Vygantas Paulauskas

J.W. Lindebergas ir centrinė ribinė teorema

Suomių matematikas Jarlas Waldemaras Lindebergas paliko pėdsaką keliose matematikos šakose, iš jų diferencialinių lygčių ir variacinio skaičiavimo. Tačiau, be jokių abejonių, didžiausias jo įnašas buvo į tikimybių teoriją. Nors jis teparašė vos du straipsnius apie centrinę ribinę teoremą 1920 ir 1922 metais (beje, jis nenaudojo termino „centrinė ribinė teorema“, kurį pasiūlė Pólya tuo pačiu metu (1920 m.), bet jie davė pradžią terminamas „Lindebergo sąlyga“ ir „Lindebergo metodas“. Praėjus beveik šimtmečiui pirmasis yra kiekviename tikimybių teorijos vadovėlyje, o abu jie plačiai vartojami mokslinėje literatūroje, skirtoje centrinei ribinei teoremai.
Kai kolega suomių matematikas Hanu Niemis pasiūlė man parašyti straipsnį apie J. W. Lindebergą ir jo įtaką tikimybių teorijai, tik trumpam buvo kilusios dvejonės ir tik todėl, kad nesu rašęs tokio pobūdžio straipsnių (šis straipsnis anglų kalba pasirodys viename suomių matematikų leidinyje).

Suomių matematikas Jarlas Waldemaras Lindebergas

Vilniuje pavyko rasti tik vieną šaltinį apie J. W. Lindebergą – Elfvingo knygą (žr. [8]). Pagrindinis šios knygos akcentas – Lindebergo mokslinė veikla, ir tik mažiau nei du puslapiai skirti trumpam Lindebergo gyvenimo aprašymui, bet ir čia nepaminėta daug jo gyvenimo detalių. Pateiksiu iš minėtų puslapių pagrindinius faktus, kurie vis dėlto leis įsivaizduoti, koks žmogus buvo Lindebergas.

Jarlas Waldemaras Lindebergas (1876–1932) gimė Politechnikos instituto dėstytojo šeimoje, kuri gyveno pasiturinčiai. Labai anksti išryškėjo jo polinkis matematikai, o 1897 m. apgynė kandidatinę disertaciją. Po to, tetos padedamas, Lindebergas metams išvyko į Paryžių. Čia jis pradėjo savo daktaro disertaciją iš diferencialinių lygčių (darbą tęsė Korfu), o 1900 m. ją apgynė oponuojant Ernstui Lindeliofui. 1902 m. pavasarį gavo docento vietą, o 1905 m. – matematikos adjunkto vietą (tai atitinka profesoriaus asistento padėtį) E. Lindeliofo katedroje. Nors 1919 m. Lindebergui buvo suteiktas profesoriaus vardas, jis niekad nesirūpino vadovavimu, nes, kaip parašyta [8] knygoje, „jautė, kad adjunkto vieta yra tinkamiausia jo skoniui“. Be Helsinkio universiteto, Lindebergas 1911–1918 m. taip pat dėstė Technikos universitete, o karjeros pradžioje mokytojavo suomiškoje gimnazijoje, kur ir sutiko būsimą žmoną Inesą Becher, kurią vedė 1905 m. baigęs studijas. Net ir vėliau Lindebergas domėjosi mokytojo darbu, o 1902–1918 m. buvo Matrikuliacijos egzaminų komisijos nariu, atstovaujančiu matematikai. 1909 m. buvo išrinktas Mokslų draugijos nariu, o 1919 m. – Suomijos mokslų akademijos nariu.

Privačiame gyvenime Lindebergas buvo draugiškas ir visuomeniškas, plačių interesų, turėjo daug giminaičių ir draugų, kurie jį labai mylėjo. Jis turėjo vasarnamį Kauvoniemyje – viename iš nuostabiausių ežeringų rajonų Suomijos rytuose – ir labai mėgo ten atostogauti.

