Gediminas Stepanauskas

Fibonačio skaičiai

Vidurinių amžių matematika negali pasigirti tokia gausa žymių mokslininkų kaip ankstesnių ir vėlesnių epochų laikais. Bet ir viduramžių tamsoje suspindo vienas kitas žiburys. Žymiausiu viduramžių matematiku reikia pripažinti italą Fibonačį[1] (1180 – 1240). Fibonačio tėvas buvo pirklys. Todėl jaunasis Fibonačis daug keliavo kartu su tėvu po Europos ir Rytų kraštus. Pradinį išsimokslinimą įgijo Alžyre. Ten ir susipažino su arabų aritmetika ir algebra. 1202 m. Fibonačis išleido „Abako knygą", kurioje buvo išsamiai išdėstyta žinoma iki to laiko aritmetika ir algebra. Daug Vakarų Europos matematikų kartų mokėsi iš šios knygos. Joje Fibonačis supažindina su iki tų laikų krikščioniškoje Europoje nenaudota patogia pozicine indų-arabų skaičiavimo sistema ir neigiamais skaičiais.

Uždavinys apie triušius ir rekurenčiosios sekos

Šioje knygoje Fibonačis pateikia tokį uždavinį. Kiek triušių porų bus metų pabaigoje, jei metų pradžioje turime vieną subrendusią triušių porą? Subrendusi triušių pora kas mėnesį pagimdo naują triušių porą. Gimusi pora subręsta ir po dviejų mėnesių jau pagimdo naują triušių porą. Tarkime, kad pirmoji pora jau pirmąjį mėnesį susilaukia palikuonių. Taigi pirmąjį mėnesį jau bus 2 poros. Senoji triušių pora gimdo ir antrąjį mėnesį. Po dviejų mėnesių turėsime jau 3 triušių poras. Trečiąjį mėnesį palikuonių susilauks jau ir pirmąjį mėnesį gimusi pora. Taigi po trijų mėnesių turėsime iš viso 5 triušių poras. Triušių porų skaičius po keturių mėnesių jau bus lygus 8. Taip skaičiuodami toliau gautume, kad po penkių mėnesių bus 13, po šešių mėnesių – 21, po septynių mėnesių – 34 triušių poros ir t.t. Po metų turėsime jau 377 triušių poras. Skaičiavimą tokiu būdu galime pratęsti ir toliau.

Dabar pereikime nuo triušių prie skaičių ir nagrinėkime seką

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \tag{1}$$

Sekos, kurių kiekvienas narys u_n yra kokia nors prieš jį einančių narių funkcija, vadinamos *rekurenčiosiomis sekomis.*

Jeigu galima surasti k skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_k$, kuriems lygybė

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n \tag{2}$$

[1] Tikrasis Fibonačio vardas yra Leonardas iš Pizos, bet jis labiau žinomas kaip Fibonačis (išvertus į lietuvių kalbą, tai reikštų Bonačio sūnus).

yra teisinga visiems natūraliesiems n, tai (1) seka vadinama *k-ojo laipsnio rekurenčiąja seka.*

k-ojo laipsnio rekurenčiosios sekos apibrėžime slypi indukcinė idėja. Žinodami pirmuosius k narius, iš (2) lygybės galime surasti $(k+1)$-ąjį narį. Suradę $(k+1)$-ąjį, jau galime surasti $(k+2)$-ąjį ir t.t. Norint surasti bet kurį k-osios eilės rekurenčiosios sekos narį, pakanka žinoti jos pirmuosius k narius ir rekurenčiąją seką apibrėžiančią (2) lygybę.

