Remigijus Lapinskas

Taip sukasi pasaulis...

Turbūt daugelis per fizikos pamoką girdėjo istoriją apie tai, kaip kareivių būrys, žygiuodamas tiltu jį sugriovė.[1] Kaltas buvo rezonansas, o nuo to laiko kareiviai tiltais žygiuoja „ne į koją". Tačiau juk netgi netvarkingai žygiuojant gali atsitikti taip, kad kokiu nors laikotarpiu jie netyčia žengs į koją, ir tiltas vėl sugrius. Bet juk taip nebūna! Tačiau jokie dėsniai to nedraudžia, tai gal vis dėlto būna? Būtinumo ir galimumo, tvarkos ir chaoso santykiui ir skirtas šis straipsnis.

Planetos ir jų palydovai

Tarkime, kad Saulės sistema turi vienintelę planetą – Žemę. Ji skrieja aplink Saulę apskritimu ir laiko momentu t_0 yra taške $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Ar ji dar kada nors sugrįš į šią padėtį? Atsakymas akivaizdus – tai įvyks po vienų metų (arba po vieno apsisukimo). O dabar tarkime, kad aplink Žemę apskritimu skrieja dar ir Mėnulis, kuris momentu t_0 yra taške Q_0. Ar abiejų kūnų sistema dar sugrįš kada nors į pradinę padėtį (P_0, Q_0)? Čia reiktų skirti kelis atvejus. Pirmasis atvejis: per Žemės metus Mėnulis aplink Žemę apsisuka lygiai n (n – natūralusis skaičius) kartų. Taigi lygiai po metų sistema atsiduria pradinėje padėtyje. Tokiam „sutapimui" pasiekti reikėtų nemažai „organizacinių" pastangų, taigi realesnis kitas atvejis: per vienus Žemės metus Mėnulis apsisuka aplink Žemę

$$n + \frac{k}{l}$$

kartų; čia $\frac{k}{l}$ – nesuprastinama paprastoji trupmena, pavyzdžiui $\frac{k}{l} = \frac{3}{5}$. Šiuo atveju po l Žemės metų ir Žemė, ir Mėnulis vėl grįžtų į pradines padėtis – mūsų uždavinio atsakymas vėl teigiamas. Deja, realiausias trečiasis atvejis: per metus Mėnulis apsisuko aplink Žemę

$$n + \alpha$$

kartų, čia $0 < \alpha < 1$ yra iracionalusis skaičius.[2] Šiuo atveju kokį sveiką Žemės metų skaičių bepaimtume, jiems prabėgus Mėnulis niekuomet negrįš į

[1] Kaip pranešė 1999 m. sausio 7 d. „Respublika", 1999 m. sausio 4 d. mažiausiai 24 žmonės žuvo Kinijoje, sugriuvus 180 metrų ilgio prieš trejus metus pastatytam plieno tiltui, per kurį bėgo būrys besitreniruojančių policininkų.

[2] Priminsime, kad „beveik visi" realieji skaičiai yra iracionalūs.

savo pradinę padėtį Q_0. Tačiau teisinga tokia Jacobio (skaityk Jakobio) teorema.

Teorema. *Kokį mažą skaičių* $\varepsilon > 0$ *beimtume, visuomet atsiras toks Žemės metų skaičius* N, *kad Mėnulio padėties po* N *metų taškui* Q_N *galios nelygybė*

$$|Q_N - Q_0| < \varepsilon,$$

čia $|Q_N - Q_0|$ *reiškia atstumą tarp dviejų erdvės taškų.*

Kitais žodžiais tariant, po N metų Mėnulis beveik sugrįš į savo pradinę padėtį.

Matematikas toliau samprotautų taip: o kas būtų, jeigu į sąrašą dar įtrauktume ir Marsą? Ir Marso palydovus? Visas planetas su visais palydovais?[3] Aišku, kad su kiekvienu žingsniu matematinis aparatas darosi vis sudėtingesnis, ir anksčiau ar vėliau mums prireiks pakankamai abstrakčios, pavyzdžiui, kad ir Poincaré (skaityk Puankarė) teoremos.