Lindebergo mokslinis aktyvumas apima keletą skirtingų laikotarpių. Mums daugiausia rūpi paskutinis, kuris prasidėjo 1918 m., kai Lindebergas pradėjo domėtis tikimybių teorija ir statistika. Tas susidomėjimas tęsėsi iki pat jo ankstyvos mirties 1932 m., ir šis periodas yra svarbiausias Lindebergo mokslinėje biografijoje: Lindebergo darbai apie centrinę ribinę teoremą pelnė jam pripažinimą.

Centrinė ribinė teorema ir Lindebergo sąlyga

Pirmiausia tikslinga aprašyti, kokia situacija susiklostė toje srityje, kuri dabar yra labai plati ir vadinama centrinės ribinės teoremos vardu (trumpiau CRT). Yra daugybė tikimybių teorijos knygų, kur galima surasti ypač detalius CRT aprašymus. Mes galime rekomenduoti A. Araujo ir F. Gine [1] monografiją. Taip pat yra labai įdomus ir puikiai parašytas L. Le Camo [14] straipsnis (su H. Trotterio, L. Dubo ir D. Polardo komentarais), kurį ypač rekomenduoju skaitytojui, nes jame yra daug istorinių faktų, susietų su labai reikšmingu CRT periodu. To straipsnio įvade Le Camas pateikia CRT istoriją, parašytą bibliniu stiliumi, ir aš negaliu atsispirti pagundai pacituoti šią dalį.

> Pradžioje buvo de Muavras, Laplasas ir daug Bernulių, ir jie pradėjo ribines teoremas, ir išminčiai matė, kad jos buvo geros, ir jie pavadino jas Gauso vardu. Tuomet atėjo naujos kartos, ir jos sakė, kad teoremos geros, bet joms trūksta griežtumo. Tuomet atėjo Čebyševas, Liapunovas ir Markovas ir jie pradėjo įrodinėti, ir Pólya pamatė, kad tai labai svarbu, ir jis tarė, kad jų vardas bus Centrinė Ribinė Teorema.
>
> Tada atėjo Lindebergas ir jis tarė, kad tai elementaru, nes Teiloras išskleidė viską, ką reikėjo skleisti, ir jis tai tarė dusyk, bet Lévy jau buvo pamatęs, kad Furjė transformacijos yra charakteristinės funkcijos, ir jis tarė „tegu jos dauginasi ir gimdo ribines teoremas ir stabilius dėsnius“. Ir tai buvo gerai, stabilu ir pakankama, bet jie paklausė: „Ar tai būtina?“ Lévy atsakė: „Iš tikrųjų sakau jums, kad tai nėra būtina, bet ateis laikas, kai Gausas neturės dalių, kurios nebūtų panašios į jį patį,

ir tuomet tai bus būtina". Tai buvo pranašystė, ir tada Krameris paskelbė, kad laikas atėjo, ir buvo daug džiaugsmo, ir Lévy tarė, kad tai turi būti surašyta biblijoje, ir jis surašė teoremas, o laikui bėgant atsirado daug ribinių teoremų ir daug iš jų buvo centrinės, ir jos užpildė kronikas, ir tai buvo centrinės ribinės teoremos istorija.

