# Alfa + omega seminaras

Mūsų seminaro svečias – Kijevo Taraso Ševčenkos universiteto matematikos dėstytojas Vadimas Radčenko.

Vadim Radčenko

# Kombinatorikos sąryšių olimpiadiniuose uždaviniuose įrodymo metodai

Vienas iš universalių būdų įrodyti, kad dviejose aibėse yra po vienodą skaičių elementų, – sukonstruoti abipusiškai vienareikšmę atitiktį. Toks metodas kartais leidžia surasti trumpą ir grakštų nelengvo uždavinio sprendimą, o pats uždavinys tampa olimpiados puošmena.

**1 uždavinys** *(Ukrainos olimpiada, 1996 m.). Įrodyti, kad kiekvienam $n$ $2n$-ženklių skaičių, kurių dešimtainėje išraiškoje yra po $n$ skaitmenų 1 ir 2, kiekis lygus $n$-ženklių skaičių, dešimtainėje sistemoje užrašomų skaitmenimis 1, 2, 3, 4, kiekiui, jeigu išraiškoje pasitaiko nebūtinai visi skaitmenys, tačiau 1 ir 2 pasitaiko po vienodą skaičių kartų.*

**Sprendimas.** Kiekvienam $2n$-ženkliam skaičiui $\overline{a_1a_2\ldots a_{2n}}$ priskirsime $n$-ženklį skaičių $\overline{b_1b_2\ldots b_n}$ pagal tokią taisyklę: poras $\overline{a_{2k-1}a_{2k}}$ keisime skaitmenimis $b_k$, $1 \le k \le n$, kad 11 atitiktų skaitmuo 1, 22 – 2, 21 – 3, 12 – 4. Parodysime, kad šitaip apibrėžiama abipusiškai vienareikšmė dviejų uždavinio aibių atitiktis.

Kadangi $2n$-ženkliuose skaičiuose vienetų yra tiek, kiek dvejetų, tai porų $\overline{a_{2k-1}a_{2k}} = 11$ skaičius lygus porų $\overline{a_{2k-1}a_{2k}} = 22$ skaičiui. Todėl pagal apibrėžtą taisyklę sudarytame $n$-ženkliame skaičiuje vienetų ir dvejetų bus vienodai. Taigi apibrėžta atitiktis tikrai yra dviejų uždavinio aibių atitiktis.

Skirtingus $2n$-ženklius skaičius atitinka skirtingi $n$-ženkliai skaičiai, nes pakeitę bent vieną skaitmenį $a_i$ gautaume kitą atitinkamą skaitmenį $b_k$.

••• $\alpha+\omega$ •••

Lieka pastebėti, kad visi $n$-ženkliai skaičiai atitinka kokius nors $2n$-ženklius skaičius. Juk pagal apibrėžtą taisyklę pagal $n$-ženklį skaičių su vienodu vienetų ir dvejetų kiekiu lengvai galima atkurti $2n$-ženklį skaičių, turintį po vienodai vienetų ir dvejetų. Kadangi nustatyta abiejų aibių abipusiškai vienareikšmė atitiktis, šios aibės turi po vienodą elementų kiekį. Uždavinio teiginys įrodytas.

Pastebėsime, kad abipusiškai vienareikšmei atitikčiai nustatyti buvo svarbios visos mūsų samprotavimo grandys:

- atitikties taisyklės, apibrėžtos visiems pirmosios aibės elementams, apibrėžimas;
- įrodymas, kad pagal mūsų taisyklę visada apibrėžiamas elementas iš antrosios mums reikalingos aibės;
- nustatymas, kad skirtingus pirmosios aibės elementus visada atitinka skirtingi antrosios aibės elementai;
- įrodymas, kad gauname visus mums reikalingos aibės elementus.

Nebūtina visuomet išsamiai dėstyti visų samprotavimų, bet svarbu atsiminti, kad abipusiškai vienareikšmė atitiktis turi turėti visas išvardytas savybes.

Kitame uždavinyje panašiu metodu nustatysime, kad vienos aibės elementų skaičius lygus dviejų kitų aibių elementų kiekių sumai.

