Uždaviniai

Anglų matematiko ir rašytojo Č. L. Dodžsono (1832–1898) vardas jau šmėstelėjo mūsų žurnalo puslapiuose. Ir dar kartosis. Tam yra svari priežastis: 1998 - 100 = 1899 yra viena jo gyvenimo datų. Pats Č. L. Dodžsonas tikriausiai pastebėtų, kad kitais metais bus ne mažiau svari priežastis apie jį parašyti: 1999 - 101 = 1899. Turėsime tai galvoje.

Visi Č. L. Dodžsoną žino kaip pasakų knygų apie Alisą autorių Luisą Kerolį. Mažiau žinomi jo matematiniai darbai ir jo sukurti uždaviniai. Viena jo knygų taip ir vadinasi: „Vidurnakčio uždaviniai, sukurti bemiegėmis valandomis“. Pratarmėje jis skuba nuraminti savo draugus, kad anaiptol neserga nemiga. Jeigu ir tenka praleisti keletą bemiegių valandų, tai tik dėl to, kad iš vakaro gerai pamiegojo. Taigi uždaviniai nėra vaistai nuo nemigos, veikiau nuo įkyrių minčių.

Mūsų skyreliui parinkome keletą uždavinių iš kitos jo knygos: „Istorija su mazgeliais“.

ε.11

Du keliautojai 3 valandą dienos išėjo iš viešbučio ir grįžo tik 9 valandą vakaro. Bekeliaudami jie buvo įkopę į vieną kalną. Lygia vietove keliautojai ėjo 4 mylias per valandą, į kalną – 3 mylias per valandą, į pakalnę – 6 mylias per valandą. Kokį atstumą jie nuėjo ir kada (pusės valandos tikslumu) buvo įkopę į kalną?

ε.12

Du keleiviai išvyksta iš stoties tuo pačiu metu, bet priešingos krypties traukiniais. Maršrutas yra uždaras, todėl traukinys, išvykęs viena kryptimi, grįžta į stotį po 3 valandų, kita kryptimi – po 2 valandų. Kiek priešingos krypties traukinių sutiks kiekvienas keliautojas savo kelionėje, jei traukiniai abiem kryptimis išvyksta kas 15 minučių?

ε.13

◇◇◇

Mezgėjos K, L ir M mezga šalikus. Per tą patį laiką K numezga 5, o L – tik 2 šalikus. Kol K numezga 3 šalikus, M spėja numegzti 4. Penki M numegzti šalikai sveria tiek pat, kiek vienas K numegztasis. Penki L megzti šalikai sveria tiek kiek 3 M šalikai. Vienas L šalikas šildo tiek, kiek 4 M, o vienas K – kiek 3 L šalikai. Mezgėja laikoma tuo geresnė, kuo ji greičiau mezga, kuo jos šalikai lengvesni ir kuo geriau šildo. Visos šios savybės (greitis, svoris, šiltumas) vertinamos vienodai. Kuri mezgėja yra geriausia ir kuri blogiausia?

ε.14

◇◇◇

Metų pradžioje do broliai turėjo po 1000 svarų sterlingų. Po metų laiške vienam pažįstamajam jie rašė, kad laiško išsiuntimo dieną jie buvo kaip niekada arti 60 000 svarų sterlingų sumos. Kaip tai jiems pavyko?

Paties L. Kerolio sprendimas: laiško išsiuntimo dieną broliai vaikštinėjo prie Anglijos banko pastato.

ε.15

◇◇◇

24 paršelius reikia suvaryti į 4 tvartus taip, kad, apeinant juos vieną po kito, paršelių skaičius lankomame tvarte būtų artimesnis skaičiui 10 negu paršelių skaičius anksčiau aplankytame tvarte.

Nesunkiai surasite visus paršelių paskirstymo variantus. O štai paties L. Kerolio atsakymas: 8, 10, 0, 6. Dešimt yra arčiau dešimties negu 8. Kas gali būti arčiau dešimties už patį skaičių 10? Niekas! Bet niekas (0) kaip tik ir yra trečiajame tvarte!