Pavyzdžiui, *geometrinė progresija* su pirmuoju nariu a ir vardikliu q

$$u_1 = a,\ u_2 = aq,\ u_3 = aq^2,\ \ldots,\ u_n = aq^{n-1},\ \ldots$$

yra pirmos eilės rekurenčioji seka, nes

$$u_{n+1} = qu_n.$$

Aritmetinė progresija su pirmuoju nariu a ir skirtumu d

$$u_1 = a,\ u_2 = a + d,\ u_3 = a + 2d,\ \ldots,\ u_n = a + (n-1)d,\ \ldots$$

yra antros eilės rekurenčioji seka, nes

$$u_{n+2} = u_{n+1} + d = u_{n+1} + (u_{n+1} - u_n) = 2u_{n+1} - u_n.$$

Fibonačio seka

Pereikime prie antrojo laipsnio rekurenčiosios sekos

$$F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots,$$

kai jos $(n+2)$-asis narys yra lygus dviejų prieš jį einančių narių sumai

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \tag{3}$$

Be to, tegul

$$F_1 = F_2 = 1.$$

Ši seka vadinama *Fibonačio seka*, o jos nariai *Fibonačio skaičiais.*

Fibonačis daugiausiai ir prisimenamas kaip atskleidęs Fibonačio skaičius, nors tai sudaro nedidelę dalį jo didžiulio indėlio į matematiką.

Iš (3) lygybės, žinodami, kad $F_1 = F_2 = 1$, surandame pirmuosius Fibonačio skaičius:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9
1	1	2	3	5	8	13	21	34

Taigi skaičiuotų triušių porų skaičius yra lygus Fibonačio skaičiams.

••• $\alpha + \omega$ •••

Fibonačio skaičiai pasirodo daug kur. Pirmiausia jie taikomi įvairiose skaičių teorijos srityse. Be jų neapsieinama kombinatorikoje. Žinios apie juos naudingos informatikai, geometrijai, lošimų teorijai, fizikai ir daug kur kitur. Fibonačio skaičiai sutinkami įvairiuose gamtos reiškiniuose. Neretai jie pasirodo pačiose netikėčiausiose, nelauktose situacijose. Nuo 1963 m. JAV yra net leidžiamas žurnalas, skirtas šiems skaičiams: *The Fibonacci Quarterly*.

Panagrinėkime vieną kombinatorikos uždavinėlį. Takelis, vedantis prie tvenkinio, padalytas į lygius vienas paskui kitą einančius stačiakampius laukelius (takelio plotis lygus laukelio pločiui). Takeliu link vandens šokuoja varlytė. Varlytė gali šokti į gretimą laukelį arba vieną laukelį peršokti. Keliais skirtingais būdais varlytė gali nušokuoti n laukelių ilgio takelį, t.y. (jeigu laukelius sunumeruosime) patekti iš pirmojo laukelio į n-ąjį? Šokavimo būdai yra laikomi vienodais, jei šokuodama varlytė pabuvoja tuose pačiuose laukeliuose.

Ieškomąjį skaičių pažymėkime x_n. Iš pirmojo laukelio galima patekti į pirmąjį vieninteliu būdu, nedarant nė vieno šuolio: $x_1 = 1$. Aišku, kad $x_2 = 1$, nes perėjimas iš pirmojo laukelio į antrąjį irgi vienintelis. Į trečiąjį laukelį galime patekti dviem būdais – tiesiai iš pirmojo peršokant antrąjį, arba pabuvojant ir antrajame: $x_3 = 2$.

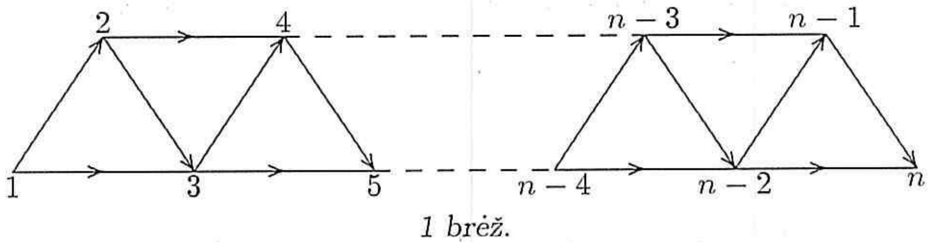
Visus būdus, kuriais galima patekti į n-ąjį laukelį, suskirstykime į dvi grupes. Pirmajai grupei priskirkime būdus, kai varlytė pabuvoja $(n-1)$-ajame laukelyje, o antrajai, kai varlytė į n-ąjį laukelį pakliūva tiesiai iš $(n-2)$-ojo laukelio peršokdama $n-1$-ąjį.

