Uždaviniai

Metalų lydiniai, skysčių mišiniai – populiari procentų uždavinių tema. Dažnai jų siužetas būna toks: „iš vieno indo vienos, o iš kito – kitos koncentracijos skysčių mišinius supilkime į trečiąjį indą...“ Mums atrodo, kad galima atidėti vieną indą į šalį ir suformuluoti įdomių uždavinių apie skysčius naudojant tik du. Kai kuriuos iš jų galima išspręsti beveik be skaičiavimų. Kitų atsakymus nesunku įspėti, bet ne taip jau paprasta matematiškai pagrįsti. Visuose uždaviniuose daroma prielaida, kad sumaišius du skysčius, gautojo mišinio tūris lygus skysčių tūrių sumai.

ε.16

◇◇◇

Viename 1,5 litro talpos inde yra 1 litras grynojo spirito, kitame tokios pat talpos inde – 1 litras vandens. Iš vieno indo į kitą galima perpilti bet kokį skysčio kiekį (neišlaistant, žinoma, ant žemės). Po keleto tokių perpylimų viename iš indų atsirado 1 litras $p\%$ koncentracijos spirito ir vandens mišinys. Kokia mišinio koncentracija kitame inde?

ε.17

◇◇◇

Ankstesniojo uždavinio apibendrinimas. Kokia mišinio koncentracija kitame inde, jei viename po keleto perpylimų gauta m litrų ($0,5 \leq m \leq 1,5$) $p\%$ koncentracijos spirito ir vandens mišinys.

ε.18

◇◇◇

Indai ir jų turinys tokie patys kaip anksčiau. Perpylimų metodu norėtume gauti viename iš indų 70% koncentracijos spirito ir vandens mišinį (nesvarbu, kokį kiekį). Po keleto perpylimų pasirodė, kad viename inde yra 60% koncentracijos mišinys. Ar mūsų tikslą dar galima perpylimais pasiekti?

••• $\alpha+\omega$ •••

ε.19

◇ ◇ ◇

Indą su spiritu pažymėkime raide S, su vandeniu – V. Ar įmanoma perpylimų metodu inde S gauti 45% koncentracijos spirito ir vandens mišinį?

ε.20

◇ ◇ ◇

Vėl naudokime tuos pačius indus. Pradinėje padėtyje S inde yra 100% koncentracijos spirito ir vandens mišinys, inde V – 0%. Pavadinkime dvigubu perpylimu tokius veiksmus: iš S indo perpilame 0,5 litro į indą V, skysčius gerai išmaišome ir iš V perpilame 0,5 litro į indą S. Tegu p_n – spirito ir vandens mišinio koncentracija inde S po n dvigubų perpylimų. Tikriausiai numanote, kaip elgiasi seka p_n, kai n didėja. Pabandykite įrodyti matematiškai, kad p_n monotoniškai mažėja, artėdama prie 50%, kai n didėja. Galbūt įdomu sužinoti, kad seka $b_n = (p_{n-1} - p_n)/100$ sudaro geometrinę progresiją su vardikliu $q = 1/3$.

ε.21

◇ ◇ ◇

Ištirkite, kaip elgiasi ankstesnio uždavinio seka p_n, jeigu atliekant dvigubą perpylimą iš indo S į V ir iš V į S perpilama ϵ $(0 \leq \epsilon \leq 0,5)$ litrų skysčio.

• • • ○ • • •

Mokyti spręsti uždavinius reiškia ugdyti valią. Spręsdamas uždavinius, kurie nėra jam per lengvi, moksleivis mokosi atkakliai siekti sėkmės, vertinti nedidelius laimėjimus, laukti reikšmingos idėjos, sutelkti visas savo jėgas, kai ji atsiranda. Jeigu moksleiviui mokykloje sprendžiant uždavinius neteko patirti šios emocijų įvairovės, jo matematiniam išsilavinimui trūksta svarbiausios grandies.