Skyrelį tvarko **Giedrius Alkauskas**

Šio skyrelio uždavinius parinko Giedrius Alkauskas. Jie išdėstyti sunkėjimo tvarka. Primename, kad laukiame naujų uždavinių ir jau paskelbtų uždavinių sprendimų. Teisingus ir gražius sprendimus spausdinsime.

α.81

◇◇◇

Raskite visus trejetus x, y, p (x, y yra natūralieji skaičiai, p – pirminis skaičius), tenkinančius lygybę $p^x - y^3 = 1$.

α.82

◇◇◇

Tegu $A_1A_2A_3A_4$ yra į apskritimą C įbrėžtas keturkampis. Įrodykite, kad egzistuoja apskritimo C taškas M, kad

$$MA_1 - MA_2 + MA_3 - MA_4 = 0.$$

α.83

◇◇◇

Įrodykite, kad natūraliųjų skaičių aibę galima padalyti į du nesikertančius poaibius A ir B, kad su visais $k, l = 0, 1, 2, \ldots$ ir visais $a_1, a_2 \in A$ $(a_1 \neq a_2)$, $b_1, b_2 \in B$ $(b_1 \neq b_2)$ būtų teisinga

$$a_1 + a_2 \neq 2^k + 2, \quad b_1 + b_2 \neq 2^l + 2.$$

Įrodykite, kad toks padalijimas yra vienintelis.

α.84

◇◇◇

Plokštumoje nubrėžtas apskritimas C su centru ω ir spinduliu R. Atstumas nuo ω iki tiesės Λ lygus $d, d > R$. Tiesėje Λ parenkami du taškai M, N taip, kad apskritimas su skersmeniu MN išoriškai liestų apskritimą C. Įrodykite, kad egzistuoja toks taškas A, kad bet kuri nurodytu būdu parinkta atkarpa MN iš šio taško matoma tuo pačiu kampu.

••• $\alpha + \omega$ •••

α.85

◇◇◇

49 moksleiviai sprendžia tris uždavinius. Kiekvienas uždavinys vertinamas sveiku skaičiumi nuo 0 iki 7. Įrodykite, kad egzistuoja du moksleiviai A ir B, kad už kiekvieną uždavinį A gavo ne mažiau balų nei B.

α.86

◇◇◇

Ar įmanoma parinkti skaičių $\alpha (0 < \alpha < 1)$, kad egzistuotų begalinė teigiamų skaičių seka $\{a_n\}$, tenkinanti sąlygą

$$1 + a_{n+1} \leq a_n + \frac{\alpha}{n} a_n, \quad n = 1, 2, \ldots?$$

α.87

◇◇◇

Sveikųjų skaičių seka $\{a_n\}$ apibrėžta sąlygomis:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 7, \quad -\frac{1}{2} < a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \leq \frac{1}{2}, \quad n \geq 2.$$

Įrodykite, kad su visais $n > 1$ skaičius a_n yra nelyginis.

Skyrelį tvarko **Giedrius Alkauskas**

ω.26

◇ ◇ ◇

Ar skaiti aibė gali turėti neskaičią netuščių poaibių sistemą, kad bet kurių dviejų šios sistemos poaibių sankirta būtų baigtinė aibė?

ω.27

◇ ◇ ◇

Įrodykite, kad

$$\lim_{u\to\infty}\int_{1/u}^{u}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right)\frac{\ln x}{x}dx = 1-\gamma;$$

čia γ – Oilerio konstanta, t. y. skaičius, apibrėžiamas lygybe

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots++\frac{1}{n}-\ln n\right).$$

ω.28

◇ ◇ ◇

Vienetinio ilgio apskritime atsitiktinai parenkama n taškų. Parinkimai nepriklauso vienas nuo kito ir kiekvieno taško pasiskirstymas ant apskritimo – tolygus. Kokia tikimybė, kad atsiras uždaras pusapskritimis, kuriam priklausys visi parinktieji taškai?