Gauname, kad

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Taigi skaičiai x_n yra lygūs Fibonačio skaičiams: $x_n = F_n$.

Visiškai analogiška situacija būtų, jei spręstume tokį uždavinį. Nagrinėkime grafą (žr. 1 brėž.).



1 brėž.

Keliais skirtingais variantais galima patekti iš 1-osios viršūnės į n-ąją, jeigu galima judėti rodyklių kryptimis? Atsakymas būtų: F_n skirtingų variantų.

Fibonačio skaičių savybės

Fibonačio skaičiai turi įdomių savybių. Kai kurias iš jų panagrinėkime.

Fibonačio skaičiams yra teisingos tokios lygybės:

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1, \tag{4}$$

$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}, \quad (5)$$
$$F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1, \quad (6)$$
$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_nF_{n+1}, \quad (7)$$
$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} \quad (n > 1). \quad (8)$$

Iš tikrųjų

$$F_1 = F_3 - F_2,$$
$$F_2 = F_4 - F_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n,$$
$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}.$$

Sudėję panariui visas šias lygybes, gausime (4) formulę.

Pats skaitytojas panašiu būdu gali įsitikinti, kad teisingos (5) ir (6) lygybės.

Norėdami įrodyti (7) lygybę užrašykime tokią:

$$F_k^2 = F_k(F_{k+1} - F_{k-1}) = F_kF_{k+1} - F_{k-1}F_k,$$

teisingą visiems $k > 1$. Todėl

$$F_1^2 = F_1F_2,$$
$$F_2^2 = F_2F_3 - F_1F_2,$$
$$F_3^2 = F_3F_4 - F_2F_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n^2 = F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_n.$$

Sudėję panariui šias lygybes, gausime (7) formulę.

(8) lygybei įrodyti pakanka taikyti matematinės indukcijos metodą. Tai paliekame skaitytojui.

Kiekvienas Fibonačio skaičius randamas naudojant paprastą sudėtį. Tačiau skaičiai greitai didėja. Jeigu reikia suskaičiuoti gana didelio numerio Fibonačio skaičių, naudojant rekurenčiąją formulę, esame priversti skaičiuoti visus Fibonačio skaičius pradedant pirmaisiais. Ar nėra kitų būdų? Ar galima surasti formulę, kurią naudodami galėtume iš karto suskaičiuoti reikiamą Fibonačio skaičių? Kaip juos rasti bent apytiksliai? Į visus šiuos klausimus galime atsakyti teigiamai.

Raidėmis α ir β pažymėkime skaičius:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Tuomet Fibonačio sekos n-asis narys užrašomas *Binė*[2] *formule*:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

---

[2] J. Binet (1786–1856) – prancūzų matematikas ir astronomas, atradęs šią formulę.

Binė formulės gana paprastą įrodymą galima rasti [1] knygoje.

Kadangi $|\beta| < 1$, tai β^n yra nykstantis dydis (t.y. kuo n didesnis, tuo šis dydis mažesnis), ir iš Binė formulės išplaukia, kad

$$F_n \approx \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}. \tag{9}$$

Pastaroji formulė gali būti panaudota Fibonačio skaičiams skaičiuoti. Autorius naudodamasis tik kišeniniu kalkuliatoriumi suskaičiavo, kad

$$\frac{\alpha^{30}}{\sqrt{5}} \approx 832040.004.$$

F_{30} turi būti artimiausias natūralusis skaičius. Taigi $F_{30} = 832040$. Žinoma, kai n yra gana didelis, nustatyti tikslias F_n reikšmes sunku, bet gauti apytiksles daug lengviau.