**2 uždavinys** *(Ukrainos olimpiada, 1988 m.). Simboliu $p_n^{(k)}$ pažymėkime natūraliojo skaičiaus $n$ dėstinių $k$ natūraliųjų dėmenų suma kiekį, čia $n \geq k$. Dėstinius, besiskiriančius tik dėmenų tvarka, laikome vienodais. Pavyzdžiui, $p_4^{(2)} = 2$, kadangi $4 = 1 + 3$ ir $4 = 2 + 2$. Įrodykite, kad skaičiams $n \geq 2k$, $k \geq 2$, teisingas sąryšis*

$$p_n^{(k)} = p_{n-1}^{(k-1)} + p_{n-k}^{(k)}.$$

**Sprendimas.** Visus $n$ dėstinius $k$ dėmenų suma (iš viso jų yra $p_n^{(k)}$ ) suskirstysime į dvi grupes – tuos, kurių bent vienas dėmuo lygus vienetui, ir tuos, kurių visi dėmenys ne mažesni už 2. Tada pirmos grupės skirstinių skaičius lygus $p_{n-1}^{(k-1)}$, antros – $p_{n-k}^{(k)}$.

Iš tikrųjų, jei iš pirmos grupės dėstinio išbrauksime vieną vienetą (jis ten būtinai yra), tai liks $k-1$ dėmenų, kurių suma lygi $n-1$, taigi gausime vieną iš $p_{n-1}^{(k-1)}$ dėstinių. Kita vertus, pasirinkę bet kurį skaičiaus $n-1$ dėstinį $k-1$ dėmens suma ir pridėję vienetą, gausime pirmos grupės dėstinį.

Jeigu pasirinksime bet kurį antrosios grupės dėstinį ir kiekvieną iš $k$ dėmenų sumažinsime vienetu (tą galima padaryti, nes dėmenys ne mažesni už 2), tai gausime skaičiaus $n-k$ dėstinį $k$ dėmenų suma. Atvirkštiniu veiksmu iš bet kurio $n-k$ dėstinio $k$ dėmenų suma galime gauti antros grupės dėstinį.

Kadangi abi grupės neturi bendrų elementų, visą dėstinių skaičių gausime sudėdami šių grupių dėstinių kiekius. Iš čia gauname uždavinio lygybę.

**3 uždavinys**[1] *(Čekoslovakijos olimpiada, 1989 m.). $2 \times n$ dydžio stačiakampis padalytas $1 \times 1$ dydžio kvadratais. Pasirinktus kvadratus galima nuspalvinti. Spalvinimų, kuriuose nėra nė vieno ištisai nuspalvinto $2 \times 2$ kvadrato, skaičių pažymėkime $p_n$ (spalvinimai laikomi skirtingais, jei jie skiriasi bent vieno kvadrato spalva). Įrodyti, kad visiems $n \geq 2$ teisinga lygybė*

$$p_n = 3p_{n-1} + 3p_{n-2}.$$

**4 uždavinys** *(Tarptautinė olimpiada, 1979 m.). Tegu $A$ ir $B$ yra dvi priešingos taisyklingo aštuonkampio viršūnės. Viršūnėje $A$ yra kengūra. Iš bet kurios viršūnės, išskyrus $E$, kengūra gali peršokti į bet kurią iš gretimų viršūnių. Patekusi į $E$ viršūnę, kengūra joje ir pasilieka. Tegu $e_n$ – būdų $n$ žingsniais patekti iš $A$ į $E$ skaičius (būdai laikomi skirtingais, jeigu po kurio nors šuolio kengūra patenka į skirtingas viršūnes). Įrodyti, kad*

$$e_{2n-1} = 0, \ e_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}\Big), \ n \geq 1.$$

**Sprendimas.** Iš pradžių įrodysime, kad $e_{2n-1} = 0$, t. y. iš $A$ į $E$ nelyginiu skaičiumi šuolių patekti neįmanoma. Kas antrą aštuonkampio viršūnę nudažysime geltonai, o likusias – mėlynai. Tada viršūnės $A$ ir $E$ bus nuspalvintos vienodai. Kiekvienu šuoliu kengūra peršoka į kitos spalvos viršūnę. Norint patekti iš $A$ į $E$, jai reikia lyginį skaičių kartų keisti viršūnės spalvą, tai įmanoma tik atlikus lyginį skaičių šuolių.

