Ronald Brown

Matematika ir mazgai

Velso universiteto profesorius Ronaldas Brownas yra vienas iš parodos „Matematika ir mazgai“ Internete autorių. Parodos tikslas – atskleisti platesnei visuomenei kai kuriuos matematikos metodus. Šiame straipsnyje apžvelgiami parodos sudarymo principai bei patys metodai.

1. Įvadas

Matematikos populiarinimas yra didelis uždavinys. Neseniai pasirodžiusių Wileso, Erdöso ir Nasho[1] biografijų, taip pat Karališkojo instituto kalėdinių paskaitų bei Iano Stewarto[2] knygų populiarumas rodo, kad matematika žavimasi. Vis dėlto nėra aišku, ar tos biografijos skatina studentus gilintis į dalyką, kita vertus, matematikos prigimtis tokio pobūdžio tekstuose lieka mįslinga. Nėra lengva surasti trumpus teiginius apie tai, kokius objektus tiria matematika, kokie yra jos metodai ir svarbiausi laimėjimai. Netgi toks populiarus rašytojas kaip Deutschas [5] pasitenkina teiginiais: „Matematika tiria absoliučiai teisingas tiesas“. Jie daugumai žmonių visai nieko nesako.

Užuot tuščiai filosofavus, bandant išoriškai pateisinti matematiką, verčiau pamėginti parodyti matematikos praktiką ir susieti ją su įprastinėmis priemonėmis, kurias naudojame bandydami tirti ir suprasti pasaulį.

Mazgų teorijos dėstymo žemesniųjų kursų studentams Bangore (maždaug nuo 1975 metų) patirtis mums atskleidė šios srities vertę, aiškinant kai kuriuos pagrindinius matematikos metodus, dalį medžiagos panaudojome viešose paskaitose. (Pavyzdžiui, autorius skaitė BAAS paskaitą Sasekse 1983 metais, Londono populiariąją matematikos paskaitą 1984 metais ir Undinėlės Molekulės paskaitą 1985 metais.[3]) Šitaip sukaupėme daug vizualios medžiagos ir 1985 metais pradėjome galvoti apie kilnojamąją parodą.

[1] A. Wilesas – mūsų laikų anglų matematikas, įrodęs didžiąją Fermat teoremą; P. Erdösas (1913–1996) – vengrų matematikas (žr. „*Alpha plius omega*“, 1996, 2, p. 35–38); J. F. Nashas – lošimų teorijos specialistas, Nobelio premijos už ekonomikos tyrinėjimus laureatas.

[2] Karališkojo instituto kalėdinės paskaitos (*Royal Institution Christmas Lectures*) – 1826 metais M. Faraday'aus įsteigtos mokslo populiarinimo paskaitos vaikams. I. Stewartas – daugelio matematikos populiarinimo knygų autorius.

[3] BAAS (*British Association for the Advancement of Science*) rengia kasmetes mokslo populiarinimo konferencijas. Londono populiariosios matematikos paskaitos (*London Mathematical Popular Lecture*) – Londono matematikų draugijos renginys. Undinėlės Molekulės paskaitos (*Mermaid Molecule Lecture*) – mokslo populiarinimo renginys vaikams, kurį rengė aktorius ir režisierius Bernardas Milesas ir jo žmona.

Iš pradžių pasitarėme su grafikos dizaineriu ir gavome iš jo A2 formato lentą su aliuminio kraštais ir kelioninę dėžę. Per keturis parodos gimimo metus tarėmės su trimis mums labai padėjusiais dizaineriais. Jie iš esmės prisidėjo, kad *Pop Maths Roadshow* sėkmingai atsirastų. Paroda buvo atidaryta 1989 metais Leedso universitete ir keliavo po Jungtinę Karalystę. Daugelio organizacijų, tarp jų ir COPUS,[4] parama buvo svarbi mūsų darbui. 1988 metais mums pasisekė gauti ESF[5] paramą, kuri dviem studentams suteikė galimybę realizuoti parodą dirbant su pirmąja *Pagemaker* versija.

1997 metais paroda buvo perkelta į Internetą.

Pradžioje buvome labai naivūs ir nesupratome, kad parodos forma yra viena iš sunkiausių. Ir štai kodėl:

- parodos poveikis turi būti daugiausia vizualus;
- kiekviena lenta turi pasakoti savo istoriją;
- kiekvienos lentos turinys turi būti tinkamai susietas su kitų lentų turiniais;
- kiekviena lenta turi būti tinkamai vizualiai susieta su kitomis lentomis.