Panagrinėkime Fibonačio skaičių dalumo savybes. Jos labai panašios į natūraliųjų skaičių dalumo savybes. Teisingas toks tvirtinimas.

Jeigu m dalo n, tai F_m dalo F_n.

Iš tikrųjų tegul m dalo n, t.y. $n = mk$. Įrodinėsime indukcijos metodu atžvilgiu k. Jei $k=1$, tai $n = m$, o $F_n = F_m$. Šiuo atveju tvirtinimas akivaizdus. Tarkime, kad F_m dalo F_{mk}, ir nagrinėkime $F_{m(k+1)}$. Bet $F_{m(k+1)} = F_{mk+m}$, ir, naudodami (8) lygybę, turėsime

$$F_{m(k+1)} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{mk+1}.$$

Dešiniosios lygybės pusės pirmas dėmuo aiškiai dalijasi iš F_m. Antrasis dėmuo taip pat dalijasi iš F_m, nes pagal indukcinę prielaidą iš F_m dalijasi F_{mk}. Suma taip pat dalijasi iš F_m. Taigi iš F_m dalijasi ir $F_{m(k+1)}$. Teiginys įrodytas.

Teisingas ir atvirkščias teiginys.

Jeigu F_m dalo F_n, tai m dalo n.

Dabar įdomus pasidaro toks klausimas. Ar kiekvienam skaičiui m galima surasti bent vieną Fibonačio skaičių, kuris dalijasi iš m? Taip, galima. Bet tada, remiantis mūsų įrodytu tvirtinimu, tokių Fibonačio skaičių yra be galo daug. Jei F_l dalijasi iš m tai būtinai dalijasi iš m ir F_{lk}, $k = 2, 3, \ldots$.

Remdamiesi paskutiniaisiais teiginiais, galime rasti įvairius Fibonačio skaičių dalumo požymius. Pavyzdžiui:

- *Fibonačio skaičius F_n yra lyginis tada ir tik tada, kai jo numeris n dalijasi iš 3.*

Iš tikrųjų pirmasis lyginis Fibonačio skaičius yra $F_3 = 2$. Taigi iš 2 dalijasi visi Fibonačio skaičiai, kurių numeriai dalijasi iš 3, t.y. F_{3k}.

- *Fibonačio skaičius dalijasi iš 3 tada ir tik tada, kai jo numeris dalijasi iš 4.*
- *Fibonačio skaičius dalijasi iš 5 tada ir tik tada, kai jo numeris dalijasi iš 5.*

Įrodymus palikime skaitytojui, kuris galėtų suformuluoti ir daugiau dalumo požymių.

Yra daug neišspręstų problemų apie Fibonačio skaičius. Pavyzdžiui, iki šiol yra nežinoma, kiek pirminių skaičių yra tarp Fibonačio skaičių, ar jų yra baigtinis skaičius, ar be galo daug.

Aukso pjūvis

Dabar paimkime atkarpą AB, kurios ilgis lygus 1, ir padalykime į dvi dalis – ilgesniąją dalį AC ir trumpesniąją CB (žr. 2 brėž.) taip, kad visos atkarpos ir ilgesniosios jos dalies santykis būtų lygus ilgesniosios ir trumpesniosios dalių ilgių santykiui.

2 brėž.

Tegul $AC = x$, tada

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \quad \text{arba} \quad x^2 = 1 - x.$$

Šios lygties teigiama šaknis yra lygi $(\sqrt{5}-1)/2$. Todėl proporcija

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$$

lygi skaičiui α, su kuriuo susidūrėme Binė formulėje.