Imkime aštuonkampio viršūnę $C$, esančią lygiai per vidurį tarp $A$ ir $B$ (yra dvi tokios viršūnės, pasirinkime bet kurią iš jų). Pažymėkime $a_n, c_n$ būdų patekti iš $A$ į viršūnes $A, C$ $2n$ žingsniais skaičius (žinoma, tada $c_n$ lygus būdų patekti iš $C$ į $A$ skaičiui). Tada teisingos lygybės

$$a_{n+1} = 2a_n + 2c_n, \quad c_{n+1} = a_n + 2c_n, \quad n \geq 1.$$

Įrodykime pirmąją lygybę. Pereidama iš $A$ į $A$ $2(n+1)$ žingsniais, po dviejų žingsnių kengūra gali būti grįžusi į $A$ (tai gali įvykti dviem būdais), o po to pereiti iš $A$ į $A$ $2n$ žingsniais (tai gali įvykti $a_n$ būdų). Tačiau pirmuosius du žingsnius kengūra gali žengti į vieną pusę (tam yra du būdai), patekti į viršūnę $C$ arba jai priešingą, o likusiais $2n$ žingsnių grįžti į $A$ (tam yra $c_n$ būdai). Pasinaudoję kombinatorikos sudėties ir daugybos taisyklėmis, gauname pirmąją lygybę.

Analogiškai įrodoma ir antroji lygybė (padarykite tai savarankiškai).

Pastebėkime, kad pradinis dydis tenkina lygybę $e_{2n} = 2c_{n-1}$. Juk norėdami patekti $2n$ žingsniais iš $A$ į $E$, turime $2(n-1)$ žingsniais atvykti į vieną

[1] Šį ir keletą kitų uždavinių skaitytojui siūloma išspręsti patiam. Straipsnio pabaigoje pateikiami nurodymai.

iš lygiai viduryje tarp $A, E$ esančių viršūnių (tam yra $2c_{n-1}$ būdų), o likusieji du žingsniai apibrėžti vienareikšmiškai.

Taip pat turime $a_1 = 2, c_1 = 1$. Iš čia ir iš gautų lygybių iškart rasime, kad $c_2 = 4$ (tuo galima įsitikinti ir tiesiogiai).

Kai $n \geq 2$, gauname

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_n + 2c_n = (2a_{n-1} + 2c_{n-1}) + 2c_n \\ &= 2(a_{n-1} + 2c_{n-1}) - 2c_{n-1} + 2c_n = 2c_n - 2c_{n-1} + 2c_n = 4c_n - 2c_{n-1}. \end{aligned}$$

Atsižvelgę į lygybę $e_{2n} = 2c_{n-1}$, gausime

$$e_4 = 2, \quad e_6 = 8, \quad e_{2(n+1)} = 4e_{2n} - 2e_{2(n-1)}, \quad n \geq 3. \tag{1}$$

Šiais sąryšiais ir akivaizdžia lygybe $e_2 = 0$ visiškai apibrėžiama seka $e_{2n}$, $n \geq 1$. Lieka įsitikinti, kad ir uždavinio sąlygos seka tenkina tuos pačius sąryšius (praleisime šiuos nesudėtingus, bet ilgokus skaičiavimus). Todėl ieškomas būdų skaičius ir sąlygos dydis sutampa.

Sąryšiai, analogiški (1) ir vienareikšmiškai apibrėžiantys kiekvieno sekos nario reikšmę, vadinami rekurenčiaisiais. Mums uždavinio sąlygoje buvo nurodyta sekos narių išraiška, kurią pakako įstatyti į įrodytą lygybę. Gali kilti klausimas, kaip surasta tokia griozdiška išraiška.

Išties ši formulė nebuvo tiesiog įspėta. Egzistuoja metodas, kuriuo dažniausiai galima rasti sekos, apibrėžtos rekurenčiaisiais sąryšiais, narių bendrąją formulę. [1] Naudojantis šiuo metodu, galima, pavyzdžiui, užrašyti bendrąją 3 uždavinio sekos $p_n$ nario formulę.

**5 uždavinys.** *Taisyklingojo trikampio viršūnėje $A$ tupi varlė. Iš bet kurios viršūnės ji gali peršokti į bet kurią kitą. Tegu $a_n$ – $n$ žingsnių ilgio skirtingų pasivaikščiojimų iš $A$ į $A$ skaičius (pasivaikščiojimai laikomi skirtingais pagal 4 uždavinio taisyklę). Įrodyti, kad*

$$a_n = \frac{2}{3}(2^{n-1} + (-1)^n), \quad n \geq 1.$$

Iš kito uždavinio matome, kad nustačius atitiktį galima įrodyti ne tik lygybes, bet ir nelygybes.