Dabar aš „išversiu" šią istoriją iš „biblijos kalbos" suteikdamas daugiau matematinio tikslumo ir koncentruodamas dėmesį Lindebergo vardui ir jo vietai šioje istorijoje, nes tai ir yra šio straipsnio tikslas. Nesilaikant griežtumo galima tarti, kad centrinė ribinė teorema teigia, jog didelio skaičiaus atsitiktinių dydžių X_i, $i \geq 1$, sumos $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ skirstinys yra apytikriai normalusis.[1] Pirmąją CRT paprasčiausiu atveju, kai atsitiktiniai dydžiai X_i yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę (n.v.p.) ir įgyja tik dvi reikšmes su vienodomis tikimybėmis, įrodė L. Muavras (žr. [19]). Vėliau P. Laplasas (žr. [13]), nedarydamas prielaidos apie dėmenų vienodą pasiskirstymą, suformulavo bendresnį rezultatą, pagal kurį didelio nepriklausomų atsitiktinių dydžių skaičiaus suma turi apytikriai normalųjį skirstinį. Tačiau pirmą griežtą šio teiginio įrodymą A. Liapunovas surado tik po beveik šimtmečio – 1901 m. (žr. [15], [16]). Sąlygos, kurių reikalavo Liapunovas, buvo išreikštos dėmenų absoliučiųjų trečiųjų momentų terminais, ir dabar mes žinome, kad dėmenų trečiojo momento egzistavimas garantuoja ne tik patį sumos skirstinių konvergavimą, bet ir konvergavimo CRT greitį (n.v.p. dėmenų atveju jis yra lygus $O(n^{-1/2})$). Kai Lindebergas parašė pirmą savo straipsnį apie CRT [17], jis nežinojo Liapunovo įrodymo, todėl gavo tą patį rezultatą – CRT, kai sąlygos išreikštos dydžiais, vadinamais Liapunovo trupmenomis. Čia būtina pastebėti, kad Lindebergo įrodymas iš esmės skyrėsi nuo Liapunovo įrodymo, kuris rėmėsi charakteristinėmis funkcijomis. Prie įrodymo metodo grįšime truputį vėliau, pirmiausia apibrėšime garsiąją Lindebergo sąlygą.

Praėjus dviem metams Lindebergas, pamatęs Liapunovo įrodymą, modifikavo ir pagerino savąjį bei paskelbė antrąjį straipsnį apie CRT [18]. Suformuluosime pagrindinį šio straipsnio rezultatą (dabar vadinamą Lindebergo teorema), tik vartosime žymenis, skirtingus nei originaliame Lindebergo straipsnyje.

Standartinę normaliąją pasiskirstymo funkciją žymėsime $\Phi(x)$. Tarkime, X_i, $i \geq 1$, yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti toje pačioje tikimybinėje erdvėje $(\Sigma, \mathcal{A}, P)$ ir turintys pasiskirstymo funkciją $F_i(x)$, $EX_i = 0$, ir $EX_i^2 = \sigma_i^2$. Tarkime, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $B_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$, $\bar{F}_n(x) =$

[1] Mes darome prielaidą, kad skaitytojas susipažinęs su pagrindinėmis tikimybių teorijos sąvokomis, todėl neapibrėžiame normaliojo, arba dažnai vadinamo Gauso, skirstinio.

$P\{B_n^{-1} S_n < x\}$. Suformuluosime Lindebergo sąlygą:

$$\textit{su bet kuriuo } \varepsilon > 0 \quad B_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon B_n} x^2 \, dF_i(x) \to 0, \quad \textit{kai } n \to \infty. \tag{L}$$

Simboliu $\Rightarrow$ žymėsime silpnąjį skirstinių konvergavimą. Dabar galime suformuluoti Lindebergo teoremą.

Teorema. *Jei tenkinama* (L) *sąlyga, tai sekai* X_i, $i \geq 1$, *galioja* CRT , *t. y.*

$$\bar{F}_n \Rightarrow \Phi,$$

arba kadangi Φ *tolydi,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |\bar{F}_n(x) - \Phi(x)| = 0.$$

Taigi Lindebergas gavo labai bendrą ir tikslią pakankamą sąlygą, kad CRT būtų teisinga. 1935 m. W. Felleris ir nepriklausomai P. Lévy (žr. [14]) įrodė, kad kai tenkinama labai natūrali prielaida

$$B_n \to \infty, \qquad \sigma_n B_n^{-1} \to 0 \tag{AN}$$

(tai yra vadinamoji asimptotinio nykstamumo sąlyga), Lindebergo (L) sąlyga yra ne tik pakankama, bet ir būtina. Daugelyje tikimybinių vadovėlių šis rezultatas formuluojamas ir vadinamas Lindebergo–Fellerio teorema, nors, kaip pažymėta [14] straipsnyje, korektiškiau būtų ją vadinti Lindebergo–Lévy–Fellerio teorema.