Teorema. *Tarkime* $T : D \to D$ *yra tūrio nekeičianti abipusiškai vienareikšmė funkcija iš erdvės srities* D *į tą pačią sritį, taigi* $T(D) = D$. *Koks mažas bebūtų skaičius* $\varepsilon > 0$, *beveik kiekvienam taškui*[4] Q_0 *egzistuoja skaičius* $N = N(\varepsilon, Q_0)$, *kad*

$$|T^N(Q_0) - Q_0| < \varepsilon,$$

čia $T^N(Q_0)$ *reiškia* N*-kartinio funkcijos pritaikymo rezultatą, t. y.* $T^N(Q_0) = T(T(\ldots T(T(Q_0))\ldots))$.

Ši teorema tvirtina, kad dauguma „gerų“ sistemų (pavyzdžiui, hamiltoninės sistemos) anksčiau ar vėliau sugrįžta į beveik pradinę padėtį, tiksliau kalbant, sistemos padėtis $Q_N = T^N(Q_0)$ po N žingsnių nedaug skiriasi nuo pradinės padėties Q_0.

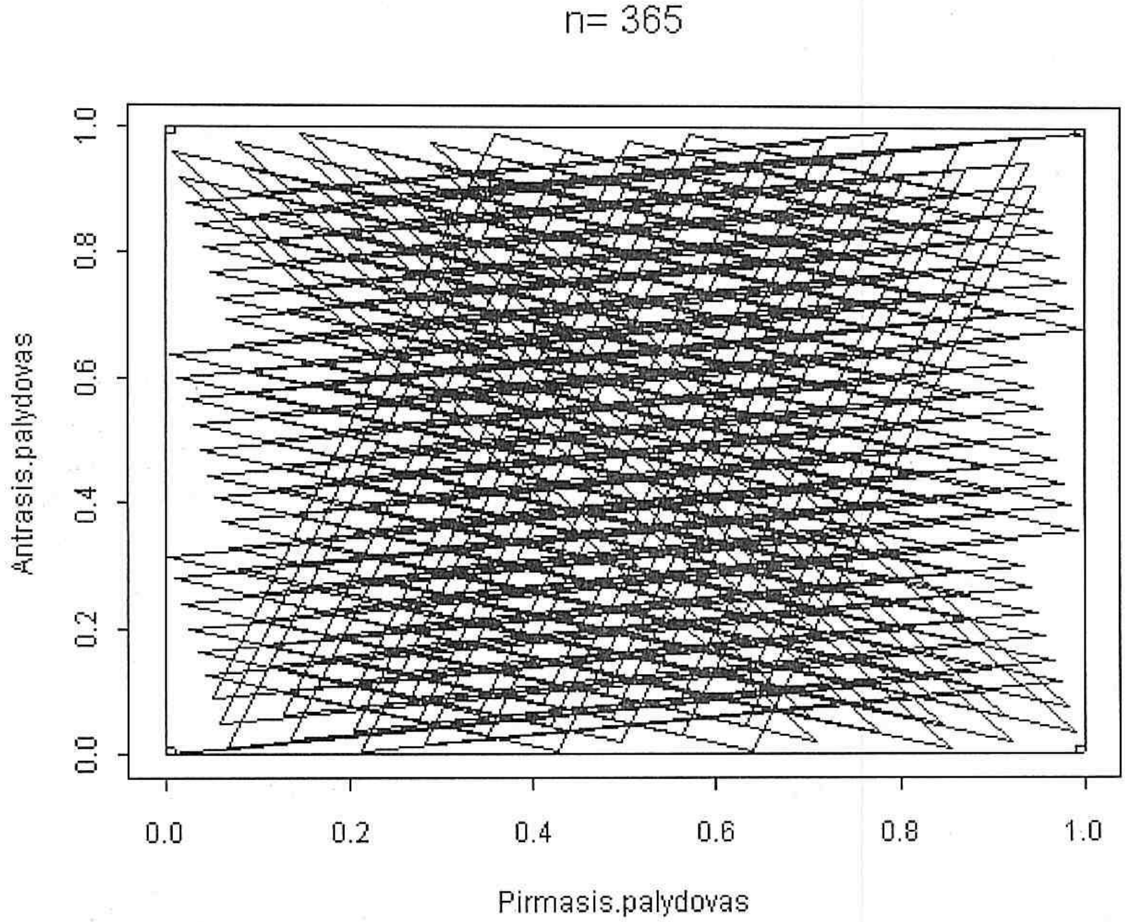
Panagrinėkime konkretų pavyzdį. Tarkime, Žemė turi du palydovus, kurių pirmasis per Žemės metus nuskrieja $\ln 2 \approx 0,693$ savo apskritimų, o antrasis – $\ln 3 \approx 1,099$ savo apskritimų, taigi vieną ir dar $0,099$ apskritimų. Susitarkime palydovo padėtį laiko momentu t žymėti nuskrietų apskritimų trupmenine dalimi, pavyzdžiui, jei laiko momentu jis yra nuskriejęs $3,23$ savo apskritimų, tai jo padėtį šiuo laiko momentu aprašysime skaičiumi $0,23$. Tada dviejų palydovų padėtį laiko momentu t nusakys kvadrato