George Pólya

Skyrelį tvarko **Giedrius Alkauskas**

Šio skyrelio uždaviniai – dviejų 1998 metų jaunųjų matematikų olimpiadų. Uždavinius $\alpha 87$ – $\alpha.92$ sprendė tarptautinės matematikų olimpiados Taipėjuje dalyviai (dar vienas uždavinys suformuluotas ir išspręstas V. Radčenko straipsnyje „Kombinatorikos sąryšių olimpiadiniuose uždaviniuose įrodymo metodai", žr. šio žurnalo p.85.), likusieji uždaviniai – iš „Baltijos kelio" Varšuvoje olimpiados.

$\alpha.88$

◇◇◇

Iškilojo keturkampio $ABCD$ įstrižainės AC ir BD statmenos, o priešingos kraštinės AB ir DC nelygiagrečios. Kraštinių AB ir DC vidurio statmenys kertasi taške P, kuris yra $ABCD$ viduje. Įrodykite, kad apie keturkampį $ABCD$ galima apibrėžti apskritimą tada ir tik tada, kai trikampių ABP ir CDP plotai lygūs.

$\alpha.89$

◇◇◇

Natūraliojo skaičiaus n daliklių (įskaitant 1 ir n skaičių) pažymėkime $d(n)$. Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius k, kad

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

kuriam nors n.

$\alpha.90$

◇◇◇

Raskite visas tokias natūraliųjų skaičių poras (a, b), kad a^2b+a+b dalytųsi iš $ab^2 + b + 7$.

$\alpha.91$

◇◇◇

Trikampio ABC įbrėžtinio apskritimo centras yra I, o kraštines BC, CA ir AB tas apskritimas liečia atitinkamai taškuose K, L ir M. Tiesė, einanti per tašką B ir lygiagreti su tiese MK, kertasi su tiesėmis LM ir LK atitinkamai taškuose R ir S. Įrodykite, kad kampas $\angle RIS$ yra smailus.

α.92

◇◇◇

Nagrinėkime visas funkcijas f, apibrėžtas visų natūraliųjų skaičių aibėje ir įgyjančias natūraliąsias reikšmes, be to, su visais natūraliaisiais s, t tenkinančias sąlygą

$$f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2.$$

Nustatykite mažiausią galimą $f(1998)$ reikšmę.

α.93

◇◇◇

Raskite visas funkcijas $f(x, y)$, apibrėžtas su visomis natūraliųjų skaičių poromis x, y, įgyjančias natūraliąsias reikšmes ir su visais x, y tenkinančias sąlygas

$$f(x, x) = x,$$
$$f(x, y) = f(y, x),$$
$$(x + y)f(x, y) = yf(x, x + y).$$

α.94

◇◇◇

Natūraliųjų skaičių trejetas (a, b, c) vadinamas beveik pitagorišku, jeigu yra toks trikampis, kurio kraštinių ilgiai lygūs a, b ir c, o prieš kraštinę c esantis kampas lygus $120°$. Įrodykite, kad kiekvieno beveik pitagoriško trejeto (a, b, c) trečiasis skaičius c turi didesnį už 5 pirminį daliklį.

α.95

◇◇◇

Raskite visus natūraliuosius lygties $2x^2 + 5y^2 = 11(xy - 11)$ sprendinius (x, y).

α.96

◇◇◇

Daugianario P koeficientai yra sveikieji skaičiai, o skaičius $P(n)$ su kiekvienu $n = 1, 2, 3, \ldots, 1998$ yra triženklis teigiamas skaičius. Įrodykite, kad daugianaris P neturi sveikųjų šaknų.

α.97

◇◇◇

Sakykime, kad a yra nelyginis, o b – lyginis skaitmuo. Įrodykite, kad kiekvienam natūraliajam skaičiui n egzistuoja toks natūralusis skaičius, kuris dalijasi iš 2^n ir kurio dešimtainėje išraiškoje nėra kitokių skaitmenų kaip a ir b.

$\alpha.98$

$\diamond\diamond\diamond$

Tegu P yra šeštojo laipsnio daugianaris, a ir b yra realieji skaičiai, $0 < a < b$. Tarkime, kad $P(a) = P(-a)$, $P(b) = P(-b)$, $P'(0) = 0$. Įrodykite, kad $P(x) = P(-x)$ su visais realiaisiais x.