Naudojant gardelės dizainą atsiranda tam tikras vizualus ritmas. Pagrindinis trūkumas – bandymas ant vienos lentos patalpinti per daug. Tai, kas apie mazgus ir skaičius iš pradžių buvo vienoje lentoje, vėliau buvo dėstoma trijose. Galutinį grafinį dizainą, taip pat ir visų mazgų piešinius, padarė Johnas Roundas.

Tolydžio suvokdami šiuos principus ir pagal juos apibrėždami kiekvienos lentos turinį, jautėme, kad mūsų požiūris į parodos struktūrą ir į pačią matematikos prigimtį vystėsi. Mes ėmėme labiau pabrėžti matematikos metodologiją negu jos prigimtį. Išties išsamus požiūris į matematiką reikalautų psichologijos, kalbos ir neurologijos dalykų supratimo, to neleidžia dabartinės galimybės. Galime tik parodyti, kaip matematikai dirba savo srityje, kaip jie pasiekia pažangos naudodamiesi standartiniais tyrimo metodais. Šiuo požiūriu mes demitologizuojame matematiką ir tikimės, kad darome ją dar žavesnę.

Mazgų teorija turi daug mums naudingų savybių. Pagrindinė iš jų yra ta, kad tyrimo objektas yra visiems žinomas. Taip pat ir pagrindinės problemos – kiekvienas bandęs atmegzti mazgą jas žino. Ilga mazgų istorija taip pat yra pranašumas: seniausias pervertas daiktas yra vilko dantis, tikriausiai karolių dalis, jo amžius – apie 300 000 metų. Galbūt akmens amžių reikėtų vadinti virvelių amžiumi!

Mazgų matematika prasideda 1867 metais kartu su dabar pamiršta sūkurine atomo teorija (*Vortex Theory of the Atom*). Teorija turėjo paaiškinti:

- atomų stabilumą;
- atomų įvairovę, kurią rodo periodinė elementų lentelė;
- atomų vibracines savybes, kurias rodo spektrinės linijos.

[4] *COPUS – Committee for the Public Understanding of Science.*

[5] *ESF – European Social Fund.*

Žiūrint į savo draugo fiziko P. G. Taito leidžiamus cigaro dūmų žiedus, lordui Kelvinui padarė įspūdį žiedų stabilumas ir vibravimo savybės. Jis įsivaizdavo atomus kaip eterio – menamos medžiagos, tariamai užpildžiusios visą erdvę, sūkurius. Kaip paaiškinti atomų įvairovę? Straipsnyje, kurį 1867 metais Kelvinas pateikė Karališkajai draugijai, buvo rašoma:

> Draugijai pateikiami atomų, kaip susimazgiusių ir susijusių sūkurių, modeliai; jų begalinė daugybė yra daugiau nei pakankama, kad būtų galima paaiškinti visos žinomos materijos alotropijas[6] ir panašumus.

Pirmasis tikslas buvo palyginti mazgų sąrašus ir periodinę elementų lentelę, taigi Taitas ėmėsi sudarinėti mazgų rinkinį. Sūkurinė atomo teorija greitai išnyko, bet Taito 10 metų darbas klasifikuojant mazgus iki 10 susikryžiavimų ir jo suformuluotos hipotezės (kai kurios įrodytos tik visai neseniai) net ir dabar įkvepia tyrinėtojus. Be to, bandant atsakyti į klausimą, kas yra „mazgų sąrašas", teko išspręsti sudėtingas konceptualias problemas.

Šių problemų sprendimas yra svarbus mūsų tikslui, šiais sprendimais remiasi ir mūsų parodos struktūra.

2. Metodologijos analizė

Objektai, kuriuos tiria matematika, gali būti pavadinti „struktūromis". Griežtai jų neapibrėšime, tačiau šią sąvoką reikia sieti su dviem įspūdžiais:

- Objektai sudaryti iš dalių, kurios yra susijusios.
- Matematika tiria *abstrakčias* struktūras, vadinasi, turime sąvoką bendrai idėjai reikšti, pavyzdžiui, mazgui, sumazgytam iš virvelės. Šis abstraktumas yra esminis kalbos aspektas.

