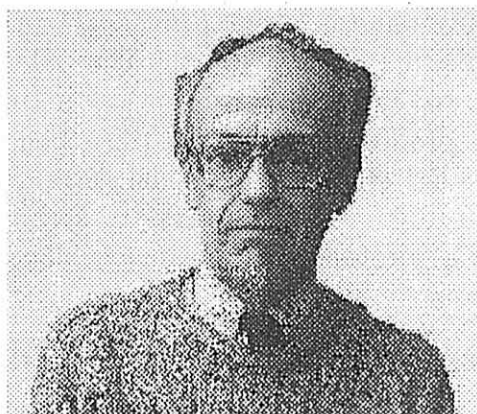


Ronald Brown
Timothy Porter

Matematikos metodologija



Šio straipsnio autoriai – Velso universiteto Bangore profesorai. Profesorius Ronald Brown 1962 metais Oksfordo universitete gavo filosofijos mokslų daktaro laipsnį, dėstė Didžiosios Britanijos universitetuose, nuo 1970 metų – Velso universiteto grynosios matematikos profesorius. Jo mokslinių interesų sritis – bendroji ir algebrinė topologija, kategorijų teorija, grupių teorija, algebrinė homotopija, taip pat – matematikos dėstymas ir populiarinimas. Profesoriumi vadovaujant net 21 studentas įgijo filosofijos mokslų daktaro laipsnį. Jeigu turite galimybę, aplankykite Ronaldo Browno ir jo bendradarbių sukurtą Interneto tinklapį „Simbolinės skulptūros ir matematika“. Tinklapio adresas: <http://www.bangor.ac.uk/SculMath/>

Profesorius Timothy Porter filosofijos mokslų daktaro laipsnį įgijo Susekso universitete 1971 metais. Nuo 1979 metų dirba Bangore. Jo mokslinių tyrinėjimų sritis – algebrinė topologija ir taikomosios kategorijų teorijos uždaviniai. Timothy Porter taip pat domisi matematikos populiarinimu. Jis dalyvavo kuriant „Matematikos ir mazgų parodą“. Adresas Internetė: <http://www.bangor.ac.uk/mc/CPM/exhibit/>

Šis straipsnis pirmą kartą pasirodė žurnale „*The Mathematical Gazette*“ (*The Math. Gazette*, 79, N. 485, 1985, 321–324). Autoriai mielai sutiko, kad jį išverstume mūsų žurnalo skaitytojams.

Įvadas

Šis straipsnis išsirutuliojo iš paskaitos, kurią pirmasis autorius 1993 metų lapkričio mėnesį skaitė Sevilijos universiteto geometrijos ir topologijos katedros studentams ir dėstytojams. Čia aptariamais klausimais mes nuolat diskutuodavome Bangore, tai paaiškina, kodėl straipsnio autoriai yra du.

Minėtos paskaitos ir mūsų diskusijų tikslas buvo padėti suprasti studentams jų srities tikslus ir laimėjimus, o taip pat – sužadinti pasididžiavimą jais ir išaiškinti juos savo draugams ir artimiesiems. Pasididžiavimas turėtų padidinti ir susižavėjimą, nesvarbu, kokie būtų kiekvieno iš jų asmeniniai laimėjimai. Dėl šios priežasties straipsnyje juntamas kreipimosi į studentus tonas.

Mes nemanome, kad tik mes keliame tokius klausimus. Dr. Allan Muir (Sičio universitetas, *City University*) prieš kelerius metus buvo organizavęs diskusijų grupę „Kaip matematika veikia“, panaši grupė yra JAV. Daugelis panašių problemų aptariama Daviso ir Hersho [2,3] knygose.

Mes pradėdame nuo tam tikrų bendrų klausimų, kurie, mūsų manymu, galėtų padėti studentams susidaryti tam tikrą nuomonę. Visų lygių matematikos dėstytojai turėtų apsvarstyti, kiek laiko ir pastangų reikėtų skirti (jei iš viso reikia) profesionaliam panašių klausimų ir atsakymų į juos aptarimui ir įvertinimui.