Iš tikrųjų α yra vienas dažniausiai matematikoje pasitaikančių skaičių ir žinomas *aukso pjūvio,* arba *auksinės proporcijos,* vardu. Jau Antikos laikais graikai pradėjo nuosekliai taikyti auksinę proporciją architektūroje, skulptūroje ir kitur. Aukso pjūvį plačiai naudojo ir Renesanso menininkai – S. Botičelis, A. Diureris ir kiti. Atlikti tyrimai patvirtina ypatingą estetinę aukso pjūvio reikšmę. Štai, pavyzdžiui, žmonės iš įvairių stačiakampių mieliau renkasi stačiakampius, kurių kraštinių santykis artimas auksinei proporcijai. Auksinė proporcija dažnai pasitaiko ir gamtoje. Apie aukso pjūvio reikšmę prirašyta daugybė knygų. Pirmasis žinomas matematinis traktatas apie aukso pjūvį „Dieviškoji proporcija" parašytas 1496–1499 m. vienuolio Luko Pačolio. Šią knygą iliustravo garsusis Leonardas da Vinčis.

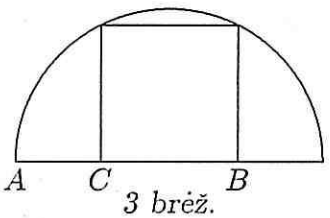
Grįžkime prie Fibonačio skaičių. Iš apytikslės Fibonačio skaičių (9) formulės gauname, kad $(n+1)$-ojo ir n-ojo Fibonačio skaičių santykis apytiksliai lygus aukso pjūviui

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \approx \alpha.$$

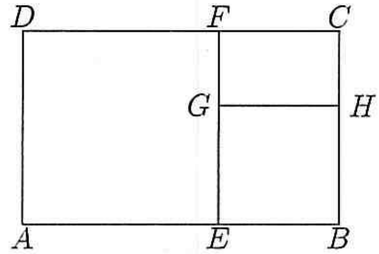
••• $\alpha + \omega$ •••

Kuo n didesnis tuo ši apytikslė lygybė tikslesnė.

Auksinė proporcija dažnai sutinkama geometrijoje. Pavyzdžiui, įbrėžkime į pusapskritimį kvadratą (4 brėž.). Tuomet taškas C yra atkarpos AB aukso pjūvio taškas.



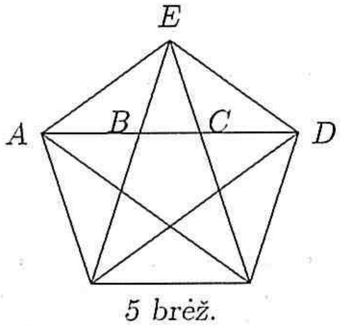
3 brėž.



4 brėž.

Imkime stačiakampį. Jei stačiakampio kraštinių santykis yra lygus α, tai stačiakampis vadinamas *auksinės proporcijos stačiakampiu*. Į auksinės proporcijos stačiakampį ABCD įbrėžkime kvadratą AEFD (5 brėž.). Tuomet stačiakampis EFCB taip pat bus auksinės proporcijos stačiakampis. Ir taip toliau. Jeigu EGHB kvadratas, tai GHCF auksinės proporcijos stačiakampis. Procesą galima tęsti ir toliau.

Daug auksinių proporcijų galime surasti taisyklingajame penkiakampyje (žr. 6 brėž.). Įsitikinkite, kad taškas C yra atkarpos AD aukso pjūvio taškas, taškas B yra atkarpos AC aukso pjūvio taškas, o atkarpų AD ir AE santykis taip pat yra lygus α.



5 brėž.

Su Fibonačio skaičiais, aukso pjūviu ir panašiais dalykais skaitytojas gali plačiau susipažinti pateiktoje literatūroje.

Literatūra

1. Воробьев Н. Н., Числа Фибоначчи, Москва: Наука, 1978.
2. Tannenbaumas P. ir Arnoldas R., *Kelionės į šiuolaikinę matematiką*, Vilnius: TEV, 1995.
3. М. Гарднер, Математические новеллы, Москва: Мир, 1978.