Apie pusę amžiaus ši teorema buvo pagrindinis visos nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumavimo teorijos rezultatas. Aštuntajame dešimtmetyje V. M. Zolotariovo ir jo mokinių pastangomis P. Lévy keturiasdešimtųjų idėjos buvo atnaujintos ir išplėtota vadinamoji neklasikinė sumavimo teorija, besiremianti skirtinga idėja. Lindebergo–Fellerio teorema gali būti interpretuota taip, kad (L) sąlyga būtų būtina ir pakankama, kai teisinga asimptotinio nykstamumo prielaida, teigianti, kad tarp dėmenų nėra vyraujančių. Neklasikinės sumavimo teorijos pagrindinė idėja, išsakyta Lévy, paprastai gali būti suformuluota taip: sumoje gali būti vyraujančių dėmenų, bet jie patys turi būti artimi normaliajam skirstiniui.

Šiuo metu beveik neperdėdami galime teigti, kad Lindebergo sąlyga (arba tiksliau, Lindebergo tipo sąlyga) visada pasirodo, kai klasikinėje sumavimo teorijoje nagrinėjami nevienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir konvergavimas prie normaliojo dėsnio. Šiam teiginiui patvirtinti pateiksime tris pavyzdžius, kada yra naudojamos Lindebergo tipo sąlygos.

Martingalų CRT

Tarkime, $\{X_{n,j}, j = 1, \ldots, k_n\}$, $n \geq 1$, yra atsitiktinių dydžių serijų schema. Atsitiktinių dydžių $X_{n,1}, \ldots, X_{n,k}$ generuotą σ algebrą žymėsime $\mathcal{F}_n^k$ ir $\sigma_{n,j}^2 = E(X_{n,j}^2 | \mathcal{F}_n^{j-1})$. Nagrinėjant nepriklausomus atsitiktinius dydžius, centravimo ir normavimo problema buvo labai paprasta. Dabar leisime, kad su visais $j = 1, 2, \ldots, k_n$ ir $n \geq 1$

$$E(X_{n,j} | \mathcal{F}_n^{j-1}) = 0 \quad b.t. \tag{A}$$

ir

$$\sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{n,j}^2 \to \sigma^2 \quad \text{pagal tikimybę, kai } n \to \infty \tag{B}$$

(čia b.t. reiškia „beveik tikrai"). Apibrėžkime „sąlyginę" Lindebergo sąlygą: su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{k_n} E\Big(X_{n,j}^2 I(|X_{n,j}| > \varepsilon) | \mathcal{F}_n^{j-1}\Big) \to 0 \quad \text{pagal tikimybę, kai } n \to \infty. \tag{CL}$$

B. Brownas ir G. Eaglesonas (žr. [6], [7]) įrodė, kad esant teisingoms (A) ir (B), „sąlyginė" Lindebergo (CL) sąlyga yra pakankama, jog būtų teisinga sumos $S_n = \sum_{j=1}^{k_n} X_{nj}$ CRT:

$$\lim_{n \to \infty} \sup_x \big| P\{S_n < x\} - \Phi_\sigma(x) \big| = 0.$$

Čia Φ_σ yra normalioji pasiskirstymo funkcija, kurios vidurkis lygus 0, o dispersija – σ^2.

Taip pat galime paklausti apie sąlygos (CL) būtinumą, bet, kiek man žinoma, Lindebergo–Fellerio teorema martingalams yra vis dar nežinoma. Keletas dalinių rezultatų gauta, ir mes rekomenduojame [23] straipsnį detalesnei informacijai apie šią sritį.

Stjudento statistikų CRT

Tarkime, X_i, $i \geq 1, \ldots, n$, yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $EX_i = 0$, $EX_i^2 < \infty$ su visais $i \geq 1$, ir pažymėkime Stjudento statistiką $t_n = \bar{X}_n / \widehat{\sigma}_n$. Čia

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2.$$

Žinoma, kad Lindebergo (L) sąlyga yra pakankama CRT:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x \left|P\{\sqrt{n}\,t_n < x\} - \Phi(x)\right| = 0. \tag{D}$$

Tai galima matyti panagrinėjus, pavyzdžiui, [2] taip pat šis rezultatas lengvai išvedamas iš D. A. Raikovo [21] straipsnio, kur buvo įrodyta, kad, jei nepriklausomų atsitiktinių dydžių seka $X_1, \dots, X_n, \dots$ tenkina centrinę ribinę teoremą (tam pakanka sąlygos (L)), tai tų dydžių kvadratų seka tenkina didžiųjų skaičių dėsnį. Įdomu pastebėti, kad (L) nėra būtina sąryšiui (D) net jei teisinga asimptotinio nykstamumo (AN) sąlyga. Detales galima rasti [2] darbe.