$\alpha.99$

$\diamond\diamond\diamond$

Tegu $I\!R$ yra visų reliųjų skaičių aibė. Raskite visas funkcijas $f : I\!R \to I\!R$, su visais $x, y \in I\!R$ tenkinančias lygtį $f(x) + f(y) = f(f(x)f(y))$.

$\alpha.100$

$\diamond\diamond\diamond$

Tegu $P_k(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1}$. Įrodykite, kad kiekvienam realiajam skaičiui x ir kiekvienam natūraliajam n teisinga lygybė

$$C_n^1 P_1(x) + C_n^2 P_2(x) + \ldots + C_n^n P_n(x) = 2^{n-1} P_n\left(\frac{1+x}{2}\right).$$

$\alpha.101$

$\diamond\diamond\diamond$

Tegu $0 < \alpha < \beta < \pi/2$, o skaičiai γ ir δ tenkina sąlygas:

a) $0 < \gamma < \pi/2$ ir $\mathrm{tg}\gamma$ yra skaičių $\mathrm{tg}\alpha, \mathrm{tg}\beta$ aritmetinis vidurkis;

b) $0 < \delta < \pi/2$ ir $(\cos\delta)^{-1}$ yra skaičių $(\cos\alpha)^{-1}, (\cos\beta)^{-1}$ aritmetinis vidurkis. Įrodykite, kad $\gamma < \beta$.

$\alpha.102$

$\diamond\diamond\diamond$

Tarkime, kad $n \geq 4$ yra lyginis skaičius. Taisyklingasis n-kampis ir taisyklingasis $(n-1)$-kampis yra įbrėžti į tą patį vienetinio spindulio apskritimą. Kiekvienai n-kampio viršūnei apibrėžkime atstumą iki artimiausios $(n-1)$-kampio viršūnės, matuodami šį atstumą tuos taškus jungiančio apskritimo lanko ilgiu. Pažymėkime S tų n atstumų sumą. Įrodykite, kad S priklauso tik nuo n ir nepriklauso nuo tų dviejų taisyklingųjų daugiakampių tarpusavio padėties.

$\alpha.103$

$\diamond\diamond\diamond$

Tegu a, b, c yra trikampio kraštinių ilgiai, R – apibrėžto apskritimo spindulys. Įrodykite, kad

$$R \geq \frac{a^2 + b^2}{2\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}.$$

$\bullet\bullet\bullet\ \alpha + \omega\ \bullet\bullet\bullet$

Kada galioja lygybė?

α.104

◇◇◇

Trikampio ABC kampas $\angle BAC$ yra status. Taškas D yra kraštinėje BC ir tenkina lygybę $\angle BDA = 2\angle BAD$. Įrodykite, kad

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{BD} + \frac{1}{CD}\Big).$$

α.105

◇◇◇

Iškilojo penkiakampio $ABCDE$ kraštinės AE ir BC yra lygiagrečios, o $\angle ADE = \angle BDC$. Įstrižainės susikerta taške P. Įrodykite, kad $\angle EAD = \angle BDP$ ir $\angle CBD = \angle ADP$.

α.106

◇◇◇

Trikampio ABC kraštinė $AB < AC$. Tiesė, einanti per tašką B ir lygiagreti su kraštine AC, kerta kampo $\angle BAC$ priekampio pusiaukampinę taške D. Tiesė, einanti per tašką C ir lygiagreti su kraštine AB, kerta tą pusiaukampinę taške E. Taškas F yra kraštinėje AC ir tenkina lygybę $FC = AB$. Įrodykite, kad $DF = FE$.

α.107

◇◇◇

Duotas smailusis trikampis ABC. Taškas D yra aukštinės, išvestos iš viršūnės A į kraštinę BC, pagrindas. Taškas E priklauso atkarpai AD ir tenkina lygybę

$$\frac{AE}{ED} = \frac{CD}{DB}.$$

Statmuo, išvestas iš taško D į atkarpą BE, kerta ją taške F. Įrodykite, kad $\angle AFC = 90°$.