**6 uždavinys** (*Soroso olimpiada Ukrainoje, 1997 m.*). *Natūraliųjų skaičių penkių skirtingų elementų, kurių suma neviršija 100, poaibių skaičių pažymėkime $A$, o natūraliųjų skaičių dešimties skirtingų elementų, kurių suma neviršija 150, poaibių skaičių pažymėkime $B$. Įrodykite, kad $B/A > 2$.*

**Sprendimas.** Kiekvienai penkių elementų aibei

$$\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\} \tag{2}$$

[1] Metodas išsamiai išdėstytas knygelėje *Markuševič A. I., Rekurenčiosios sekos, Maskva: Nauka, 1975, 48.* (Rusų kalba).

priskirsime dvi iš dešimties elementų sudarytas aibes

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ a_1+6,\ a_2+6,\ a_3+6,\ a_4+6,\ a_5+6\},$$
$$\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ a_1+6,\ a_2+6,\ a_3+6,\ a_4+6,\ a_5+6\}.$$

Nesunku įsitikinti, kad elementų $a_i$ suma neviršija 100, o dešimties elementų atitinkamose aibėse suma neviršija 150. Be to, iš skirtingų (2) aibių gaunamos skirtingos dešimties elementų aibės. Taigi $B/A \geq 2$.

Kadangi dešimties elementų aibė $\{3, 4, \ldots, 12\}$ mūsų atitiktyje nepasirodo, tai galioja griežta nelygybė $B/A > 2$.

**7 uždavinys** *(Tarptautinė olimpiada, 1998 m.). Varžybose dalyvavo $a$ dalyvių, kuriuos vertino $b$ teisėjų, $b$ – nelyginis, ne mažesnis už 3 skaičius. Kiekvienas teisėjas kiekvieną dalyvį vertino „patenkinamai“ arba „nepatenkinamai“. Tegu skaičius $k$ yra toks, kad bet kuriems dviem teisėjams atsiras ne daugiau kaip $k$ dalyvių, kuriuos abu teisėjai įvertino vienodai. Įrodykite, kad*

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

## Nurodymai

**3 uždavinys.** Pirmasis dešiniosios pusės dėmuo atitinka tris paskutinio stulpelio spalvinimo būdus su sąlyga, kad jame lieka bent vienas nenuspalvintas langelis. Antrąjį dėmenį gauname abiem paskutinio stulpelio nuspalvintiems langeliams, tada priešpaskutinis stulpelis nuspalvintas vienu iš trijų būdų, kai lieka nenuspalvintų langelių.

**5 uždavinys.** Fiksuokime kurią nors viršūnę $B \neq A$. Būdų $n$ žingsniais patekti iš $A$ į $B$ kiekį pažymėkime $b_n$. Tada $a_{n+1} = 2b_n$, $b_{n+1} = a_n + b_n$, todėl $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$.

**7 uždavinys.** Dviem būdais įvertinsime vieną dydį – kiek teisėjų porų vienodai įvertino tą patį dalyvį. Iš sąlygos išplaukia, kad šis dydis neviršija $kC_b^2$. Kita vertus, sutampančių $i$-ojo dalyvio $(1 \leq i \leq a)$ vertinimų skaičius lygus

$$C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2 \geq \frac{1}{4}\big((b-1)^2 - 1\big);$$

čia $x_i$ – teisėjų, įvertinusių dalyvį patenkinamai, skaičius, $y_i$ – nepatenkinamai. Lygindami rastus dydžius ir atsižvelgdami, kad $b$ nelyginis, įrodysime uždavinio teiginį.

Vadim Radčenko

# Matematinės olimpiados Ukrainoje: laimėjimai ir problemos

Moksleivių matematinės olimpiados organizavimas Ukrainoje praktiškai liko toks pat, koks buvo tuomet, kai šalis buvo Tarybų Sąjungos respublika. Varžybos, kurios anksčiau vadinosi respublikine olimpiada (arba IV visasąjunginės olimpiados etapu), buvo paprasčiausiai pervadintos Ukrainos olimpiada, o geriausi jos dalyviai siunčiami ne į visasąjunginę olimpiadą, bet į Ukrainos komandos rengimo tarptautinei olimpiadai stovyklą. Olimpiados organizavimu rūpinasi Švietimo ministerija, olimpiados gauna pakankamą paramą iš biudžeto. Valstybė visada apmoka Ukrainos komandos dalyvavimo tarptautinėse olimpiadose išlaidas.