$$K = \{(u,v) : 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1\}$$

taškas. Pastebėkime, kad kuo taškas (u,v) yra arčiau kvadrato kampų (pvz., taško $(0,1)$), tuo palydovai yra arčiau savo pradinės padėties. Jeigu atidėsime kvadrate K palydovų padėtį nusakančius taškus, kai laikas bėga, gausime trajektoriją, prasidedančią taške $(0,0)$ ir „besiblaškančią“ po kvadratą (žr. 1 brėž.).

[3] Kažin kiek jų yra?

[4] Išskirtinių „blogų“ taškų yra labai nedaug (jie sudaro nulinio tūrio aibę).

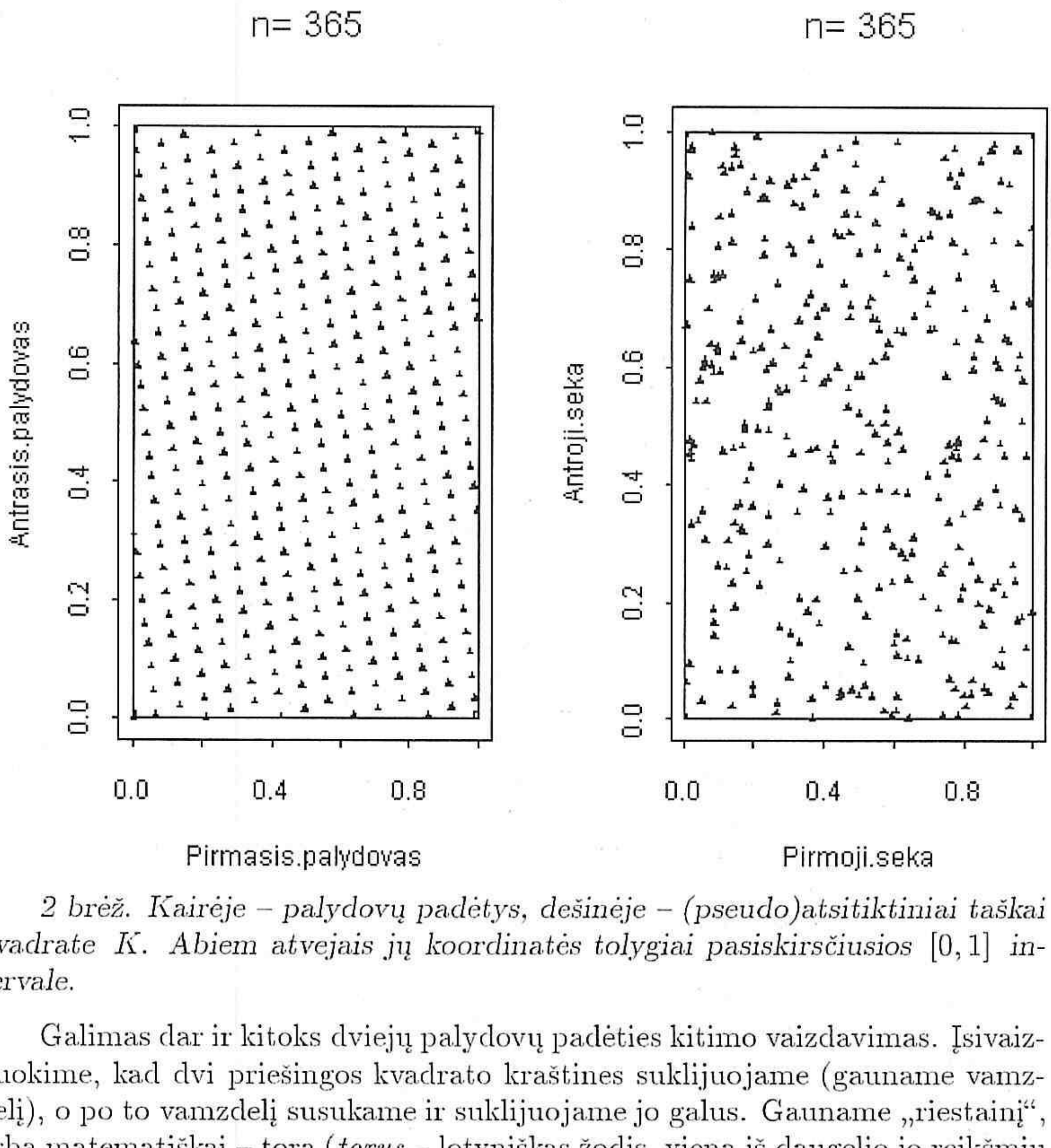


1 brėž. Du palydovai pradeda judėjimą iš taško $(0;0)$, *o po 365 metų atsiranda taške* $(0,999;0,993)$.

O štai šitaip keitėsi palydovų padėtys pirmaisiais metais.