α.108

◇◇◇

Ar galima ant 13×13 šachmatų lentos padėti keturiasdešimt du stačiakampius 4×1 taip, kad liktų neuždengtas tik centrinis langelis? (Sakome, kad kiekvienas stačiakampis uždengia lygiai keturis lentos langelius).

α.109

◇◇◇

n ir k yra natūralieji skaičiai. Imame nk vienodų daiktų ir k dėžių, kurių kiekvienoje telpa n daiktų. Kiekvienas daiktas nudažomas kuria nors viena iš

k skirtingų spalvų. Įrodykite, kad daiktus galima sudėlioti į dėžes taip, kad kiekvienoje dėžėje būtų daiktai, nudažyti daugiausia dviem spalvomis.

α.110

◇ ◇ ◇

Raskite visus natūraliuosius n, kuriems egzistuoja aibė S, tenkinanti sąlygas:
(i) S yra sudaryta iš natūraliųjų skaičių, mažesnių už 2^{n-1};
(ii) bet kuriems dviem skirtingiems S poaibiams A ir B poaibio A elementų suma yra nelygi poaibio B elementų sumai.

α.111

◇ ◇ ◇

Įvyko teniso varžybos tarp dviejų komandų. Kiekvienoje komandoje yra po 1000 žaidėjų. Kiekvienas žaidėjas sužaidė su kiekvienu kitos komandos žaidėju lygiai po vieną kartą (tenise nebūna lygiųjų). Įrodykite, kad egzistuoja dešimt tokių vienos komandos žaidėjų, iš kurių mažiausiai vienam savo partiją pralaimėjo kiekvienas kitos komandos narys.

α.112

◇ ◇ ◇

Sakysime, kad natūralusis skaičius m *dengia* skaičių 1998, jeigu skaitmenys $1, 9, 9, 8$ nurodyta tvarka yra tarp skaičiaus m skaitmenų. Pavyzdžiui, skaičius 215993698 dengia skaičių 1998, o skaičius 213326798 – nedengia. Kiekvienam natūraliajam skaičiui n ($n \geq 5$) simboliu $k(n)$ pažymėkime skaičių n-ženklių skaičių, dengiančių skaičių 1998 ir neturinčių skaitmens 0. Kokią liekaną gausime dalydami $k(n)$ iš 8 ?

Skyrelį tvarko **Giedrius Alkauskas**

Šio skyrelio uždavinių sąlygos labai paprastos. Jeigu skaitytojui pavyktų išspręsti bent vieną iš jų – tarptautinę šlovę garantuojame.

ω.30

◇ ◇ ◇

Natūraliesiems skaičiams n apibrėžkime

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1, & \text{jei } n \text{ – nelyginis,} \\ n/2, & \text{jei } n \text{ – lyginis.} \end{cases}$$

Ar tiesa, kad kiekvienam natūraliajam n_0 sekoje

$$n_0, n_1 = f(n_0), \ldots, n_m = f(n_{m-1}) \ldots$$

pasitaikys vienetas? (Jeigu $n_m = 1$, tai po šio nario einantys skaičiai yra $4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$, taigi sekos elgesys tampa nebeįdomus. Skaičiavimais patikrinta, kad hipotezė teisinga su visais $n_0 \leq 700000000$.)

Uždavinys atsirado apie 1930 metus. Jis vadinamas daugeliu vardų – priklausomai nuo to, koks matematikas ir kur jį populiarino. Daugelis jį žino kaip Kakutani problemą. S. Kakutani šiuo uždaviniu kolegas amerikiečių matematikus sudomino apie 1960 metus. Jis prisimena: „Visi Jeilio universitete užsiiminėjo šiuo uždaviniu ištisą mėnesį, bet be jokių rezultatų. Kai suformulavau jį Čikagos universitete, panašūs dalykai vyko ir ten. Buvo juokaujama, kad šis uždavinys tai sąmokslo, kurio tikslas – sulėtinti matematinius tyrimus JAV, dalis.“

ω.31

◇ ◇ ◇

Tegu C – mati plokštumos sritis, turinti savybę: bet kokiai vienetinio ilgio plokštumos kreivei γ, atitinkamai pasukus ir pastūmus C, ši sritis uždengs γ. Kam lygus tokių sričių plotų minimumas? Akivaizdu, kad reikiamą savybę turi pusė vienetinio skritulio, taigi minimumas ne didesnis už $\pi/2$.