Baigtinės populiacijos imčių centrinė ribinė teorema

Pateiksime P. Erdiöso ir Rényi'o [9] rezultatą, tik formuluosime jį taip, kaip pateikta [5] darbe. Nagrinėkime tokią populiacijų seką $\{x\}_n = \{x_{n1}, \dots, x_{nn}\}$, kad $\sum_i x_{ni} = 0$.

Tarkime, $X_{n1}, \dots, X_{nN}$ yra ilgio N imtis iš $\{x\}_n$ be grąžinimo. Tarsime, kad $N = N_n$ priklauso nuo n ir žymėsime $\sigma_n^2 = EX_{n1}^2$, $p_n = n^{-1}N_n$, $q_n = 1 - p_n$, $v_n = \sigma_n^2 n p_n q_n$. Įrodyta (žr. [9]), kad, jei

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n^{-2} E X_{n1}^2 I\{X_{n1}^2 \ge \varepsilon v_n\} = 0, \tag{FPL}$$

tai seka $S_n = v_n^{-1/2} \sum_{j=1}^{N_n} X_{nj}$, kai $n \to \infty$, konverguoja pagal pasiskirstymą į standartinį normalųjį skirstinį. Taip pat pastebėta, kad (FPL) yra Lindebergo tipo sąlyga. Vėliau J. Hajekas [12] įrodė, kad (FPL) yra ir būtina S_n asimptotinio normališkumo sąlyga.

Galima nagrinėti ir stjudentizuotą vidurkį $t_n = \bar{X}_n \widehat{\sigma}_n^{-1}$, čia

$$\bar{X}_n = N_n^{-1}(X_{n1} + \cdots + X_{nN}),\ \widehat{\sigma}_n^2 = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} (X_{ni} - \bar{X}_n)^2.$$

Įrodyta (žr. [5]), kad ta pati (FPL) yra pakankama, bet nebūtina atitinkamai normuotos sumos t_n asimptotinio normališkumo sąlyga.

Lindebergo metodas ir jo renesansas

Dabar grįžkime prie antrojo svarbaus dalyko Lindebergo straipsniuose apie CRT – įrodymų metodo. Kaip jau buvo minėta, Liapunovas CRT įrodyti naudojo charakteristines funkcijas. Lindebergas pasiūlė kitą metodą, kuris, be jokios abejonės, nebuvo toks populiarus kaip charakteristinių funkcijų metodas, propaguotas Lévy'io, ypač po labai svarbaus G. G. Esseeno darbo 1945 m. (žr. [10]).

Tikriausiai pirmasis tikimybininkas, pasinaudojęs Lindebergo įrodymo idėja, buvo H. Bergstriömas, penkiasdešimtaisiais išvystęs sąsūkų metodą vertindamas ribinių teoremų aproksimacijų tikslumą (žr. [4]). 1959 m. pasirodė H. F. Trotterio straipsnis, kuris suvaidino svarbų vaidmenį atgaivinant Lindebergo metodą. Šis straipsnis turėjo du privalumus: buvo parašytas angliškai (jei šimtmečio pradžioje matematinėje literatūroje dominavo vokiečių ir prancūzų kalbos, tai po Antrojo pasaulinio karo vyraujanti tapo anglų kalba) ir įrodymo idėja buvo perteikta labai aiškiai. Dėl pastarosios priežasties kai kur galima aptikti terminą *Trotterio metodas*. Iš tikrųjų Trotterio įrodymas skyrėsi nuo Lindebergo tik terminologija ir pateiktas labiau suprantamai. Gal ir galima sutikti su terminu *Lindebergo–Trotterio metodas* (atsižvelgiant į tai, kad Trotteris savo komentaruose Le Camo straipsniui parašė, kad įrodymo idėja paprasčiausiu n.v.p. dėmenų atveju jam gimė prieš pamatant Lindebergo straipsnį), bet priskirti metodą vienam Trotteriui būtų nekorektiška.