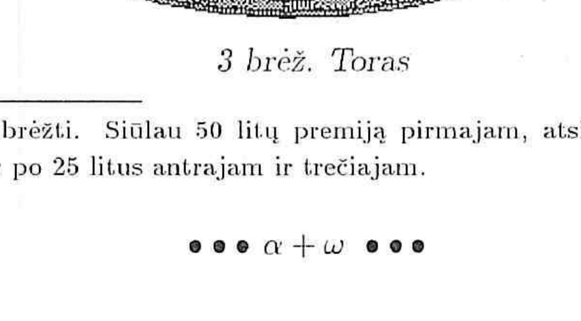
Metai	Padėtys		Metai	Padėtys		Metai	Padėtys	
1	0,693	0,099	3	0,0769	0,296	5	0,466	0,493
2	0,386	0,197	4	0,773	0,394	6	0,159	0,592

O dabar atidėkime kvadrato taškus, atitinkančius palydovų padėtis po $n = 0, 1, 2, \ldots, 365$ metų (žr. 2 brėž.). Laikui bėgant taškai, žymintys palydovų padėtį, tolygiai užpildys visą kvadratą, tačiau susidarantis „ornamentas" labai taisyklingas (žr. 2 brėž. kairėje), jį sunku pavadinti atsitiktiniu. Apie tai lemiančias priežastis pakalbėsime kitą kartą, čia pastebėsime tik tai, kad kompiuteriai moka generuoti „labiau netaisyklingus", labiau atsitiktinius (nors iš tikrųjų visiškai determinuotus) skaičius (žr. 2 brėž. dešinėje).