ω.29

◇ ◇ ◇

Po vienu iš trijų nepermatomų gaubtelių yra moneta. Žaidėjui siūloma pasirinkti vieną gaubtelį jo neatverčiant. Iš likusių dviejų gaubtelių atverčiamas tas, po kuriuo nieko nėra ir žaidėjui siūloma nuspręsti: pasilikti iš pradžių pasirinktą gaubtelį ar pakeisti jį kitu. Žaidėjas laimi tai, kas yra po pasirinktu gaubteliu, taigi monetą arba nieko. Ar verta keisti pasirinkimą?

Prieš sprendžiant šį uždavinį per tikimybių teorijos pratybas, studentai buvo paklausti, kaip elgtųsi. Dauguma buvo linkę pasikliauti pradiniu pasirinkimu. Ar jie teisūs?

Apibendrinkime uždavinį. Tarkime, kad yra n gaubtuvėlių ir po m iš jų ($1 < m \leq n-2$) yra po monetą (žaidėjas nežino, kam lygus skaičius m). Žaidimo taisyklės tos pačios. Ar žaidėjui naudinga keisti pradinį pasirinkimą?

••• $\alpha + \omega$ •••

Sprendimai

Visus sprendimus pateikė **Giedrius Alkauskas**.

α.69

◇ ◇ ◇

Plokštuma padalyta į vienetinius kvadratus, kurie pakaitomis nuspalvinti juodai ir baltai (kaip šachmatų lenta). Kvadratų viršūnės yra taškuose su sveikomis koordinatėmis. Kiekvienai teigiamų skaičių m, n porai panagrinėkime statųjį trikampį, kurio viršūnės turi sveikąsias koordinates, o statiniai, kurių ilgiai yra m, n, eina kvadratų kraštinėmis. Visą juodosios trikampio dalies plotą pažymėkime S_1, o baltosios – S_2. Pažymėkime $f(m,n) = |S_1 - S_2|$. Apskaičiuokite $f(m,n)$, kai m, n yra abu lyginiai arba abu nelyginiai. Įrodykite, kad $f(m,n) \leq \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ su visais m, n. Įrodykite, kad nėra tokios konstantos C, jog su visais m, n $f(m,n) < C$.

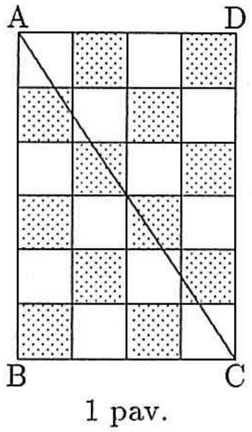
Sprendimas. Tegu m ir n yra abu lyginiai (žr. 1 pav. $AB = m, BC = n$). Tegu S_1^*, S_2^* yra stačiakampio $ABCD$ juodų ir baltų kvadratėlių skaičius. Panagrinėję stačiakampį $ABCD$, įsitikinsime, kad

$$2f(m,n) = 2|S_1 - S_2| = |S_1^* - S_2^*| = 0.$$

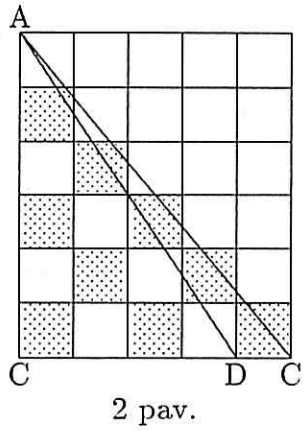
Analogiškai, jei m ir n yra abu nelyginiai

$$2f(m,n) = 2|S_1 - S_2| = |S_1^* - S_2^*| = 1, \quad f(m,n) = \frac{1}{2}.$$

Jei m ir n yra skirtingo lyginumo, šis įrodymas jau nebetinka, nes spalvinimas nebus simetriškas įstrižainės AC atžvilgiu.