Bet netgi po Trotterio straipsnio pasirodymo Lindebergo metodas buvo charakteristinių funkcijų metodo šešėlyje. Situacija pasikeitė (Lindebergo metodo naudai), kai ribinių teoremų specialistai pradėjo daugiau dėmesio skirti begaliniamatėms erdvėms. Buvo pastebėta, kad Lindebergo metodas gana lengvai perkeliamas į begaliniamates erdves, tuo tarpu charakteristinių funkcijų metodas turi keletą principinių kliūčių. Išsamesnę informaciją šia tema galima rasti [3] straipsnyje.

Pabandysime išaiškinti Lindebergo metodo esmę (tačiau naudosimės ne jo paties išdėstymu ir kur kas bendresniu kontekstu), kaip tai buvo padaryta minėtame [3] apžvalginiame darbe.

Nagrinėsime n.v.p. atsitiktinių dydžių atvejį, kad pagrindinė idėja būtų suprantamesnė ir formulės paprastesnės. Tarkime, $X, X_1, X_2, \dots$ yra seka n.v.p. atsitiktinių dydžių, įgyjančių reikšmes separabilioje Banacho erdvėje, B seka. Skaitytojui, nesusipažinusiam su tikimybių teorija Banacho erdvėse, rekomenduojame laikyti $B = R^k$ su baigtiniu k ar net $k = 1$.

Tarkime, $Y, Y_1, Y_2, \dots$ yra kita seka n.v.p. Gauso atsitiktinių dydžių ir $EX = EY = 0$ ir $\operatorname{Cov} X = \operatorname{Cov} Y$ (neapibrėšime, ką reiškia simboliai EX ar $\operatorname{Cov} X$ bendrame Banacho erdvių kontekste, tik priminsime, kad tuo atveju, kai $B = R^k$, EX yra tiesiog vektorius, sudarytas iš kiekvienos koordinatės vidurkių, ir $\operatorname{Cov} X$ yra atsitiktinio vektoriaus X kovariacinė matrica). Tarkime, $S_n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\mu_n = \mathcal{L}(S_n)$, $\nu = \mathcal{L}(Y)$; čia $\mathcal{L}(Y)$ yra Y skirstinys. Norime įvertinti dydį

$$\left|\mu_n(A) - \nu(A)\right| = \left|\int_B \chi_A(x)(\mu_n - \nu)(dx)\right|,$$

kai $A \subset B$ yra mati aibė ir χ_A yra aibės A indikatorinė funkcija. Norint Banacho erdvės CRT įrodyti, reikia parodyti, kad šis dydis artėja prie nulio pakankamai plačiai mačių aibių klasei, bet, jei $B = R$, pakanka nagrinėti tik intervalus, t. y. $A = \{y \in R : y < x\}$, $x \in R$. Pirmasis žingsnis yra trūkią indikatorinę funkciją χ_A pakeisti pakankamai glodžia funkcija, sakykime, $g = g_{A,\varepsilon}$, kuri sutampa su χ_a visur, išskyrus aibės A sienos ∂A ε aplinką $(\partial A)_\varepsilon = \{x \in B : \inf_{y \in \partial A} \|x - y\| < \varepsilon\}$.