2 brėž. Kairėje – palydovų padėtys, dešinėje – (pseudo)atsitiktiniai taškai kvadrate K. Abiem atvejais jų koordinatės tolygiai pasiskirsčiusios [0, 1] *intervale.*

Galimas dar ir kitoks dviejų palydovų padėties kitimo vaizdavimas. Įsivaizduokime, kad dvi priešingos kvadrato kraštines suklijuojame (gauname vamzdelį), o po to vamzdelį susukame ir suklijuojame jo galus. Gauname „riestainį“, arba matematiškai – torą (*torus* – lotyniškas žodis, viena iš daugelio jo reikšmių – susukta virvė). Tada palydovų judėjimą aprašanti trajektorija vyniosis ant toro [1] (žr. 3 brėž.).

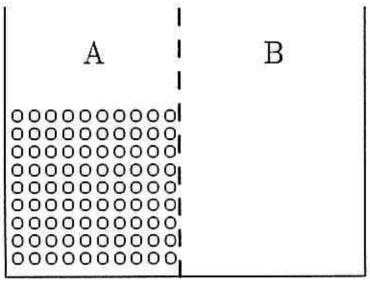


3 brėž. Toras

[1] Ją nelengva nubrėžti. Siūlau 50 litų premiją pirmajam, atsiuntusiam veikiančią jos brėžimo programą, ir po 25 litus antrajam ir trečiajam.

Dujos

Pereikime prie pagrindinio šio straipsnio objekto – dujų. Nagrinėkime indą, pertvara padalytą į dvi lygias dalis, – A ir B. Tarkime, kad visos dujų molekulės yra indo dalyje A, o pertvara tarp abiejų dalių pašalinama.



Kaip toliau elgsis ši sistema? Intuityviai aišku, kad laikui bėgant dujų dalelės tolygiai pasiskirstys abiejose indo pusėse ir tikriausiai niekuomet nebebus taip, kad visos jos vėl grįžtų į A. Tikriausiai ar tikrai? Dujų dalelių elgesį aprašo mechanikos lygčių sistema, kurioje yra tiek lygčių, kiek dalelių.[1] Kadangi lygčių yra labai daug, tai tokios sistemos neišspręstų joks kompiuteris. Antra vertus, netgi išsprendus šią sistemą (t. y. apskaičiavus kiekvienos dalelės koordinates momentu t), nebūtų taip paprasta nustatyti, ar dujų sistema kada nors grįš į savo pradinę padėtį. Taigi dar kartą: tikriausiai, ar tikrai? Atsakymą lengva gauti iš Poincaré teoremos: po $N = N(\varepsilon, Q_0)$ žingsnių[2] sistema bus labai arti Q_0, t. y. beveik visos dujų molekulės sugrįš į A.

Šį rezultatą būtų galima pavadinti abstrakčiųjų teoremų triumfu, jeigu ne vienas „bet“ – antrasis termodinamikos dėsnis.[3] . Šis dėsnis tvirtina, kad dujų dalelių sistemai pasiekus pusiausvyrą, ji niekuomet negrįžta į nepusiausvirąją būseną. Ši akivaizdi prieštara tarp mechaninio ir termodinaminio aiškinimų vadinama Zermelo (skaityk Cermelo) paradoksu. Kaip jį galima paaiškinti?

Tarkime, kad dujų sistema yra pusiausvyroje. Pasirinkime vieną kurią nors dujų dalelę ir, fotografuodami savo sistemą kas 1 sekundė, pasekime dalelės likimą. Aišku, kad ji elgsis pakankamai nereguliariai, o šansai sutikti ją inde A ar B yra vienodi. Kitais žodžiais tariant, tikimybė, kad pasirinktoji dalelė yra inde A, yra $0,5$. Jei dalelių inde būtų tik keturios ($k = 4$), tai tikimybė, kad visos jos bus kairėje, lygi

$$P_4(4) = 0,5^4 = \frac{1}{8}.$$

[1] Viename kubiniame centimetre normaliomis sąlygomis yra $A = 6,022 \cdot 10^{23}$ dujų molekulių. A vadinamas Avogadro skaičiumi.

[2] Taškas Q_0 yra n-matės erdvės taškas, n yra 10^{23} eilės skaičius; efektyvaus būdo N apskaičiuoti nėra.