Keli esminiai klausimai matematikams

- Ar matematika yra svarbi? Jei taip, – kam, kokiuose kontekstuose ir kodėl?
- Kokia matematikos prigimtis, lyginat ją su kitais mokslais?
- Kokius objektus tiria matematika?
- Kokia yra matematikos metodologija, kaip matematikai dirba savo darbą?
- Ar matematikoje tęsiami tyrinėjimai? Kokie yra bendrieji ir pagrindiniai matematikos tyrinėjimų tikslai? Kaip jie vykdomi? Kokie svarbiausi jų laimėjimai?
- Kas yra gera matematika?

Galima manyti, kad šių klausimų svarstymas yra tik laiko gaišimas, kad matematikai neturi tuo užsiimti. A. Einšteino citata (1916, [4]) mes paremsime priešingą nuomonę:

Kaip talentingas mokslininkas susidomi pažinimo teorija? Nejau nėra svarbesnių darbų, kuriuos savo srityje jis galėtų padaryti? Aš tai girdžiu iš daugelio mano kolegų profesionalų, arba dar dažniauuntu, kad jie taip galvoja.

Aš negaliu palaikyti šios nuomonės. Kai pagalvoju apie gabiausius studentus, su kuriais susidūriau dėstydamas, t. y. apie tuos, kurie pasižymėjo savo nepriklausomais vertinimais, ne vien tik miklumu, suprantu, kad jiems rūpi pažinimo teorija. Jie mėgsta pradėti diskusijas apie mokslo metodus ir tikslus, jų atkaklumas, su kuriuo jie gina savo pažiūras, nedviprasmiškai rodo, kad ši sritis yra jiems svarbi.

Iš tikrųjų, tai nėra kažkas keisto. Jeigu aš gilinuosi į mokslą ne dėl kokių nors išorinių priežasčių, kaip pinigai arba ambicijos, ir netgi (arba ne vien tik) ne dėl sporto, smegenų gimnastikos teikiamų malonumų, tai mane turi gyvai dominti klausimas, kokią tikslą turi pasiekti mokslas, kuriam aš ketinu pasišvęsti?

Kiek teisingi yra bendrieji šio mokslo rezultatai? Kas yra esminga, o kas priklauso tik nuo vystymosi atsitiktinumų? Sąvokos, kurios pasirodė naudingos paprastai aiškinant dalykus, daro mums tokią didelę įtaką, kad mes pamirštame jų žemišką kilmę ir laikome jas nekintamais faktais. Jos pavadinamos „konceptualiomis būtinybėmis“, „*a priori* situacijomis“ ir kt. Tokios klaidos dažnai ilgam užtveria kelią mokslo progresui. Taigi tai nėra tuščias žaidimas, kai imamės analizuoti žinomas sąvokas ir atskleidžiame sąlygas, lemiančias jų naudą, bei jų nuoseklios raidos kelią...

Yra ir daugiau priežasčių, dėl kurių minėtus klausimus verta nagrinėti. Vienas Jungtinės Karalystės matematikos profesorius, su kuriuo mes juos aptarėme, priminė, kad tokių diskusijų tikslas – paskatinti studentus apmąstyti matematikos metodus. Jis pastebėjo, tartum pats būtų tai pirmą kartą išvydęs, kad žmogus skiriasi nuo kitų gyvų būtybių gebėjimu mąstyti apie tai, ką jis daro, ir ši savybė teigiamai veikia daugelį žmonių veiklos sričių. Vienas iš tokio apmąstymo aspektų – nuomonės apie vertingumą formavimas, savybė, būdinga tik žmonėms, arba bent jau ta prasme, kad tai vyksta daug bendraujant.

