) = q$, tai $f(q) = p$ (tačiau gali būti ir $f(p) = p$). Nesunku patikrinti, kad visos tokios funkcijos tenkina pradinę sąlygą. Kadangi $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$, tai $f(1998) = p_{\sigma(1)}p^3_{\sigma(2)}p_{\sigma(12)}$ (37 – 12-as pirminis skaičius). Akivaizdu, mažiausią reikšmę gauname, kai $f(3) = ?$, $f(37) = 5$. T.y. $f(1998) = 3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 120$.

O dabar tirkime bendrąjį atvejį $f(1) = \alpha$. Kai $s = 1$, tai

$$f(t^2)\alpha = f^2(t); \tag{12}$$

jei $t = 1$, tai

$$f(f(s)) = s\alpha^2. \tag{13}$$

Vietoj s įstatę $f(s)$, gauname

$$f(t^2 s\alpha^2) = f(s)f^2(t). \tag{14}$$

Taigi pasinaudoję (12) ir (14) lygybėmis, randame

$$f^2(a)f^2(b) = f(\alpha a^2)f^2(b) = f(b^2 \cdot a^2\alpha \cdot \alpha^2) = f\big(\alpha \cdot (\alpha ab)^2\big) = f^2(\alpha ab),$$

iš čia

$$f(a)f(b) = f(\alpha ab).$$

Į šią lygybę įstatę $b = 1$, gauname

$$f(a) \cdot \alpha = f(\alpha a), \tag{15}$$

t.y.

$$f(a)f(b) = \alpha f(ab). \tag{16}$$

Taigi

$$f(a_1 a_2 \dots a_n) = \frac{f(a_1 \dots a_{n-1})f(a_n)}{\alpha} = \frac{f(a_1 \dots a_{n-2})f(a_{n-1})f(a_n)}{\alpha^2}$$
$$= \dots = \frac{f(a_1)f(a_2)\dots f(a_n)}{\alpha^{n-1}}.$$

Atskiru atveju $f(a^n) = f^n(a)/\alpha^{n-1}$. Pagal sąlygą kairiojoje pusėje esantis skaičius – sveikasis. Išreikškime $f(a)/\alpha$ nesuprastinama trupmena. Jei jos vardiklis didesnis už 1, tai pakankamai dideliam n trupmenos $f^{n-1}(a)/\alpha^{n-1}$ vardiklis didesnis už $f(a)$, t.y. $f^n(a)/\alpha^{n-1}$ nėra sveikasis. Taigi $f(a)/\alpha$ yra sveikasis skaičius. Kadangi a – bet koks natūralusis, tai $f(a) = \alpha \overline{f}(a)$, čia $\overline{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Tuomet (16) sąlyga tampa $\overline{f}(ab) = \overline{f}(a)\overline{f}(b)$, o iš (13) ir (15) gauname

$$f(f(s)) = f(\alpha \overline{f}(s)) = \alpha f(\overline{f}(s)) = \alpha^2 \overline{f}(\overline{f}(s)) = \alpha^2 s,$$

t.y. $\overline{f}(\overline{f}(s)) = s$. Tai jau išnagrinėtas atvejis. Taigi $f(1998) = \alpha f(1998) \geqslant 120\alpha \geqslant 120$.

Rekurentieji sąryšiai

Neretai funkcinė lygtis sieja funkcijos reikšmes dviejuose gretimuose taškuose (jei kalbama apie natūralaus argumento funkcijas), arba funkcijos reikšmes taške n išreiškia jos reikšmėmis taškuose $m < n$. Tokie sąryšiai vadinami rekurenčiaisiais (grįžtamaisiais). Atrodytų, žinant pradines sąlygas, uždavinio spręsti nebereikia – visos reikšmės vienareikšmiškai nustatomos pradiniu sąryšiu. Kita vertus, kai norima gauti informacijos apie funkcijos elgesį arba jos išreikštinį pavidalą, reikia giliau išnagrinėti rekurentųjį sąryšį.

14 uždavinys. *Funkcija f apibrėžta aibėje $\mathbb{N}$ taip:* $f(1) = 1$, $f(3) = 3$,

$$f(2n) = f(n), \quad f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n), \quad f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n).$$

Reikia rasti, kiek yra sveikųjų skaičių, ne didesnių nei 1999 ir tokių, kad $f(n) = n$.