1 pav.



2 pav.

Dabar įrodykime nelygybę $f(m,n) \leq \max\{m,n\}/2$. Jei $m + n = 2k$, teiginį jau įrodėme. Tegu m lyginis, n – nelyginis. Padalykime trikampį

ABC į du trikampius (žr. 2 pav.), čia $DC = 1, AB = m$. Tegu S_1' ir S_2' yra trikampių ABC ir ABD baltosios dalies plotai, S_1'' ir S_2'' atitinkamai – juodosios. Pagal jau įrodytą dalį $S_1' = S_1''$. Tada

$$f(m,n) = |S_1' + S_1'' - S_2' - S_2''| = |S_1'' - S_2''| \le S_1'' + S_2'' = S_{\triangle ADC}.$$

Taigi $f(m,n) \le S_{\triangle ADC} = m/2 \le \max\{m,n\}/2$. Įsitikinę, kad $f(2k+1,2k) = (2k-1)/6$; tam prireiks tik formulės

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Tada gausite $f(2k+1,2k) \to \infty, k \to \infty$, t. y. funkcija $f(m,n)$ nėra aprėžta jokia konstanta.

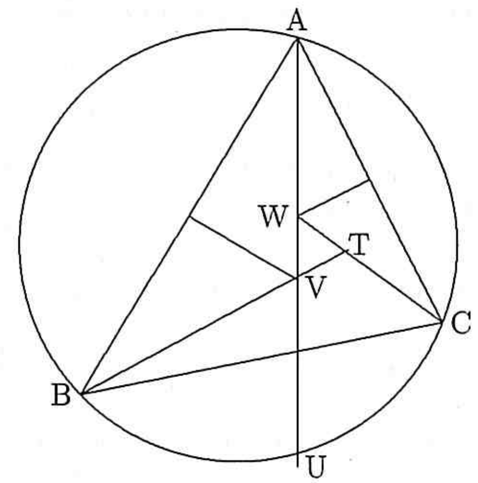
$\alpha.70$

◇ ◇ ◇

Kampas A yra mažiausias $\triangle ABC$ kampas. Taškai B ir C dalija apibrėžtą apie trikampį apskritimą į du lankus. Lanke, kuris jungia taškus B ir C, ir kuriam nepriklauso taškas A, paimtas vidinis taškas U. Kraštinių AB ir AC vidurio statmenys kerta tiesę AU atitinkamai taškuose V, W. Tiesės BV ir CW kertasi taške T. Įrodykite, kad

$$AU = TB + TC.$$

Sprendimas. Trikampio ABC kampus žymėsime tiesiog $\angle A, \angle B, \angle C$, kraštinės BC ilgį – a. Tegu $\angle UAC = \alpha$. Trikampiai AVB, AWC yra lygiašoniai, todėl $\angle ABV = \angle A - \alpha, \angle ACW = \alpha$. Dabar $\angle TCB = \angle C - \alpha, \angle TBC = \angle B - (\angle A - \alpha) = \angle B - \angle A + \alpha, \angle BTC = \pi - \angle TCB - \angle TBC = 2\angle A$.



Iš sinusų teoremos gauname

$$\frac{TB}{\sin(\angle C - \alpha)} = \frac{a}{\sin(2\angle A)} = \frac{TC}{\sin(\angle B - \angle A + \alpha)}. \tag{1}$$

Kita vertus, pasinaudoję sinusų teorema trikampiui $ABU(\angle ABU = \angle B + \alpha)$ gauname (R – apskritimo spindulys)

$$\frac{AU}{\sin(\angle B + \alpha)} = 2R = \frac{a}{\sin \angle A}. \tag{2}$$

Dabar išreiškę TB, TC, AU iš (1), (2) ir atlikę trigonometrinių reiškinių pertvarkymus, gausime

$$TB + TC = \frac{a}{\sin(2\angle A)}(\sin(\angle C - \alpha) + \sin(\angle B - \angle A + \alpha)) = AU.$$