ω.32

◇ ◇ ◇

Kvadratinę servetėlę galima kaip norima lankstyti ir gauti įvairias plokščias figūras. Ar šitaip gaunamų figūrų perimetras gali pasidaryti didesnis už kvadratinės servetėlės perimetrą?

••• $\alpha + \omega$ •••

Sprendimai

Visus sprendimus pateikė **Giedrius Alkauskas**.

$\alpha.75$

◇ ◇ ◇

Tegu X yra n elementų aibė. Įrodykite, kad skaičius porų (A, B), kur $A \subset B \subset X$, $A \neq B$, lygus $3^n - 2^n$.

Sprendimas. Jei $B \subset X$ ir B sudarytas iš k elementų, tai B turi lygiai $2^k - 1$ tikrinių elementų A. Tada pasinaudoję Niutono binomu gauname, kad ieškomas skaičius lygus

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(2^k - 1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 3^n - 2^n.$$

$\alpha.77$

◇ ◇ ◇

Tegu n yra natūralusis skaičius. Raskite didžiausiąjį natūralųjį skaičių p, turintį tokią savybę: jei X yra n, o C – p elementų turinti aibė, tai bet kokiai funkcijai $f : \mathcal{P}(X) \to C$ (čia $\mathcal{P}(X)$ yra visų X poaibių aibė) atsiras du skirtingi poaibiai $A, B \in \mathcal{P}(X)$, kad

$$f(A) = f(B) = f(A \cup B).$$

Sprendimas. Tegu $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, čia a_k – visi skirtingi elementai. Tegu aibėje C yra p skirtingų elementų, o $f : \mathcal{P}(X) \to C$. Kadangi ši funkcija aibėms

$$\emptyset,\ \{a_1\},\ \{a_1, a_2\},\ \ldots,\ \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

negali priskirti daugiau kaip n skirtingų reikšmių, tai atsiras bent dvi aibės iš šio sąrašo, tarkime, $A \subset B, A \cup B = B$, kad $f(A) = f(B) = f(A \cup B)$. Parodysime, kad su $p > n$ uždavinio sąlyga jau nėra tenkinama. Iš tikrųjų, tegu baigtinė aibė C turi bent $n + 1$ elementą; pakeiskime juos skirtingais iš eilės einančiais natūraliaisiais skaičiais. Tada $\{0, 1, \ldots, n\} \subset C$. Žymėdami $|D|$ baigtinės aibės B elementų skaičių, nagrinėkime funkciją $f : \mathcal{P}(X) \to C$, $f(D) = |D|$. Aišku, kad ši funkcija negali tenkinti uždavinio sąlygos, nes iš $f(A) = f(B) = f(A \cup B)$ išplaukia $A = B$. Todėl atsakymas į uždavinio klausimą yra $p = n$.

● ● ● $\alpha + \omega$ ● ● ●

$\alpha.78$

◇ ◇ ◇

Natūralieji skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_n, n \geq 4$, tenkina sąlygą $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 2x_1$. Tegu $R = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$. Tegu pirminio skaičiaus p natūralusis laipsnis p^k dalija R. Įrodykite, kad

$$\frac{R}{p^k} > n!.$$

Sprendimas. Tegu $x_i = p^{\alpha_i} r_i$, kur skaičiai r_i nesidalija iš p, $\alpha_i \geq 0$. Tada visi skaičiai r_i yra skirtingi. Iš tikrųjų, jei būtų $r_i = r_j$, tai iš nelygybių $x_i < x_j < 2x_1 < 2x_i$ gautume prieštarą: $p^{\alpha_i} r_i < p^{\alpha_j} r_j < 2p^{\alpha_i} r_i$ arba $1 < p^{\alpha_j - \alpha_i} < 2$. Kadangi visi natūralieji skaičiai r_i skirtingi, tai

$$\frac{R}{p^k} \geq r_1 r_2 \cdot \ldots \cdot r_n \geq n!.$$

Paliekame skaitytojui pačiam įsitikinti, kad lygybė negalima (pasinaudokite sąlyga $n \geq 4$).