Sprendimas. Visiškai akivaizdu, kad rekurenčiaisiais sąryšiais apibrėžta funkcija f yra vienareikšmiškai nusakyta. Paskaičiavę keletą pirmųjų f reikšmių, pastebėsime įdomų faktą: $f(n)$ – tai dvejetainė išraiška atvirkščiai parašytas skaičius n, t.y., jei $n = \overline{\epsilon_k \epsilon_{k-1} \dots \epsilon_0}$, čia $\epsilon_i = 0$ arba $\epsilon_i = 1$, yra skaičiaus n dvejetainė išraiška, tai $f(n) = \overline{\epsilon_0 \epsilon_1 \dots \epsilon_k}$. Belieka naudojantis indukcija tai įrodyti. Indukcijos bazės teiginys akivaizdus. Tegu teiginys apie funkciją teisingas visiems natūraliesiems $m < n$. Įrodysime, kad jis teisingas ir skaičiui n. Skaičius m yra vieno iš pavidalų: $4n+1$, $4n+3$ arba $2n$. Jei $n=\overline{\epsilon_k\epsilon_{k-1}\dots\epsilon_0}$, tai $2n+1=\overline{\epsilon_k\epsilon_{k-1}\dots\epsilon_0\,1}$, o $4n+1=\overline{\epsilon_k\epsilon_{k-1}\dots\epsilon_0\,01}$. Tada

$$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)=\overline{1\,\epsilon_0\dots\epsilon_k}+\left(\overline{1\,\epsilon_0\dots\epsilon_k}-\overline{\epsilon_0\dots\epsilon_k}\right)=\overline{10\,\epsilon_0\dots\epsilon_k}.$$

Analogiškai $4n+3=\overline{\epsilon_k\epsilon_{k-1}\dots\epsilon_0\,11}$,

$$\begin{aligned}f(4n+3)=&3f(2n+1)-2f(n)=\overline{1\,\epsilon_0\dots\epsilon_k}+2\left(\overline{1\,\epsilon_0\dots\epsilon_k}-\overline{\epsilon_0\dots\epsilon_k}\right)\\=&\overline{11\epsilon_0\dots\epsilon_k}=f(4n+3).\end{aligned}$$

Pagaliau $2n=\overline{\epsilon_k\epsilon_{k-1}\dots\epsilon_0\,0}$ ir

$$f(2n)=f(n)=\overline{\epsilon_0\dots\epsilon_k}=\overline{0\epsilon_0\dots\epsilon_k}.$$

Taigi visais atvejais teiginys teisingas ir šitaip keistai apibrėžta funkcija yra ieškomoji. Jei $f(n)=n$, tai n dvejetainė išraiška yra simetriška, tokie skaičiai vadinami polindrominiais. Suskaičiavę visus vienuolikaženklius simetrinius skaičius ir atmetę du iš jų (būtent $\overline{11111011111}=20157>1999$ ir $\overline{11111111111}=2047>1999$), gauname 92 skaičius.

Orbitos

Kartais daug žinių apie funkciją suteikia jos orbitų struktūra. Tegu $f:A\to A$ yra kokia nors funkcija, o x – jos apibrėžimo srities taškas. Šio taško orbita vadinsime seką

$$x,\ f(x),\ f(f(x)),\ f(f(f(x))),\dots$$

Mus gali dominti, ar yra baigtinių orbitų, kokias savybes turi orbitų taškai. Štai uždavinys, kurį pavyksta išspręsti tik panagrinėjus orbitas.

15 uždavinys. *Tegu q yra fiksuotas teigiamas skaičius, $q\geqslant 1$. Ar egzistuoja funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tenkinanti sąlygą $f(f(x))=x^2-q$?*

Sprendimas. Pažymėkime $g(x)=x^2-q$. Tegu a ir b yra lygties $x^2-q=x$ sprendiniai. Jie yra funkcijos g nejudamieji taškai, t.y. jie tenkina lygybę $g(x)=x$.

Rasime visas funkcijos $g(x)$ dviejų elementų orbitas (arba ciklus), t.y. tokius skaičius u ir v, kad $g(u)=v$, $g(v)=u$. Jei w įeina į tokį ciklą, tai $g(g(w))=w$, taigi yra nejudamasis $g(g)$ taškas.