Apskritai veiklos apmąstymas yra geras būdas didinti jos efektyvumą, kadangi mes analizuojame, kas yra svarbu ir kaip galima veikti išvengiant elementarių metodo klaidų. Taigi išmintinga apmąstyti ir matematinę veiklą. Svarstydami mes geriau suvokiame ir veiklos reikšmę.

Kitą stimulą šiems klausimams svarstyti suteikia lyginimas su ugdymo meno srityje aspektais. Girdėjome tvirtinant, kad ugdymas meno bei dizaino srityse žymiai labiau nei moksle skatina studentų domėjimąsi ir savitumą, taigi naudinga panagrinėti, kaip dirba meno pedagogai. Štai tikslai kurie keliami dizaino kurse:

- Išmokyti studentus gero dizaino principų.
- Skatinti savitumą ir kūrybingumą.
- Suteikti studentams praktinių įgūdžių, kad jie būsimajame darbe galėtų taikyti gero dizaino principus.

Ar iš šių tikslų matematikai gali ko nors pasimokyti? Ar būtų protinga, kelti tokius tikslus matematikos kurse, pakeitus žodį „dizainas“ žodžiu „matematika“? Jei ne, tai kodėl?

Štai dar viena citata iš T. Danzigo [1] knygos:

Tai matematikos knyga: joje nagrinėjami simboliai ir formos bei idėjos, slypinčios už tų simbolių ir formų. Manau, kad dabartinės mokyklų programos, išbraukdamos matematiką iš kultūros konteksto ir palikdamos tik nuogą techninių veiksmų skeletą, atstūmė nuo matematikos daugelį subtilių protų. Knygos tikslas – atkurti šį kultūrinį turinį ir pavaizduoti matematikos raidą, kaip neatsiejamą žmonijos istorijos dalį.

Ar šios mintys yra kuo nors vertingos aukštesnio lygio matematikos dėstymo požiūriu? Knyga parašyta apie 1930 metus. Ar mes toli pasistūmėjome ieškodami atsakymų į joje keliamas problemas?

O dabar panagrinėkime vieną po kito mūsų klausimus.

Kuo svarbi matematika?

Nėra pakankamai gerai suvokiama, kiek daug matematika reiškia mūsų kasdieniniame gyvenime. Žinoma, dalis matematikos, kurią naudojame, yra labai sena: skaičiai, grafikai, sudėtis ir daugyba. Nesunku pamiršti, kad visa tai kažkada buvo dideli atradimai. Tvirtinama, kad romėniškų skaitmenų pakeitimas arabiškaisiais ir dėl to atsiradusi galimybė patogiai tvarkyti buhalteriją, paskatino Venecijos suklestėjimą XIV amžiuje. Ta proga įdomu pabrėžti pedantiškumo matematikoje reikšmę. Svarbiausias arabiškos sistemos bruožas yra nulio naudojimas. Iš pirmo žvilgsnio absurdiška skaičiuoti daiktus tuščioje dėžėje. Nuostabu, kokią reikšmę tai turi adekvačiai skaičiavimo sistemai, kurioje nulis naudojamas kaip vietos žymeklis. Nulio sąvokos nebuvimas šimtmečius buvo matematikos vystymosi kliūtis.

O štai aukštesnis lygmuo: be klaidas taisančių kodų matematikos neturėtume puikių Jupiterio nuotraukų, kurias atsiuntė „Voyager II“. Ši matematika įvairiais aspektais taip pat svarbi telekomunikacijų ir kompiuterių sričiai, taip pat kompaktiniams grotuvams. Štai įdomi istorija apie šį taikymą [7]. „Sony“ ir olandų kompanijos „Philips“ vadovai tarėsi dėl standartų kompaktiniams grotuvams. Japonai pareiškė, kad olandų pasiūlymai klaidų taisymui kelia mažesnius reikalavimus nei jų, todėl galų gale buvo priimti japonų pasiūlymai. Sugrįžę į Eindhoveną „Philips“ vadovai sukviėtė mokslo direktorius ir pareiškė, kad kompanija neturi pakankamai gerų ekspertų kodavimo teorijos srityje ir liepė nustatyti, kur Europoje jų galima rasti. Jų nuostabai atsakymas buvo toks: geriausias kodavimo teorijos specialistas yra olandų skaičių teoretikas Van Lintas iš Eindhoveno.