[3] Jis sako: šiluma visuomet sklinda nuo karšto kūno link šalto; neįmanoma, kad šiluma, sklisdama nuo šalto kūno link karšto, dar pakeltų pastarojo temperatūrą. Mūsų atveju galėtume interpretuoti termodinamikos terminais, jeigu tartume, kad kairėje yra „karštos“ molekulės, dešinėje – „šaltos“. Kiti variantai: kairėje rašalas, dešinėje vanduo; kairėje kryžiai, dešinėje – visos likusios kortos.

Tikimybė, kad visos dalelės bus dešinėje (t. y. kairėje – nė vienos dalelės), lygi

$$P_4(0) = 0,5^4 = \frac{1}{8}.$$

Įvykį „kairėje yra viena dalelė" galima realizuoti keturiais būdais. Jei kairėje yra 1-oji dalelė, o 2-oji, 3-oji, 4-oji – dešinėje, žymėsime (1|2,3,4); analogiškai kitus atvejus – (2|1,3,4), (3|1,2,4), (4|1,2,3). Kadangi kiekvieno iš šių įvykių tikimybė yra $0,5 \cdot 0,5^3$, tai

$$P_4(1) = P_4(3) = 4 \cdot 0,5^4 = \frac{1}{4}.$$

Aišku, kad variantai (1,2|3,4), (1,3|2,4), (1,4|2,3), (2,3|1,4), (2,4|1,3) ir (3,4|1,2) reiškia pusiausvyrą. Jų yra šeši, todėl

$$P_4(2) = 6 \cdot 0,5^4 = \frac{6}{16}.$$

Taigi vidutiniškai šešiose nuotraukose iš šešiolikos sistema bus pusiausvyroje ir tik vienoje nuotraukoje visos keturios dalelės bus kairėje.

Remdamiesi kombinatorikos formulėmis, šias vadinamąsias binomines tikimybes galime užrašyti kompaktiškiau:

$$P_4(i) = \binom{4}{i} \cdot 0,5^4, \quad i = 0,1,2,3,4.$$

Kaip atrodytų mūsų nuotraukos, jei dalelių būtų 40? Šiuo atveju

$$P_{40}(i) = \binom{40}{i} \cdot 0,5^{40}, \quad i = 0,1,\ldots,40,$$

taigi

$$P_{40}(20) = \binom{40}{20} \cdot 0,5^{40} = 1,25 \cdot 10^{-1}, \quad P_{40}(40) = \binom{40}{40} \cdot 0,5^{40} = 9,09 \cdot 10^{-13}.$$

Kitais žodžiais tariant, 40-ties dalelių sistema šimtą milijardų kartų dažniau bus pusiausvyroje negu „visai nepusiausvyroje". Antra vertus, lygiai pusė dalelių kairėje bus tik maždaug vienoje nuotraukoje iš dešimties, todėl buvimo pusiausvyroje tendenciją geriau charakterizuoti kitaip: (ne mažesnio kaip) 10% nuokrypio nuo pusiausvyros tikimybė lygi maždaug pusei:

$$P(|\text{dalelių skaičius kairėje} - 20| \geq 0,1 \cdot 20) = \sum_{i:|i-20|\geq 2} \binom{20}{i} \cdot 0,5^{20} \approx 0,53.$$