Tai daroma nepaisant ekonominių sunkumų, kuriuos dabar išgyvena šalis. Pavyzdžiui, vidutinis darbo užmokestis Ukrainoje pagal oficialius duomenis lygus maždaug 80 dolerių, tačiau ir jis dažnai išmokamas labai pavėluotai arba ne visas (o kainos mažai skiriasi nuo lietuviškų). Taigi oficialių struktūrų požiūris į darbą su gabiais moksleiviais vadintinas visiškai palankiu.

Pastaraisiais metais Ukrainos vyksta tam tikras vidurinioјo mokslo sluoksniavimasis. Įsteigta daug specializuotų mokyklų, licėjų, gimnazijų, atskirų klasių ir dauguma iš jų yra mokamos. Jos pritraukia geriausius mokytojus, jose dažnai uždarbiauja aukštųjų mokyklų dėstytojai. O įprastinių mokyklų lygis nėra aukštas.

Turėti gerą išsilavinimą – svarbus ir prestižinis dalykas. Paprastai tėvai iš visų jėgų siekia atiduoti savo vaiką į gerą mokyklą, aukodami tam tikslui toli gražu ne menkus šeimos biudžeto pinigus (už mokslą specializuotos mokyklos matematinėje klasėje paprastai tenka mokėti maždaug 20 dolerių per mėnesį, ekonominėje klasėje – daugiau, yra ir labai brangių mokyklų).

Kita vertus, mokyklos kovoja dėl savo autoriteto. Viena iš reklamos rūšių – moksleivių laimėjimai matematinėse olimpiadose. Todėl daugelis mokyklų ieško dėstytojų, sugebančių rengti moksleivius olimpiadoms, įvairiais būdais (taip pat ir mažindami mokestį už mokslą) skatina moksleivius – olimpiadų nugalėtojus.

Didelę skatinamąją reikšmę turi Soroso fondo veikla Ukrainoje. Be kitų jo programų, jau treti metai rengiamas konkursas „Soroso mokytojai“. Tiksliųjų mokslų dėstytojai, kuriuos pagal jų pedagoginius laimėjimus atrinko fondas, gaudavo po 2400 dolerių grantus. Vienas iš svarbiausių mokytojo veiklos rodiklių buvo jo mokinių rezultatai olimpiadose. Be abejonės, toks konkursas skatino gabius mokytojus dirbti su talentingais vaikais. Taip pat kasmet rengiamas konkursas „Soroso studentai", kurio nugalėtojams įteikiami nemaži piniginiai prizai. Žemesniųjų kursų studentams praktiškai vienintelė galimybė gauti tokį grantą – būti tarp Ukrainos (dar geriau – tarptautinės) olimpiados nugalėtojų. Taigi ir moksleiviai, dalyvaujantys olimpiadose, turi rimtą materialinį stimulą.

Žinoma, visiems svarbūs ne tik materialiniai bet ir psichologiniai faktoriai – kiekvienam malonu tapti nugalėtoju. Šiuo požiūriu Ukrainos matematinės olimpiados yra sąžiningos varžybos, leidžiančios visiškai atsiskleisti kiekvienam moksleiviui (o per jį – mokytojui). Deja, ne visose mūsų gyvenimo srityse nugalėtojais tampa talentingiausieji, laimintys konkursus savo žinių dėka. Moksleiviai ir mokytojai mato matematinių olimpiadų objektyvumą ir gilina matematines žinias, o ne ieško kitų būdų laimėti olimpiadoje diplomą.

Tokios moksleivių matematinių varžybų rengimo sąlygos leidžia Ukrainai pasiųsti į tarptautinę matematikos olimpiadą (TMO) gana gerą komandą. Tačiau šie faktoriai pasireiškė ne iš karto nuo 1993 metų (pirmųjų mūsų komandos dalyvavimo TMO metų), o po tam tikro laikotarpio. Neoficialioje TMO įskaitoje 1993–1996 metais Ukrainos komanda užimdavo maždaug dvidešimtąją vietą, o 1997 metais – šeštąją, 1998 metais – aštuntąją. Vertinti mūsų laimėjimus galima ir lyginant su Rusijos rezultatais (ne tik moksleivių olimpiadose) – šalys turi panašią švietimo struktūrą, panašias ekonomines problemas, tačiau Rusijos matematinės (taip pat ir olimpiadinės) tradicijos turtingesnės, o gyventojų tris kartus daugiau. Pastaraisiais metais mūsų komanda tik truputį atsilikdavo – Rusija 1997 metais dalijosi ketvirtąja penktąja vietomis, o 1998 metais užėmė šeštąją vietą. Tokį nedidelį skirtumą laikau mūsų santykiniu laimėjimu.