$\alpha.79$

◇ ◇ ◇

Tegu a, b, c yra sveikieji skaičiai, ne visi lygūs nuliui. Tarkime, lygtis

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

turi nenulinį sprendinį x, y, z sveikaisiais skaičiais. Įrodykite, kad tada lygtis

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

turi sprendinį racionaliaisiais skaičiais.

Sprendimas. Imkime sveikąjį lygties sprendinį x, y, z ir pasirinkime racionaliuosius skaičius $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, kad

$$ax\gamma_1 + by\gamma_2 + cz\gamma_3 \neq 0, \quad 1 - a\gamma_1^2 - b\gamma_2^2 - c\gamma_3^2 \neq 0.$$

Toks pasirinkimas galimas, nes ne visi skaičiai x, y, z lygūs nuliui. Jeigu

$$t = \frac{2ax\gamma_1 + 2by\gamma_2 + 2cz\gamma_3}{1 - a\gamma_1^2 - b\gamma_2^2 - c\gamma_3^2},$$

tai $t \neq 0$, ir galima tiesiogiai įsitikinti, kad

$$a\Big(\frac{x}{t} + \gamma_1\Big)^2 + b\Big(\frac{y}{t} + \gamma_2\Big)^2 + c\Big(\frac{z}{t} + \gamma_3\Big)^2 = 1.$$

●●● $\alpha + \omega$ ●●●

$\alpha.81$

◇ ◇ ◇

Raskite visus trejetus x, y, p (x, y yra natūralieji skaičiai, p – pirminis skaičius), tenkinančius lygybę $p^x - y^3 = 1$.

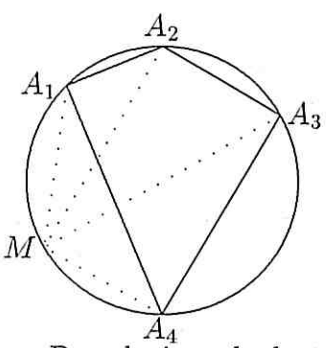
Sprendimas. Pertvarkę lygybę $p^x = 1 + y^3 = (y+1)(y^2 - y + 1)$ ir atsižvelgę į tai, kad p yra pirminis, gauname, kad su natūraliaisiais skaičiais $s, t, s + t = x$, turi būti teisingos lygybės $y + 1 = p^s$ ir $y^2 - y + 1 = p^t$. Įstatę $y = p^s - 1$ į antrąją išraišką, gausime $p^t = p^{2s} - 3p^s + 3$. Matome, kad vienintelė galima p reikšmė yra 3, taigi $p = 3$. Nesunkiai įsitikiname, kad $t = 1$. Dabar $y^2 - y + 1 = 3$ ir $y = 2, s = 1$. Todėl vienintelis sprendinys sveikais skaičiais yra toks: $x = 2$, $y = 2$, $p = 3$.

$\alpha.82$

◇ ◇ ◇

Tegu $A_1A_2A_3A_4$ yra į apskritimą C įbrėžtas keturkampis. Įrodykite, kad egzistuoja apskritimo C taškas M, kad

$$MA_1 - MA_2 + MA_3 - MA_4 = 0.$$



Sprendimas. Nors uždavinys ir nesunkus, vis dėlto reikia pasinaudoti tokia analizės teorema: *jei tolydi funkcija* $f : [A, B] \to I\!R$ *tenkina sąlygą* $f(A)f(B) < 0$, *tai egzistuoja taškas* $C \in [A, B]$, *kad* $f(C) = 0$.

Bet kuriam apskritimo taškui M apibrėžkime $f(M) = MA_1 - MA_2 + MA_3 - MA_4$. Galime „ištiesinti" apskritimą ir interpretuoti f kaip tolydžią funkciją, apibrėžtą intervale.

Parodysime, kad atsiras bent vienas taškas, kuriam f priskiria neigiamą reikšmę, ir bent vienas taškas, kuriam priskiriama reikšmė yra teigiama. Tada pritaikę minėtą teoremą gautume, kad kuriame nors taške funkcija įgyja nulinę reikšmę. Teiginys būtų įrodytas.