Bendroje Banacho erdvėje tai nėra triviali problema (žr. [20]), bet ant realiosios tiesės ir intervalams tai yra elementaru. Po šio pakeitimo (paprastai vadinamo *suglodinimo lema*) reikia įvertinti du narius: integralą

$$I = \left| \int_B g(x)(\mu_n - \nu)(dx) \right|$$

ir dydį $\nu((\partial A)_\varepsilon)$. I vertinamas remiantis šia tapatybe

$$\mu_n - \nu = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i\right) - \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^n \left(\mathcal{L}(W_{n,k} + n^{-1/2} X_k) - \mathcal{L}(W_{n,k} + n^{-1/2} Y_k)\right);$$

čia

$$W_{n,k} = n^{-1/2}\left(\sum_{i=1}^{k-1} X_k + \sum_{i=k+1}^{n} Y_k\right).$$

Po to taikoma Teiloro formulė. Jei g gali būti parinkta tris kartus Frešė diferencijuojama (tai yra problema tik begaliniamatėse erdvėse) ir $\sup_{x \in B} \|g'''(x)\| \le C\varepsilon^{-3}$, tai kiekvieną narį $g(W_{n,k} + n^{-1/2} X_k)$ ir $g(W_{n,k} + n^{-1/2} Y_k)$ galime skleisti apie $W_{n,k}$ bei gauti, pavyzdžiui,

$$g(W_{n,k} + n^{-1/2} X_k) = g(W_{n,k}) + g'(W_{n,k})(X_k) n^{-1/2} +$$
$$+ \frac{1}{2} g''(W_{n,k})(X_k)^2 n^{-1} + \frac{1}{6} g'''(W_{n,k} + \theta X_k n^{-1/2})(X_k)^3 n^{-3/2};$$

čia $|\theta| \le 1$ ir išvestinės yra daugiatiesės formos. Kadangi X_k ir Y_k vidurkiai ir kovariacijos lygūs, galima parodyti (tai nėra trivialu tik begalinio matavimo erdvėse), kad skirtumas

$$Eg(W_{n,k} + n^{-1/2} X_k) - Eg(W_{n,k} + n^{-1/2} Y_k)$$

turės tik narius su trečiomis išvestinėmis, ir tada lengvai gausime įvertį

$$I \le C n^{-1/2} \varepsilon^{-3} \nu_3;$$

čia

$$\nu_3 = \int_B \|x\|^3 \big|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\big|(dx) \le E\|X\|^3 + E\|Y\|^3.$$

Dydis $\nu((\partial A)_\varepsilon)$ paprastai yra eilės $C\varepsilon$, bent jau realioje tiesėje ir intervalams šis rėžis yra triviali išvada iš standartinio normaliojo skirstinio tankio funkcijos aprėžtumo. Taigi paėmę $\varepsilon^4 = n^{-1/2}\nu_3$, gauname rėžį

$$\big|\mu_n(A) - \nu(A)\big| \le C\nu_3^{1/4} n^{-1/8}.$$

CRT įrodyti, kai teisinga (L) sąlyga, Lindebergas panaudojo nupjovimo argumentus, kuriuos Liapunovas naudojo jau 1900 m.

Taigi pademonstravome Lindebergo (arba Lindebergo–Troterio) metodo galią: pirmiausia, jis gali būti taikomas labai bendrame kontekste; antra, juo galima gauti konvergavimo greitį nagrinėjamoje ribinėje teoremoje. Čia pravartu pažymėti, kad Lindebergo metodu gautas konvergavimo greitis nėra optimalus; net n.v.p. atsitiktinių dydžių, turinčių baigtinį trečią momentą, atveju jo eilė $n^{-1/8}$ vietoje $n^{-1/2}$. Geresniems įverčiams gauti reikia kai kurių naujų argumentų ir idėjų. Kaip jau buvo pažymėta, vieną iš tokių idėjų pasiūlė Bergstriomas: indikatorinės funkcijos glodžią aproksimaciją baigtiniamatėje erdvėje galima sukonstruoti naudojant sąsūką su Gauso skirstiniu. Visai neseniai E. Rio pademonstravo, kad Lindebergo ir Bergstriomo idėjos gali būti pritaikytos konvergavimo greičiui gauti silpnai priklausomų atsitiktinių dydžių CRT (žr. [22]).