Be matematikos taikymų kriptografijoje nebūtų įmanomi dabartiniai daugelio milijardų finansiniai sandoriai, sudaromi elektroninių ryšių kanalais. Kategorijų teorija, matematinių struktūrų teorija suteikia galimybę kitaip pažvelgti į naujos kartos programinės įrangos ir programų kūrimą.

Visuotinai žinoma, kaip plačiai matematika yra taikoma inžinerijoje, statistikoje ir fizikoje. Įsivaizduojama, kad matematikos vaidmenį perima superkompiuteriai. Nepakankamai suvokiama, kad jie tik realizuoja matematines sąvokas ir idėjas: elektronika yra nuostabi tuo, kad skaičiavimus atlieka ir greitai, ir tiksliai. Pavyzdžiui, kūno skeneriai yra XIX amžiaus matematikos taikymas, įgalinantis rekonstruoti nevienodo tankio kietą kūną, naudojant rentgeno spindulių intensyvumo kitimo matavimus, atliekamus su dideliu skaičiumi spindulių sklaidimo krypčių. Be matematikos nebūtų sukurtos didžiojo sprogo, elementariųjų dalelių teorijos.

Kokia matematikos prigimtis?

Čia glūdi tam tikra paslaptis. Nobelio premijos laureatas E. Wigner parašė įžymų esė „Nesuvokiamas matematikos efektyvumas gamtos moksluose“ [8]. Mums svarbiausias žodis yra „nesuvokiamas“. Autorius kalba apie nuostabų matematikos sugebėjimą numatyti rezultatus, sutampančius su eksperimento rezultatais iki aštuntojo reikšminio skaitmens. Kaip yra įmanomas toks nepaprastas tikslumas?

Atrodo tikėtina, kad visiškas matematikos sėkmės „paaishkinimas“ pareikalautų geresnio kalbos, psichologijos, smegenų struktūros ir veiklos supratimo. Negana to, tokio supratimo raidai gali prireikti, iš tiesų turi prireikti, naujos rūšies matematikos. Vis dar svarbu analizuoti matematikos akiratį ir jos galimybių ribas. Tokia analizė turėtų būti būtina matematikos studijų dalis. Ko vertas studentas, neišmanantis šių dalykų?

Štai kelios šio straipsnio citatos:

... milžiniška matematikos nauda fiziniuose moksluose yra racionaliai nepaaishkinamas, į paslaptį panašus dalykas.

Matematika yra meistriško operavimo su sąvokomis ir taisyklėmis, išrastomis vien tik šiam tikslui, mokslas (tikslas – meistriškas operavimas...).

Svarbiausias vaidmuo tenka sąvokų kūrimui.

Minties darbą, atliekamą formuojant sąvokas, vėliau pateisina meistriškumas, su kuriuo šios sąvokos yra naudojamos.

Teiginys, kad gamtos dėsniai parašyti matematikos kalba, iš tikrųjų buvo pareikštas prieš tris šimtus metų (jis priskiriamas Galilėjui), dabar jis teisingas labiau nei kada anksčiau.

Iš visų man žinomų matematikos sąvokų atsiradimo fizikoje paaishkinimų taikliausias yra Einšteino pastebėjimas: tik tas fizikos teorijas mes noriai priimame, kurios yra gražios. Suprantama, kad matematikos sąvokos, kuriomis galima išradingai naudotis, turi grožio kokybę.

Aptariant šiuos klausimus, įdomu matematiką palyginti su kitais dalykais, apžvelgti kitų dalykų tyrinėjimo objektus ir jų svarbą.