Pirmoji problema, kylanti tiriant struktūrų rūšį, yra jų vaizdavimas.

2.1. Vaizdavimas

Mes turime rasti būdą, kaip parodyti, aprašyti, pavaizduoti tiriamą struktūrą. Nagrinėdami mazgus, į paskaitą mes galime atsinešti virvelę, o popieriuje galime juos vaizduoti mazgų diagramomis.

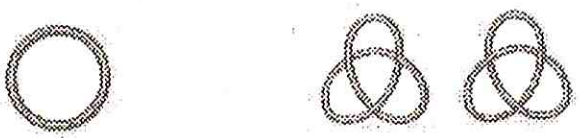
Iš pradžių imkime virvelę ir sumegzkime iš jos mazgą, kaip parodyta paveikslėlyje.

Jeigu paveikslėlio dešinėje pavaizduotą virvelę su mazgu laikome už galų, tai jokios manipuliacijos su virvele nepadės atmegzti mazgo ir grįžti į kairiojoje pusėje pavaizduotą padėtį, kol neperkirpsime virvelės ir vėl nesurišime arba nepaleisime vieno jos galo.

[6] Alotropija – medžiagos savybė būti kelių būsenų ar formų.

Tai atskleidžia pagrindinę matematinę problemą: kaip „įrodyti“, kad mazgo negalima atmegzti? Šis klausimas gali atrodyti kvailas, nes kelias minutes paeksperimentavę įsitikinsime, kad to negalima padaryti. Tačiau matematikai reikalauja daugiau tikrumo, taip pat ieško ir metodų, tinkančių ne tik šiai problemai, bet ir sudėtingesniems mazgams, kai padėtis nėra tokia aiški.

Iš pradžių mums gali pasirodyti keblu nuolat laikyti virvelę už galų, todėl galime juos sujungti. Šitaip gauname virvelę be mazgo (*unknot*) ir paprasčiausius mazgus: trilapį (*trefoil*) ir jo veidrodinį atspindį:

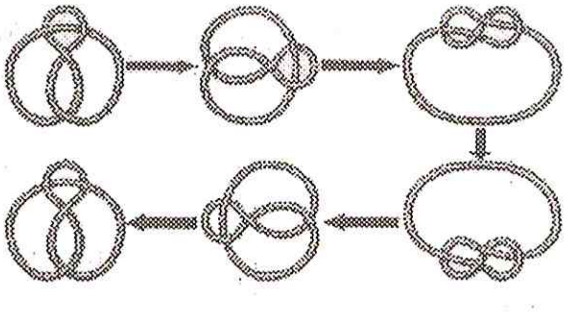


Taigi mazgus vaizduojame *mazgų diagramomis*, kuriose tik dvi virvelės dalys kryžiuojasi.

2.2. Klasifikacija

Svarbiausias dalykas ieškant pasaulio prasmės – klasifikacija. Pavyzdžiui, nesurašinėjame visų kokio nors džiunglių kampelio vabzdžių, bet sudarome jų rūšių sąrašą.

Taigi reikia žinoti, kada dvi diagramos vaizduoja tą patį mazgą. Virvelės kilpa su mazgais yra to paties „mazguotumo“, nesvarbu, kaip ji supinta, sumazgyta ir suvyta. Šie pasikeitimai turi būti vaizduojami mazgų diagramomis. Vėliau aptarsime tai detaliau. Šią idėja iliustruoja čia pateikiama diagrama, iš kurios matome, kad aštuoniukės mazgas yra tas pats mazgas, kaip ir jo veidrodinis atspindys apačioje.



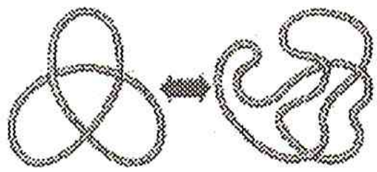
2.3. Invariantai

Norėdami įrodyti, kad du mazgai yra tokie patys, taigi dvi mazgų diagramos vaizduoja tą patį mazgą, turime suvesti vieną diagramą į kitą. Tai ne taip paprasta, kaip atrodo: Taito mazgų lentelėje buvo du dešimt kartų susikryžiuojantys mazgai, kurių tapatumą tik 1974 metais įrodė Perko.