Pastebėkime, kad visos lygties $g(x)-x=0$ šaknys tinka ir lygčiai $g(g(x))-x=0$. Vadinasi, daugianaris $g(g(x))-x$ dalijasi iš $g(x)-x$. Atlikę šią dalybą, gauname

$$g(g(x))-x=\left(x^2-q\right)^2-q-x=x^4-2qx^2-x+q^2-q=\left(x^2-x-q\right)\left(x^2+x-q+1\right).$$

Daugianario $x^2+x-q+1$ diskriminantas lygus $1+4(q-1)>0$, todėl daugianaris turi dvi skirtingas šaknis u ir v, kurios nesutampa su $g(x)-x$

šaknimis a ir b (patikrinkite!). Daugianaris $g(g)$ turi jau keturis skirtingus nejudamuosius taškus:

$$g(g(a)) = a, \; g(g(b)) = b, \; g(g(u)) = u, \; g(g(v)) = v.$$

Taškai a, b, suprantama, negali įeiti į dviejų narių orbitą, todėl tirkime tašką u. Jei $g(u) = \tau$, tai $g(g(g(u))) = g(g(\tau)) = g(u) = \tau$, taigi τ yra vienas iš nejudamųjų $g(g)$ taškų, todėl turi būti lygus vienam iš skaičių a, b, u, v. Jei $g(u) = a$, tai $u = g(g(u)) = g(a)$ ir gautume prieštarą. Taip pat galime įsitikinti, kad $g(u) \neq b, u$. Taigi $g(u) = v$ ir g turi vienintelę 2 narių orbitą (ciklą) $u \longleftrightarrow v$. Dabar tarkime, kad egzistuoja tokia funkcija f, kad $g(x) = f(f(x))$. Kiekvienas f nejudamasis taškas arba dviejų elementų orbita duoda nejudamą $g(x)$ tašką. Ir atvirkščiai – kiekvienas nejudamasis g taškas generuoja 1 ar 2 narių f orbitą. Kiekviena dviejų narių g orbita generuoja keturių narių f orbitą: jei $g(u) = v$, $g(v) = u$, tai $f(f(u)) = v$, $f(f(v)) = u$ ir gauname 4 narių ciklą:

$$u \to z \to v \to w, \quad z = f(u), \; w = f(v).$$

Visi šio ciklo nariai turi būti skirtingi. Kadangi $g(z) = f(f(z)) = w$, $g(w) = z$, tai g turėtų turėti dar vieną 2 narių orbitą $z \longleftrightarrow w$, skirtingą nuo $u \longleftrightarrow v$. Taigi jei funkcija f egzistuotų, tai g turėtų dvi iš dviejų elementų sudarytas orbitas, bet turi tik vieną. Todėl funkcija f, tenkinanti uždavinio sąlygą, neegzistuoja.

Štai dar vienas uždavinys, kuriame nors ir nenaudojama orbita anksčiau apibrėžta prasme, bet nagrinėjamas jos analogas, taip pat vienas ypač svarbus matematikoje objektas – invariantas (olimpiadinių uždavinių literatūroje vadinamas pusiauinvariantu). Šiuokart susiduriame su funkcine nelygybe.

16 uždavinys. *Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ visiems $n > 1$ tenkinančias nelygybę*

$$f(n) > f(f(n-1)).$$

Sprendimas. Matome, kad kol kas jokios konkrečios funkcijos reikšmės apskaičiuoti negalime. Turime tik informaciją apie funkcijos reikšmes tam tikruose taškuose.

Apibrėžkime kiekvienam $a \in \mathbb{N}$ seką $\{a_n\}$ šitaip: $a_0 = a$; jei $a_s > 1$, $s \geqslant 0$, tai $a_{s+1} = f(a_s - 1)$. Jei skaičiui a apibrėžtas tiek a_s, tiek a_{s+1}, tai tuomet $f(a_s) > f(f(a_s - 1)) = f(a_{s+1})$, taigi $f(a_0), f(a_1), \ldots$ yra griežtai mažėjanti seka. Todėl kiekvienam a jo seka $a_0, a_1, \ldots$ užsibaigia tam tikru a_k. Seka pagal apibrėžimą gali užsibaigti tik tuomet, kai $a_k = 1$. Taigi gavome, kad egzistuoja $a \in \mathbb{N} : f(a) = 1$. Pavyzdžiui, jei skaičiaus $a > 1$ sekos paskutinis narys yra $a_k = 1$, $k \geqslant 1$, tai $f(a_{k-1} - 1) = a_k = 1$. Tegu a yra bet koks natūralusis, kuriam $f(a) = 1$. Jei $a > 1$, tai $f(a_1) < f(a) = 1$. Gavome prieštarą. Taigi $f(a) = 1$ tada ir tik tada, kai $a = 1$.