Savo trumpą straipsnį norėčiau užbaigti pacituodamas du sakinius iš Le Camo [14] straipsnio:

> Čia mes nagrinėsime daugiausia tą centrinės ribinės teoremos istorijos dalį, kuri apima laikotarpį nuo 1920 ir 1937 m. Šio laikotarpio tyrinėjimai susieti su tokiomis įžymybėmis kaip Bernšteinas, Lindebergas, Lévy, Feleris ir Kolmogorovas, ir tai tik dalis vardų.

Šie žodžiai buvo parašyti praėjus beveik pusei šimtmečio po J. W. Lindebergo mirties, tad tvirtai galime teigti, kad Lindebergo vardas bus prisimenamas tol, kol matematikai domėsis centrine ribine teorema.

Literatūra

1. Araujo A. and Gine E., The Central Limit Theorem for Real and Banach Valued Random Variables, New York: Wiley and Sons, 1980.
2. Bentkus V., Bloznelis M. and Götze F., A Berry–Esseen bound for Student's statistic in the non-i.i.d. case, *J. Theor. Probab.*, 1996, **9**, 765–796.

3. Bentkus V., Götze F., Paulauskas V., Račkauskas A., The accuracy of Gaussian approximation in Banach spaces, *Itogi nauki i techniki*, 1991, **81**, 39–139.
4. Bergström H., On the central limit theorem, *Skand. Aktuarietidskrift*, 1944, **27**, 139–153.
5. Bloznelis M., A Berry–Esseen bound for finite population Student's statistic, to appear in *Ann. Probab.*
6. Brown B., Martingale central limit theorems, *Ann. Math. Statistics*, 1971, **42**, 59–66.
7. Brown B., Eagleson G., Martingale convergence to infinitely divisible laws with finite variance, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1971, **162**, 449–453.
8. Elfving G., The History of Mathematics in Finland 1818–1918, Helsinki: Societas Scientiarum Fennica, 1981.
9. Erdös P. and Rényi A., On the central limit theorem for samples from a finite population, *Publ. Math. Inst. Hungar Acad. Sci.*, 1959, **4**, 49–61.
10. Esseen G.-G., Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law, *Acta Math.*, 1947, **77**, 1–125.
11. Feller W., Über den Zentralengrenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Zeitschr.*, 1935, **40**, 521–559.
12. Hajek J., Limiting distributions in simple random sampling from a finite population, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, 1960, **5**, 361–374.
13. Laplace P.S., Theorie analytique des probabilite's, Paris, 1812.
14. Le Cam L., The Central Limit Theorem around 1935, *Statistical Science*, 1986, **1**, 1, 78–96.
15. Liapunov A.M., Sur une proposition de la théorie des probabilités, *Bull. Acad. Sc. Pèter.*, 1900, **13**, 359–386.
16. Liapunov A.M., Nouvelle forme du théoreme sur la limite des probabilités, *Memoires de ĺ Acad. imper. des sc. de St. Pétersburg,* 1902, **12**, 1–24.
17. Lindeberg J.W., Über das Exponentialgesetz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, 1920, **16**, 1–23.
18. Lindeberg J.W., Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Zeitschr.*, 1922, **15**, 211–225.
19. de Moivre A., Miscellanea analytica supplementum, London, 1730.
20. Paulauskas V. and Račkauskas A., Approximation theory in the Central Limit Theorem. Exact Results in Banach Spaces, Dordrecht-Boston-London: Kluwer, 1989, 153 p.
21. Raikov D.A., On a connection between the central limit theorem in the theory of probability and the law of large numbers, *Izvestija Akad. Nauk SSSR, ser. Mat.*, 1938, **19**, 323–338.
22. Rio E., Sur le théorème de Berry–Esseen pour les suites faiblement dependantes, *Probab. Th. Related Fields*, 1996, **104**, 2, 255–282.
23. Sholomitsky A., On the necessary condition in CLT for martingales, to appear in *Teor. Verojat. Primen.*,1998, **43**, 3.
24. Trotter H. F., Elementary proof of the central limit theorem, *Archiv der Mathem.*, 1959, **10**, 226–234.

●●● $\alpha + \omega$ ●●●