Daug sudėtingesnė problema nustatyti, kad du mazgai yra skirtingi, nes šiuo atveju reikia įrodyti, kad joks leistinas judesys negali suvesti vieno į kitą, o būdo patikrinti visą begalinę daugybę leistinų judesių nėra. Pavyzdžiui, minėtas trilapis mazgas ir jo veidrodinis atspindys yra skirtingi. Tai pagrindinė mazgų teorijos problema, kol kas neturinti galutinio sprendimo. Dalinio sprendimo metodas – rasti *mazgų invariantus*, kuriuos galima apibrėžti diagramoms bei skaičiuoti ir kurie ekvivalenčiose diagramose yra tie patys. Mūsų parodoje detaliau aptariami šie invariantai: susikryžiavimų skaičius (*crossing number*), nemazgų skaičius (*unknotting number*), tiltų skaičius (*bridge number*), trispalvis dažymas (*three colouring*). Pavyzdžiui, trilapį mazgą galima tam tikra griežta prasme nuspalvinti trimis spalvomis, bet tai būtų neįmanoma, jeigu jis būtų tapatus virvelei be mazgo. Taip paprastai įrodoma, kad trilapis mazgas, taip pat ir daug kitų mazgų yra iš tikrųjų mazgai, t. y. netapatūs virvelei be mazgo.

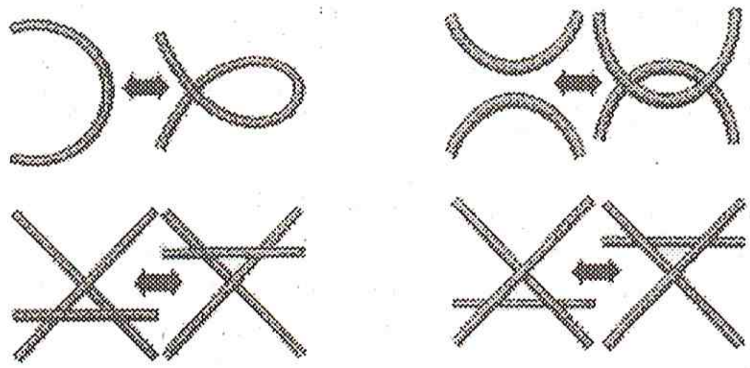
Mazgo susikryžiavimų skaičius apibrėžiamas kaip mažiausias susikryžiavimų skaičius, galimas mazgą vaizduojančioje diagramoje. Tai atitinka standartinę matematinę procedūrą, būtent mažiausiojo skaičių aibės elemento parinkimą, ir taip pat įprastinę praktiką, nes braižant mazgų diagramas stengiamasi nubrėžti pačią paprasčiausią. Susikryžiavimų skaičių lengva apibrėžti, bet sunku surasti sudėtingų mazgų atveju, nes mazgą galinčių vaizduoti diagramų skaičius yra begalinis.

2.4. Skaidymas į pirminius elementus: Reidemeisterio judesiai



Perėjimo nuo vienos mazgo diagramos prie kitos, nekeičiant paties mazgo, procesą reikia išskaidyti į paprastus pagrindinius elementus. 1920 metais Reidemeisteris įrodė, kad dvi mazgų diagramos vaizduoja tą patį mazgą tada ir tik tada, kai nuo vienos prie kitos galima pereiti atlikus iš penkių pagrindinių veiksmų sudarytą pertvarkių seką. Pirmuoju veiksmu diagrama deformuojama nekeičiant susikryžiavimų, kaip parodyta šiame brėžinyje.

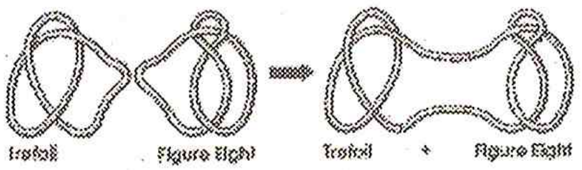
Kitais veiksmais susikryžiavimai keičiami vienu iš nurodytų būdų:



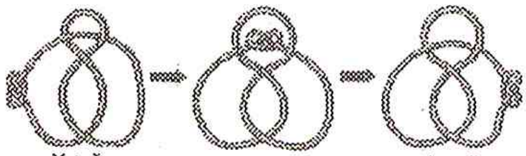
Šie veiksmai – svarbus įrankis. Pavyzdžiui, norint įrodyti, kad spėjamas mazgų invariantas yra tikrai invariantas, tereikia parodyti, kad jis nesikeičia atlikus Reidemeisterio judesius. Invariantiškumas deformacijos atžvilgiu paprastai įrodomas nesunkiai, taigi lieka patikrinti keturis atvejus. Šis suvedimas į keturis atvejus yra svarbi pažanga tiriant begalinę atvejų daugybę, šiuo metodu įrodoma, kad trispalvis nudažymas yra invariantas. Pabandykite!