Dabar pasinaudosime matematine indukcija. Indukcijos teiginys toks: $f(1) = 1, f(2) = 2, \ldots, f(k) = k$ ir $f(m) > k$, kai $m > k$. Atvejį $n = 1$ jau įrodėme. Tarkime, kad teiginys teisingas, kai $k = n$. Įrodysime jį, kai $k = n+1$. Tegu α mažiausia reikšmė, kurią f įgyja aibėje $\{n+1, n+2, \ldots\}$, o β – kuris nors šios aibės elementas ir $f(\beta) = \alpha$. Žymėsime $\beta_0, \beta_1, \ldots$ seką, sudarytą pagal nusakytą taisyklę su $a = \beta$. Kadangi $f(\beta_1) < f(\beta) = \alpha$, tai būtinai turi būti $1 \leqslant \beta_1 \leqslant n$. Kadangi $\beta_1 = f(\beta - 1)$, tai $1 \leqslant f(\beta - 1) \leqslant n$ ir pagal prielaidą $1 \leqslant \beta - 1 \leqslant n$, t.y. $\beta \leqslant n + 1$. Kadangi $\beta > n$, tai $\beta = n + 1$. Taigi reikšmė α įgyjama vieninteliame taške $\beta = n + 1$. Įrodėme, kad $f(n+1) = \alpha$ ir $f(m) > \alpha$, kai $m > n+1$. Belieka įrodyti, kad $\alpha = n+1$.

Tegu γ yra mažiausioji reikšmė, kurią funkcija f įgyja aibėje $\{n+2, n+3, \ldots\}$ ir $f(\delta) = \gamma$. Vėl žymėsime $\delta_0, \delta_1, \ldots$ seką, sudarytą su $a = \delta$. Kadangi $f(\delta_1) < \gamma$, tai $1 \leqslant \delta_1 \leqslant n+1$, t. y. $1 \leqslant f(\delta - 1) \leqslant n+1$. Tačiau $f(\delta - 1) \leqslant n$ negali galioti, nes tada būtų $\delta \leqslant n + 1$. Taigi $f(\delta - 1) = n + 1$, $\delta - 1 = n + 1$ ir $f(n+1) = n+1$. Įrodėme indukcijos teiginį su $k = n + 1$.

Dar trys funkcinės lygtys

17 uždavinys. *Įrodykite, kad neegzistuoja funkcija $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ (čia $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$), visiems n tenkinanti lygybę*

$$f(f(n)) = n + q;$$

q yra teigiamas nelyginis skaičius.

Sprendimas. Vėl nesunkiai galime nustatyti, kad f yra injekcinė funkcija. Jei $n = f(a)$, tai

$$f(a + q) = f(a) + q. \tag{17}$$

Taigi užtenka apibrėžti funkciją $f(x)$, kai argumentas x įgyja reikšmes $0 \leqslant x \leqslant q-1$. Tegu $f(i) = a_i$, $i = 0, 1, \ldots, q-1$. Pastebėkime, kad visiems a_i dalybos iš q liekanos yra skirtingos. Iš tiesų, jei $a_i = a_j + sq$, čia $s \geqslant 0$, $i \neq j$, tai $f(i) = a_i = a_j + sq$. Iš (17) gauname $f(i) = f(j + sq)$. Dėl injekciškumo $i = j + sq$, o tai prieštarauja sąlygai $0 \leqslant i$, $j \leqslant q-1$, $i \neq j$. Toliau iš funkcinės lygties gauname $f(a_i) = f(f(i)) = i + q \equiv i \pmod q$. Iš (17) išplaukia, kad funkcija f skaičius, priklausančius vienai liekanų klasei moduliu q, atvaizduoja į tą pačią klasę. Be to, klasės suskirstytos poromis: jei funkcija atvaizduoja klasės $K_t = \{n : n \equiv t \bmod q)\}$ skaičius į klasę $K_u = \{n : n \equiv u \bmod q)\}$, tai klasės K_u skaičius – į K_t. Parodysime, kad šios klasės negali sutapti, t.y. visada $u \neq t$, arba visiems i $f(i) \not\equiv i \pmod q$.