Žinoma, Ukrainoje irgi yra olimpinio judėjimo tradicijos, atsiradusios dar tarybiniu laikotarpiu. Mūsų moksleiviai visasąjunginėje olimpiadoje pasiekdavo neblogų rezultatų. Tarybų Sąjungos komandų sudėtyse trisdešimt dviejose tarptautinėse matematikų olimpiadose 1960–1992 metais dalyvavo dvidešimt vienas Ukrainos moksleivis (komandą iš pradžių sudarydavo aštuoni, vėliau – šeši moksleiviai). Dabar kartais sakoma, kad atrenkant Tarybų Sąjungos komandą į nerusų tautybės moksleivius būdavo kitas požiūris, tačiau sunku vertinti tokią nuomonę.

Komandos rezultatas tarptautinėje olimpiadoje – balai, surinkti šešių jos dalyvių per dvi dienas. Todėl jis priklauso ne tik nuo šalies matematinio švietimo lygio, bet ir nuo kitų mažiau reikšmingų faktorių. Svarbi komandos atrankos bei parengimo sistema. Ukrainoje pagal nacionalinės olimpiados rezultatus atrenkama dvylika moksleivių, jie kviečiami į dviejų savaičių stovyklą, kurioje rengiami keturi atrankos turai bei skaitomos kai kurių olimpiadinių temų paskaitos. Mes nesistengiame didinti stovyklos dalyvių skaičiaus bei ilginti jos trukmės. Iš esmės pagrindinis moksleivių pasirengimas vyksta jų gyvenimo vietose vadovaujant jų mokytojams. Ukrainoje yra nemažai kvalifikuotų darbo su moksleiviais specialistų (nors ne visur – kai kur šis darbas nepakankamas). Mes savo ruožtu stengiamės bendrauti su šiais dėstytojais, aprūpiname juos medžiaga darbui. Šitaip rengiantis olimpiadai, atsižvelgiama į kiekvieno moksleivio individualias savybes. Ši sistema ir moksleiviui yra patogesnė, juk vykstant į stovyklas tenka išvažiuoti į kitą miestą, gyventi ne pačiomis geriausiomis buitinėmis sąlygomis. Geriausiems mūsų matematinių olimpiadų dalyviams ir taip tenka nemažas krūvis – per metus jie dalyvauja mažiausiai dviejuose nacionalinės olimpiados turuose, gali patekti į dviejų savaičių stovyklą bei tarptautinę olimpiadą. Beveik visi jie dalyvauja trijuose Soroso olimpiados Ukrainos turuose, daugelis – dviejuose ar trijuose Soroso olimpiados Rusijos turuose, dviejuose trijuose miestų turuose.

Šios pastabos Ukrainos komandos rezultatų TMO gerėjimo fone sukuria gana rožinį paveikslą. Žinoma, mūsų darbe tenka susidurti su įvairiomis kliūtimis, kurias ne visada įmanoma įveikti. Ukrainoje dabar praktiškai nėra leidžiama literatūra užklasiniam darbui su moksleiviais (išskyrus literatūrą pasirengimui stojamiesiems į aukštąsias mokyklas). Mokslo populiarinimo žurnalas moksleiviams ir mokytojams „Matematikos pasaulyje“ turi mažai prenumeratorių ir daug finansinių problemų. Daugelis talentingų mokytojų norėtų skirti daugiau dėmesio darbui su moksleiviais, tačiau jiems tenka eikvoti jėgas ir laiką įvairiais būdais užsidirbant pinigų. Gabus moksleivis visai teisėtai gali susimąstyti – ar verta skirti dideles pastangas matematikai, jeigu dabar labiau gerbiami ekonomistai, juristai, informatikai. Tikriausiai šie faktoriai veikia įvairiose šalyse ir dar ilgai turės didelę reikšmę Ukrainoje. Nuo to nepabėgsi.

Apskritai Ukrainoje matematinis išsilavinimas bei jo dalis – matematinės olimpiados išsaugojo savo prestižą. Mūsų darbas įdomus ir reikalingas žmonėms, tai svarbiau nei visi sunkumai ir problemos.