2.5. Analogija

Nors šis žodis mūsų kontekste vartojamas retai, analogija iš tiesų yra esminė matematikos praktikos dalis. Būtent todėl, kad matematika tiria „struktūras", ji ir yra abstrakti, mes stengiamės pamatyti, kaip ta pati struktūra pasirodo įvairiose situacijose. „Tai primena man..." – atpažinimas kelia jaudulį ir leidžia perkelti žinias iš vienos situacijos į kitą. Toks perkėlimas dažnai padiktuoja problemos sprendimą, išties dėl to analogijos ir ieškoma: „Jei aš galėčiau pritaikyti šią techniką tai problemai, tai..." Kuo netikėtesnė analogija, tuo geriau. Tokią naują analogiją galima būtų pavadinti *įžvalga*.

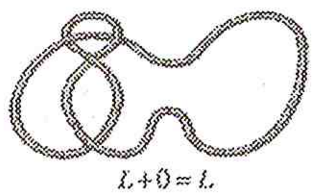


Analogija, kurią čia galime atskleisti, susieja mazgus su skaičiais, ji pagrįsta mazgų jungimu, kurį mes pavadinsime *sudėtimi*. Tai iliustruoja diagrama: iš mazgų ištraukiamos bei sujungiamos atkarpos. Svarbu, kad rezultatas nepriklauso nuo to, kuriose mazgų vietose atliekami jungimai. Tai demonstruoja kita diagrama, kuri taip pat rodo, kad mazgų sudėtis yra adityvi: $K + L = L + K$.

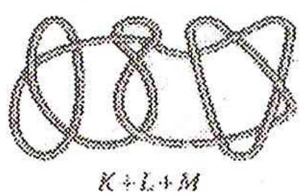


$K+L$ $L+K$

Galime įrodyti ir kitus dėsnius. Jeigu virvelę be mazgo žymėsime 0, tai nesunku matyti, kad bet kokiam mazgui L teisinga lygybė $L+0 = 0+L = L$.



$L+0=L$



$K+L+M$

Kita naudinga taisyklė – asociatyvumo dėsnis: $K+(L+M) = (K+L)+M$. Šios taisyklės, arba dėsniai, parodyti ankstesnėje diagramoje.

Formuluodami šiuos dėsnius, naudojamės dviem analogijomis.

Pirmoji iš jų – tai mazgų ir skaičių analogija. Iš tikrųjų mes nustatome mazgų *sudėties* ir skaičių *daugybos* analogiją. Štai vienas skaičių daugybos asociatyvumo taisyklės pavyzdys: $3\times(4\times5) = (3\times4)\times5$, t. y. $3\times20 = 12\times5$. Svarbus bruožas, kad sąryšiai tarp skaičių analogiški sąryšiams tarp mazgų: nagrinėdami visus mazgus ir visus skaičius, randame struktūrinių panašumų. Tačiau yra ir skirtumų: nėra neigiamų mazgų ir mazgų atimties. Jei $K + L =$

$K+M$, tai $L = M$, tačiau šiam teiginiui įrodyti reikia idėjų, kurių čia negalime paaiškinti.

Kita yra dėsnių skirtingose situacijose analogija. Atkreipę dėmesį į skaičių sudėties ir daugybos komutatyvumo dėsnius, t. y.

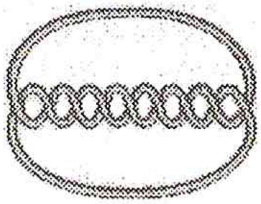
$$m + n = n + m, \qquad m \times n = n \times m,$$

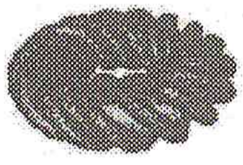
nustatome sudėties ir daugybos analogiją. Matematika yra išties *abstrakti* ir šis abstraktumas sąlygoja analogijas.