α.71

◇◇◇

Realieji skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tenkina sąlygą

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 1, \quad |x_i| \leq \frac{n+1}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Įrodykite, kad egzistuoja tokia skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_n$ perstata $y_1, y_2, \ldots, y_n$, kad

$$|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

Sprendimas. Tarkime, kad visoms skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_n$ perstatoms $y_1, y_2, \ldots, y_n$ teisinga nelygybė

$$|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| > \frac{n+1}{2}. \tag{3}$$

Įrodysime, kad ši prielaida veda prie prieštaros. Tegu kuriai nors perstatai teisinga

$$y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n > \frac{n+1}{2}. \tag{4}$$

Jeigu perstatysime (4) kairėje pusėje y_i ir y_{i+1}, gausime sumą, tenkinančią (3). Jeigu šiai sumai būtų teisinga nelygybė

$$y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n < -\frac{n+1}{2}, \tag{5}$$

tai iš (4), (5) gautume $y_{i+1} - y_i > 2\frac{n+1}{2} = n + 1$. To būti negali, nes iš uždavinio sąlygos gauname $y_{i+1} - y_i \leq 2\frac{n+1}{2} = n + 1$. Taigi naujajai sumai taip pat teisinga (4). Tačiau perstatydami gretimus narius, iš $y_1, \ldots, y_n$ galime gauti bet kurią perstatą. Taigi (4) teisinga su bet kuria skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_n$ perstata. Atskiru atveju turi būti teisingos nelygybės

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n > \frac{n+1}{2}, \quad nx_1 + (n+1)x_2 + \ldots + 2x_{n-1} + x_n > \frac{n+1}{2}.$$

Jas sudėję gauname nelygybę, nesuderinamą su uždavinio sąlyga:

$$(n+1)(x_1+\ldots+x_n) > (n+1).$$

Jeigu jokiai perstatai (4) nelygybė nėra teisinga, tai vietoje skaičių $x_1,\ldots,x_n$ imdami skaičius $-x_1,\ldots,-x_n$ galėsime pasinaudoti jau įrodytu teiginiu.

α.72

◇ ◇ ◇

Lentelę $n\times n$, užpildytą aibės $S=\{1,2,\ldots,2n-1\}$ skaičiais, vadinsime sidabrine, jei kiekvienam $i=1,2,\ldots,n$ i-oji eilutė ir i-asis stulpelis kartu turi visus aibės S skaičius. Įrodykite, kad sidabrinė lentelė neegzistuoja su $n=1997$. Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug n reikšmių, su kuriomis sidabrinės lentelės egzistuoja.

Sprendimas. Kaip dažnai pasitaiko uždaviniuose, skaičius 1997 čia niekuo dėtas. Sidabrinės lentelės neegzistuoja su visais nelyginiais n. Įrodysime tai. Tegu n – nelyginis skaičius, $x\in S$. Tarkime, sidabrinė $n\times n$ lentelė egzistuoja ir skaičius x joje p kartų įrašytas įstrižainėje ir q – ne įstrižainėje. Peržiūrėkime n aibių, kurių elementai yra i-os eilutės ir i-ojo stulpelio skaičiai ($i=1,2,\ldots,n$). Skaičius x šiose aibėse pasitaikys n kartų; be to, skaičius x, užrašytas lentelės įstrižainėje, „dalyvaus“ tik vienoje aibėje, o ne įstrižainėje – dviejose. Taigi $n=p+2q$. Kadangi n nelyginis, tai $p\geq 1$. Gavome, kad kiekvienas aibės $S=\{1,2,\ldots,2n-1\}$ skaičius nors kartą yra užrašytas lentelės $n\times n$ įstrižainėje. Taip būti negali, vadinasi, sidabrinės lentelės su nelyginiu n nėra. Akivaizdu, kad su $n=2$ lentelė

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}$$

yra sidabrinė. Tegu M yra kokia nors sidabrinė $n\times n$ lentelė, P – lentelė, gauta iš M, pridėjus prie kiekvieno elemento po $2n$, Q – iš P, pakeitus visus jos įstrižainės elementus skaičiais $2n$. Tada belieka įsitikinti, kad lentelė

$$\begin{bmatrix}M&P\\Q&M\end{bmatrix}$$

yra sidabrinė.