Tegu P – keturkampio perimetras. Iš dviejų trikampių nelygybių gauname $P > 2A_1A_3$. Jeigu būtų $f(A_1) \geq 0$ ir $f(A_3) \geq 0$, tai sudėję gautume $P \leq 2A_1A_3$. Taigi bent vienam iš taškų A_1, A_3 funkcija priskiria neigiamą reikšmę. Analogiškai viename iš taškų A_2, A_4 funkcijos reikšmė teigiama.

$\alpha.83$

◇◇◇

Įrodykite, kad natūraliųjų skaičių aibę galima padalyti į du nesikertančius poaibius A ir B, kad su visais $k, l = 0, 1, 2, \ldots$ ir visais $a_1, a_2 \in A$ $(a_1 \neq a_2)$, $b_1, b_2 \in B$ $(b_1 \neq b_2)$ būtų teisinga

$$a_1 + a_2 \neq 2^k + 2, \quad b_1 + b_2 \neq 2^l + 2.$$

Įrodykite, kad toks padalijimas yra vienintelis.

Sprendimas. Tarkime, kad reikiamas padalijimas egzistuoja. Iš kiekvieno aibių A, B elemento atėmę po 1 gautume, kad visus sveikuosius neneigiamus skaičius galima padalyti į du poaibius A ir B, kad su visais $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, ir $b_1, b_2 \in B$, $b_1 \neq b_2$, būtų teisinga $a_1 + a_2 \neq 2^k, b_1 + b_2 \neq 2^l$ su visais $k, l = 0, 1, 2, \ldots$ Kita vertus, jeigu toks neneigiamų sveikųjų skaičių aibės padalijimas egzistuoja ir yra vienintelis, tai egzistuoja vienintelis ir natūraliųjų skaičių aibės padalijimas, tenkinantis uždavinio sąlygas. Taigi galime tirti neneigiamųjų sveikųjų skaičių aibės padalijimo egzistavimą.

Bet kokį natūralųjį skaičių galima užrašyti vienu iš dviejų pavidalų:

$$1) \quad 2^a(4q + 1), \quad \text{arba} \quad 2) \quad 2^a(4q + 3),$$

čia $a, q \geq 0$ yra sveikieji skaičiai. Sudarykime poaibį A iš pirmosios rūšies, poaibį B – iš antrosios rūšies skaičių ir nulio. Nesunku įsitikinti, kad sudarėme neneigiamųjų sveikųjų skaičių padalijimą su reikalingomis savybėmis. Įrodykime, pavyzdžiui, kad jokių dviejų A skirtingų elementų suma nelygi 2^k. Jeigu būtų $2^a(4q + 1) + 2^b(4r + 1) = 2^k$, tai būtinai turėtų būti $a = b$, nes priešingu atveju kairioji lygybės pusė dalytųsi iš nelyginio skaičiaus. Tačiau iš lygybės $2^k = 2^a(4(q + r) + 2)$ išplaukia $q + r = 0, q = r = 0$ ir abu dėmenys sutampa.

Matematinės indukcijos būdu įrodysime, kad egzistuoja vienintelis padalijimas su reikalingomis savybėmis, kad $0 \in A$. Iškart matome, kad vienetas turi būti aibėje B. Tarkime, yra vienintelis būdas skaičius $0, 1, \ldots, N-1$ paskirstyti poaibiams A, B, kad padalijimas turėtų reikalingas savybes. Įrodysime, kad skaičiaus N vieta irgi vieninteliu būdu apibrėžta. Iš tikrųjų, jei $N = 2^k$, čia k – natūralusis skaičius, tai 0 ir N turi būti skirtingose aibėse, taigi $N \in B$. Jei $2^k < N < 2^{k+1}$, tai skaičiai N ir $2^{k+1} - N$ turi būti skirtingose aibėse. Kadangi $2^{k+1} - N \leq N - 1$, tai skaičius N gali priklausyti tik vienai iš aibių A, B. Vienatinumas įrodytas.