Yra dvi priežastys, kodėl šią mazgų „kombinaciją" pavadinome sudėtimi, o ne daugyba, kaip įprasta literatūroje apie mazgus. Visų pirma, žymuo 0 intuityviai lengviau siejamas su virvele be mazgo negu žymuo 1. Antra – noras pabrėžti, kad gali būti skirtingai vadinamų struktūrų analogijos.

2.6. Skaidymas į paprastus elementus: pirminiai mazgai

Aptarsime dar vieną skaidymo į paprastus elementus pavyzdį. Sakysime, kad mazgas K yra *pirminis*, jeigu skaidinys $K = L + M$ įmanomas tik tada, kai $L = 0$ arba $M = 0$. Trilapis mazgas ir aštuoniukės mazgas yra pirminiai mazgai, taip pat visi šeimos, kurios vienas atstovas pavaizduotas diagramoje, mazgai yra pirminiai. Jie vadinami *toro* šeimos mazgais, nes juos visus galima užvynioti ant toro. Toru matematikai vadina riestainio formos paviršių. Diagramoje pavaizduotas toro šeimos mazgas, užvyniotas ant paties toro. Ši idėja nėra plėtojama mūsų parodoje, tačiau ją galima rasti Interneto puslapyje, skirtame Johno Robinsono skulptūroms, nes keturios iš jų gali būti pavadintos toro šeimos mazgais.





Bet kuriuo atveju pirminiai mazgai yra mazgų šeimos paprastieji elementai. Toro šeimos mazgų pavyzdys rodo, kad yra be galo daug pirminių mazgų, tačiau įrodyti, kad toro šeimos mazgai pirminiai, yra sunku.

Nuostabus mazgų sudėties ir skaičių daugybos panašumas tas, kad iš esmės yra tik vienas būdas užrašyti mazgą pirminių mazgų suma. Tačiau šiam teiginiui įrodyti taip pat reikia idėjų, kurių čia nedėstome. Nėra algoritmo, nusakančio, kaip mazgą galima išskaidyti į pirminių mazgų sumą. Taigi mazgų ir skaičių analogija nėra visiška. Kita vertus, didelių skaičių, tarkime, užrašomų 200 skaitmenų, skaidymas pirminiais daugikliais yra uždavinys, kurio šiuolaikiniai kompiuteriai negali išspręsti per „normalų" laiką. Šiuo faktu paremta dalis kriptografijos metodų.

Taigi matome, kad analogijos panaudojimas padeda formuluoti klausimus. Mes norime žinoti, kokiais požiūriais dvi sistemos yra analogiškos ir kokiais ne.

2.7. Dėsniai

Jau aptarėme dėsnius, galiojančius mazgų sudėčiai, tačiau šią temą galima išplėtoti. Šiuos dėsnius galima interpretuoti kaip algebrinės sistemos *aksiomas*. Didelė matematikos dalis skirta tam tikros pasirinktos aksiomų sistemos išvadoms tirti. Tai sąlygojo požiūrį: „Matematika yra sritis, kurios atstovai nežino apie ką kalba, ir ar tai, apie ką kalbama, yra teisinga". Giminingas požiūris yra toks: „Aksiominio metodo pranašumai yra tokie patys kaip vagystės, lyginant su sąžiningu triūsu". Arba: „Matematika nėra kūryba, nes ji domisi žinomų taisyklių išvadomis".

Šie požiūriai neperteikia esmės. Aksiomos yra įrankiai, kuriais apibrėžiame norimas tyrinėti struktūras. Aksiomų pasirinkimas, taip pat jų ryšys su struktūromis, kurias norime tirti, yra kūrybinio proceso dalis. Hipotezių formulavimas ir aksiomų išvadų įrodinėjimas, t. y. teoremų formulavimas ir įrodymas, yra esminė naujos matematikos kūrimo dalis; dažnai teoremoms suformuluoti prireikia naujų sąvokų.

Nobelio premijos laureatas fizikas E. Wigneris turėjo aiškų požiūrį į matematiką [10]:

> Matematika yra sumanaus operavimo sąvokomis ir taisyklėmis mokslas; jos sukurtos tik šiam tikslui [tikslas – sumanus operavimas...].
>
> Esminis dalykas yra sąvokų sukūrimas.
>
> Minties darbą, reikalingą matematinėms sąvokoms sukurti, vėliau pateisina šių sąvokų vartojimo meistriškumas.