Iš tiesų, jei $f(i) = i + sq$ (aišku, būtinai $s \geqslant 0$), tuomet $f(f(i)) = f(i + sq) = f(i) + sq = i + 2sq = i + q$, ir gauname prieštarą. Taigi visa q klasių aibė suskirstyta poromis, bet tai yra neįmanoma, nes q – nelyginis skaičius.

Kitas uždavinys nėra sunkus, bet nustebina atsakymu.

18 uždavinys. *Raskite visas tokias funkcijas* $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, *kad visiems* $x, y, z \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} &\text{a) } f(x,1) = x; \quad f(1,y) = y, \\ &\text{b) } f\big(f(x,y),z\big) = f\big(x, f(y,z)\big), \\ &\text{c) } f(zx, zy) = z^k f(x,y); \end{aligned}$$

čia k *– teigiama konstanta.*

Sprendimas. Iš pradžių galima suglumti susidūrus su dviejų kintamųjų funkcija. Vis dėlto, gerai įsižiūrėkime į trečiąją lygtį. Mūsų funkcija yra k-osios eilės homogeninė. Ant dviejų kvadrato kraštinių funkcijos reikšmės jau apibrėžtos. Supratę, kad kiekvieną porą (x,y) galima užrašyti kaip $\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right)$ arba $\left(y \cdot \frac{x}{y}, y \cdot 1\right)$ priklausomai nuo to, ar $x \geqslant y$, ar $y \geqslant x$, atsakymą galime parašyti iš karto.

Jei $x \geqslant y$, tai $f(x,y) = f\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^k \cdot f\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^{k-1} y$. Analogiškai, jei $y \geqslant x$, tai $f(x,y) = xy^{k-1}$. Kita vertus, b) sąlyga riboja k reikšmes. Iš tiesų, $f\big(f(z,z), z^k\big) = f(z^k, z^k) = z^{k^2}$ (naudojome tik c) savybę). Bet dėl b) savybės šis reiškinys lygus $f\big(z, f(z, z^k)\big) = f\big(z, z^k f(1, z^{k-1})\big) = f(z, z^{2k-1}) = z^k f(1, z^{2k-2}) = z^{3k-2}$, t.y. $k^2 = 3k - 2 \Longrightarrow k = 1$ arba $k = 2$. Taigi $f(x,y) = \min(x,y)$ (kai $k = 1$) ir $f(x,y) = xy$ (kai $k = 2$). Abi funkcijos tinka.

19 uždavinys. *Tegu* $S = (-1, +\infty)$. *Raskite visas funkcijas* $f : S \to S$, *tenkinančias šias dvi sąlygas:*

$$\begin{aligned} &\text{a) } f\big(x + f(y) + xf(y)\big) = y + f(x) + yf(x) \quad \text{visiems } x, y \in S; \\ &\text{b) } f(x)/x \text{ griežtai didėja intervaluose } -1 < x < 0 \text{ ir } 0 < x. \end{aligned}$$

Sprendimas. Remdamiesi b) sąlyga, nustatome, kad lygtis $f(x) = x$ turi ne daugiau kaip tris sprendimus: vieną intervale $(-1; 0)$, vieną intervale $(0; \infty)$ ir galbūt $x = 0$. Jei $f(u) = u$, tai įstatę į funkcinę lygtį $x = y = u$, gauname $f(2u + u^2) = 2u + u^2$. Jei $u > 0$, tai $2u + u^2 > u > 0$, taigi $x = 2u + u^2$ yra kitas lygties $f(x) = x$ sprendinys intervale $x > 0$. Tačiau to negali būti. Analogiškai, jei $-1 < u < 0$, tai $-1 < u^2 + 2u < u < 0$ ir $x = u^2 + 2u$ yra kitas sprendinys intervale $(-1, 0)$. To taip pat negali būti, todėl $f(u) = u$ gali būti patenkinta nebent su $u = 0$. Kita vertus, iš funkcinės lygties, kai $x = y$, gauname $f\big(x + f(x) + xf(x)\big) = x + f(x) + xf(x)$. Jei $f(u) = u$ turi šaknį 0, tai tada turi būti $x + f(x) + xf(x) \equiv 0$. Tačiau iš šios lygybės randame

$$f(x) = -\frac{x}{x+1}.$$

Belieka įsitikinti, kad ši funkcija ieškomoji, šiuo atveju tai būtina!