α.73

◇ ◇ ◇

Raskite visas sveikųjų skaičių $a\geq 1, b\geq 1$ poras, tenkinančias lygybę

$$a^{b^2}=b^a.$$

••• $\alpha+\omega$ •••

Sprendimas. Tegu iš pradžių $a \leq b$. Tada $a^{b^2} = b^a \leq b^b$, taigi $a^b \leq b$ ir vienintelės galimos reikšmės yra $a = b = 1$. Tegu dabar $a > b \geq 2$. Tada $a^{b^2} = b^a \leq a^a$ ir $a > b^2$. Pasinaudoję šia nelygybe, gauname $b^a = a^{b^2} \geq b^{2b^2}$, taigi $a > 2b^2$. Tačiau tada $(a/b^2)^{b^2} = b^{a-2b^2}$ yra natūralusis skaičius, todėl turi būti $a = kb^2$. Lygybę $a^{b^2} = b^a$ perrašę $a = b^{(a/b^2)}$ ir įstatę į ją a išraišką, gausime $kb^2 = b^k, k = b^{k-2} \geq 2^{k-2}$. Kadangi $k = a/b^2 > 2$, tai galimos reikšmės tėra $k = 3, 4$. Šios reikšmės duoda dar du lygties sprendinius. Taigi lygtis turi tik tris sprendinius sveikaisiais skaičiais: $a = b = 1; a = 27, b = 3; a = 16, b = 2$.

ω.26

◇ ◇ ◇

Tegu S yra realiųjų skaičių aibė, uždara daugybos operacijos atžvilgiu, T, U – du nesikertantys S poaibiai, $S = T \cup U$. Tarkime, kad bet kurių trijų (nebūtinai skirtingų) T elementų sandauga priklauso T, aibė U irgi turi šią savybę. Įrodykite, kad bent viena iš aibių T, U yra uždara daugybos operacijos atžvilgiu.

Sprendimas. Tarkime, kad nei U, nei T nėra uždaros daugybos operacijos atžvilgiu, t. y. egzistuoja elementai $a, b \in U$ ir $c, d \in T$, kad $ab \in T$ ir $cd \in U$. Bet tuomet $abcd = a \cdot b \cdot (cd) \in U$ ir $abcd = (ab) \cdot c \cdot d \in T$. Tai prieštarauja sąlygai $U \cap T = \emptyset$. Taigi bent viena aibė daugybos atžvilgiu turi būti uždara.

ω.27

◇ ◇ ◇

Elipsė, kurios pusašės lygios a, b, neslysdama rieda kreive $y = c\sin(x/a)$. Koks sąryšis sieja a, b, c, jei, nuriedėdama vieną sinusoidės periodą, ji apsisuka vieną kartą?

Sprendimas. Elipsės su pusašėmis a, b ilgis reiškiamas integralu

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt,$$

o kreivės $y = c\sin(x/a)$ vieno periodo ilgis – integralu

$$J = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(1 + \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \frac{x}{a}\right)} dx.$$

Atlikę keitinį $t = x/a$, gausime

$$J = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + c^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + c^2 \sin^2 t} dt.$$

Kadangi pagal sąlygą integralai I ir J lygūs, tai

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + (a^2 + c^2) \sin^2 t} dt.$$

Taigi turi būti $b^2 = a^2 + c^2$, nes priešingu atveju viena iš funkcijų po integralu būtų didesnė.

• • • $\alpha + \omega$ • • •