2.8. Apibendrinimas

Dabar aptarsime dalykus, kurių nėra parodoje. XIX amžiuje F. Kleinas pastebėjo, kad mazgą galima atrišti keturmatėje erdvėje. Norėdami pamatyti, kodėl taip yra, vėl pasinaudosime analogija. Vabalui plokštumoje galima užtverti kelią vertikalia siena. Tačiau jeigu jam leidžiama pasinaudoti trečiuoju matavimu, pavyzdžiui, skristi, jis lengvai gali įveikti kliūtį.

Mazgų diagramose atrišti mazgą trukdo susikryžiavimai. Jeigu galime naudotis ketvirtuoju matavimu, tai lengva matyti, kad tada vieną atkarpos dalį galima perkelti ant kitos ir taip pakeisti bet kurį susikryžiavimą. Tokiu būdu keturmatėje erdvėje lengva atrišti kiekvieną mazgą.

Apibendrindami galime klausti, ką galime surišti keturmatėje erdvėje. Atsakymas toks – baliono paviršių, kurį matematikai vadina dvimate sfera. Toks dvimatis mazgas gali būti atrištas penkiamatėje erdvėje.

Dar bendriau, n-matė sfera gali būti surišta $(n+2)$-ų matavimų erdvėje ir atrišta $(n+3)$-ų matavimų. Šio teiginio įrodymas gana sudėtingas, jį sukūrė E. C. Zeemanas. Bendros situacijos negalime tinkamai vizualizuoti. Vizualizacija ir interpretacija yra tik mūsų intuicijos išeities taškas, bendros situacijos atveju tenka pasikliauti abstrakčių savybių formulavimu ir reiškimu, taip pat su tuo susijusiais loginiais argumentais. Iš tiesų problema yra išrutulioti intuiciją, kas vyksta ir kas gali vykti šiose neaiškiai įsivaizduojamose sudėtingose struktūrose.

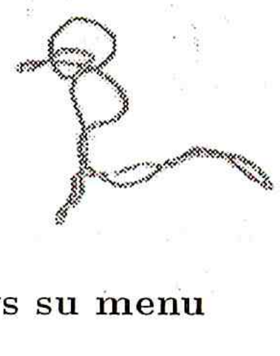
2.9. Taikymai

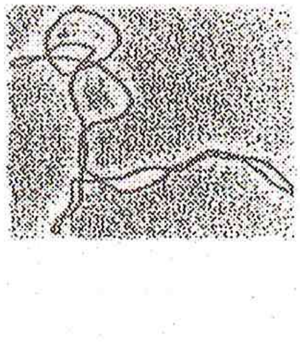
Brėžinyje vaizduojamos sumazgytos linijos, atsirandančios chaotiškuose srautuose, aprašomuose diferencialinėmis lygtimis, susijusiomis su orais.

Vienas iš dalykų, kurį norėjome parodyti parodoje, yra tas, kad daugelio taikymų efektyvumas priklauso nuo anksčiau išdėstytų aspektų. Netgi tam, kad būtų įsitikinta, jog pradinė atomų kaip sūkurių idėja nevaisinga, reikėjo suformuluoti subtilias mazgų klasifikavimo sąvokas, išplėtoti mazgų aritmetiką.

Paminėsime du modernius taikymus: chaotiškiems srautams ir DNR.[6]

Taikymai DNR prasidėjo 1985 metais ir turėjo reikšmingos įtakos mazgų teorijai ir jos taikymams. Tai nauja mazgų daugianarių teorija. Ją pradėjo Vaughanas Jonesas seminare Ženevoje, kur buvo nagrinėjami operatorių algebros teorijos klausimai. Jis įrodė tam tikrus šios algebros elementų dėsnius, o vienas iš klausytojų pastebėjo, kad šie dėsniai taip pat pasirodo kitoje matematikos srityje, glaudžiai susijusioje su mazgų teorija – kasų teorijoje. Kartu su tos srities specialistais plėtojant šią idėją atsirado nauja mazgų daugianarių teorija. Ji buvo pritaikyta nagrinėjant, kaip DNR molekulės išsinarplioja besidalydamos. Brėžinyje pateikta DNR mikronuotrauka ir susipynusios bei susimazgiusios molekulės schema.