••• $\alpha + \omega$ •••

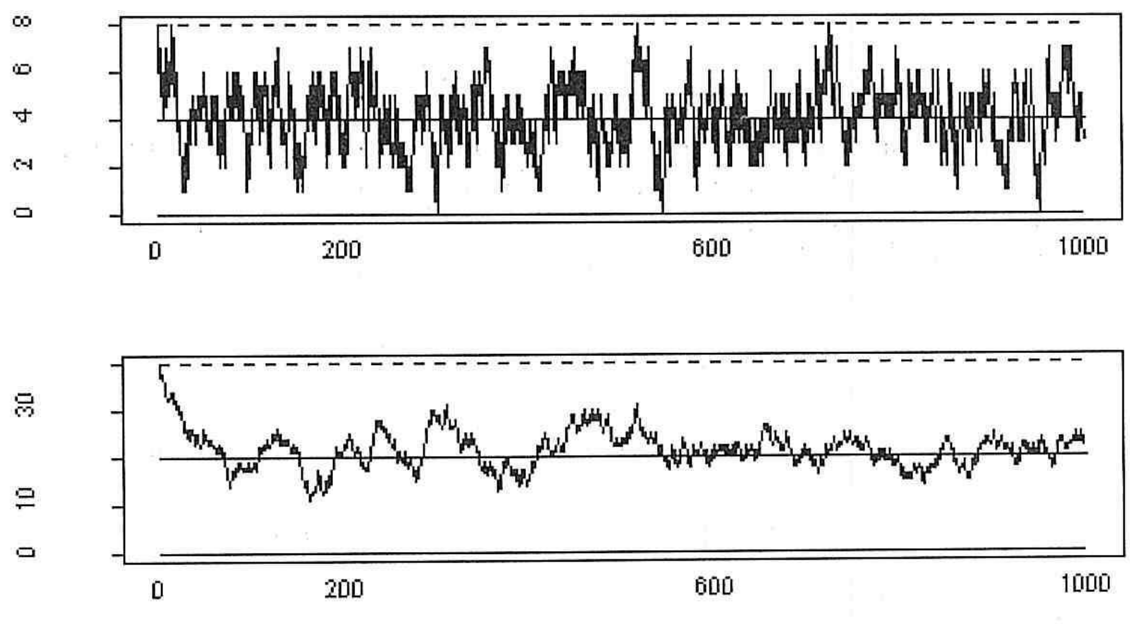
4000 molekulių inde yra labai nedaug, palyginus su Avogadro skaičiumi, tačiau dabar

$$P(|\text{dalelių skaičius kairėje} - 2000| \geq 0,1 \cdot 2000) \approx 2,72 \cdot 10^{-10},$$

taigi 10% fliuktuacijos tikimybė praktiškai lygi nuliui. Pažymėsime taip pat, kad tikimybė

$$P_{4000}(4000) \approx 7,59 \cdot 10^{-1205},$$

taigi vidutiniškai tik vienoje nuotraukoje iš $1,318 \cdot 10^{1204}$ visos dalelės bus kairėje. Šį faktą galima nusakyti ir kitaip: jei laiko momentu t_0 visos dalelės bus kairėje, tai jos visos vėl susirinks kairėje po 10^{1204} žingsnių (bendruoju atveju – po 2^k žingsnių; jei $k = 10^{23}$, tai 2^k yra neįsivaizduojamo didumo skaičius!). Dalelių sistemų evoliucija laikui bėgant pavaizduota 4 brėžinyje.



4 brėž.

Viršutiniame paveiksle pavaizduota aštuonių dalelių sistemos evoliucija. Visos dalelės į kairįjį indą turėtų susirinkti vidutiniškai kas $2^8 = 256$ žingsniai. Šįkart jos susirinko 3 kartus, taigi maždaug kas 333 žingsniai. Apatiniame paveiksle – keturiasdešimties dalelių sistema. Kadangi $2^{40} \approx 1,099 \cdot 10^{12}$, tai natūralu, kad per 1000 žingsnių sistema nė karto negrįžo atgal.

Taigi tikimybinis požiūris į nagrinėjamąją problemą sutaiko abi stovyklas: dujų dalelės, kartą išleistos iš A, kada nors dar kartą sugrįš atgal, bet to laukti teks kur kas ilgiau, negu egzistuoja Saulės sistema! Aišku, kad fizikai, tyrę šilumos dėsnius, tokio reiškinio tiesiog negalėjo užregistruoti, todėl visai nesuklysime teigdami, kad šiluma „atgal negrįžta". Apskritai daugelio dalelių sistemas reikia tirti ne mechanikos, bet tikimybių teorijos metodais. Neapibrėžtumas yra fundamentali mikropasaulio savybė, tačiau tai netrukdo pasauliui suktis...

••• $\alpha + \omega$ •••