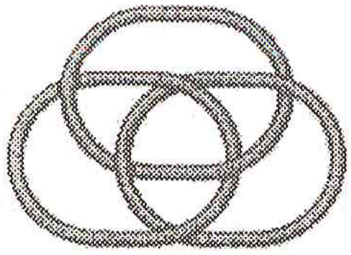
3. Ryšys su menu

Pradinis parodos tikslas buvo parodyti mazgus istorijoje, mene ir technologijoje. Laikui bėgant pasirodė, kad užsimota per plačiai, tačiau pasitaikė galimybė pasiūlyti Johnui Robinsonui parodyti savo skulptūras *Pop Maths Roadshow* parodoje. Šia paroda ir katalogu [4] prasidėjo intensyvus bendradarbiavimas, atvėręs akademiniam pasauliui jo kūrybą.

Borromėjų[7] žiedai, pavaizduoti brėžinyje, vadinami „ryšiu“, o ne mazgu, nes jie turi tris kilpas, o mazgas pagal apibrėžimą teturi vieną.

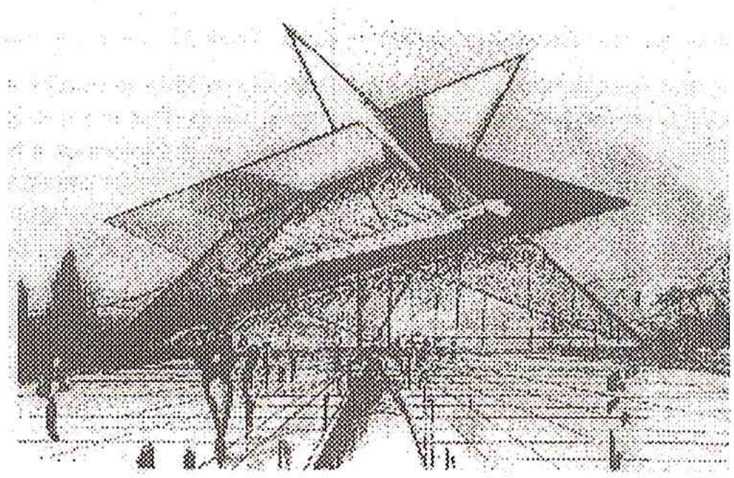
[6] DNR – dezoksiribonukleino rūgštis, kurios molekulėse saugoma genetinė informacija.

[7] Borromėjai – Italijos giminė, kurios ženkle buvo pavaizduoti šie žiedai.



Nė viena šio ryšio dviejų žiedų pora nėra surišta, bet visumos išardyti negalima. Tokie ryšiai, kurių pats paprasčiausias pavyzdys čia pavaizduotas, rodo, kad visuma yra daugiau negu dalių suma, t. y. dalys yra sujungtos į struktūrą. Viena iš matematikos uždavinių yra sukurti kalbą struktūrų savybėms nustatyti, aprašyti ir ieškoti įdomių, netikėtų savybių. Kai kurios iš jų atitinka realaus pasaulio aspektus.

Naudodamas Borromėjų žiedus J. Robinsonas sukūrė įvairių skulptūrų. Pabaigoje pateikiame Robinsono skulptūros „Intuicija" piešinį. Ši skulptūra yra pagrindinis pastato, pavadinto Matematikos panteonu, projekto akcentas.



Literatūra

1. Brown, R., Gilbert, N. D., and Porter T., Mathematics and Knots, Public Exhibition, 1989; Brochure, 1989; puslapis Internete: http://www.bangor.ac.uk/ma/CPM/exhibit/, Mathematics and Knots, Bangor, 1997.
2. Robinson, J., Symbolic Sculpture: catalogue for the exhibition at the Pop Maths Roadshow, Mathematics and Knots, 1989.
3. Brown, R., Quinton, C., Robinson, J., Symbolic Sculpture and Mathematics, http://www.bangor.ac.uk/SculMath/
4. Brown, R. and Porter, T., Making a mathematical exhibition, *In:* The popularization of mathematics, edited A. G. Howson and J.-P. Kahane, ICMI Study Series, Cambridge University Press, 1990, 51–64.
5. Deutsch, D., The fabric of reality, Penguin, 1997.
6. Russell, B., Introduction to the philosophy of mathematics.
7. Turner, J. C. and Van de Griend, P., History and science of knots, Singapore: World Scientific, 1995.
8. Wigner, E. P., The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, *Comm. in Pure Appl. Math.*, 1960; reprinted in Symmetries and reflections: scientific essays of Eugene P. Wigner, Bloomington Indiana University Press, 1967.