Įsivaizduokime, kad paklausėme keleto savo kolegų mokslininkų, kodėl reikia tyrinėti jų sritis. Atsakymai galėtų būti tokie.

Astronomas: Astronomai studijuoja visatos pradžią, milijardus laiko tėkmės metų, taip pat didžiausius atstumus erdvėje. Kas gali būti labiau jaudinančio už tai? Mes turime šiek tiek pinigų savo tyrimams, bet, žinoma, nepakankamai.

Fizikas: Fizikai tiria materijos sandaros pagrindus. Kas gali būti nuostabiau? Be fizikos, pavyzdžiui, nebūtų ir astronomijos. Todėl žymiai daugiau pačių geriausių studentų turėtų studijuoti fiziką, o vyriausybė turėtų negailėti mums pinigų.

Chemikas: Chemikai priverčia molekules mums dirbti, taigi chemija yra mūsų kasdieninio gyvenimo dalis. Be chemijos atradimų būtų neįmanoma tyrinėti žvaigždžių, suprasti biologiją arba planetų susidarymą. Taigi daugybė gabiausių studentų turėtų pasirinkti chemiją, o vyriausybė – duoti mums daugybę pinigų.

Biologas: Biologija – gyvybės mokslas. Kas yra gyvybė? Kaip ji atsirado? Kaip ji sąveikauja su mumis ir pasauliu? Mums visiems rūpi gyvybė. Todėl kur kas daugiau studentų turėtų studijuoti biologiją, o vyriausybė – duoti mums daug daugiau lėšų.

Inžinierius: Inžinerija kuria daiktus, kontroliuojančius mūsų aplinką ir dirbančius už mus. Be inžinerijos moderni civilizacija yra neįmanoma. Žymiai daugiau studentų turėtų studijuoti inžinerinius mokslus, o vyriausybė – skirti mums daugiau pinigų.

Žinoma, galėtume išklausti ir daug kitų sričių šalininkų. Mes šiek tiek pabrėžėme jų susirūpinimą pinigais. Tačiau veiklos finansavimo lygis rodo, kiek reikšminga ta veikla yra laikoma.

O dabar kreipkimės į matematikus ir išklauskime jų nuomonę ir argumentus, kuriais jie grindžia savo egzistavimą kovoje už vietą mokslų sistemoje. Gali atsitikti, kad net įžymus matematikas jums neduos aiškaus atsakymo. Pavyzdžiui, kaip vienas iš reikšmingų matematikos laimėjimų gali būti paminėtas didžiosios Ferma teoremos įrodymas. Vis dėlto, ar gali šis įrodymas pritraukti minias ir lėšas? Kodėl turėtų pritraukti? Žinoma, šis sprendimas yra didžiulis laimėjimas, bet kokia jo reikšmė apskritai? Kodėl jam pasiekti buvo dėta tiek daug pastangų? Gal šį laimėjimą galima palyginti su kokio nors rekordo pagerinimu? Į šiuos klausimus yra ir atsakymai, tačiau, atrodo, kad ilgaamžės problemos sprendimo šlovės spindesyje patys klausimai nėra keliami.

Tačiau klausimai nėra beprasmingi. Resursai yra riboti. Kiekvieno asmens interesai turi ribas. Mums reikia labiau įtikinančių argumentų, kurie paremtų mūsų sritį ir paskatintų žmones ją studijuoti. Štai mūsų bandymas.

Matematikas: Matematika tiria modelius ir struktūras, ji vysto jų loginę analizę ir skaičiavimus. Mums, siekiantiems suprasti pasaulį, kad galėtume jame išlikti, yra būtinas mokslas apie struktūras ir metodus nustatyti, kokie teiginiai apie jas yra teisingi ir įdomūs. Taigi matematika galų gale yra būtinas visų kitų mokslų pamatas. Šis tvirtinimas yra pirmoji dalis mūsų kreipimosi, siekiant jūsų dėmesio ir paramos mūsų tyrimams. Kitoje dalyje mes norime pabrėžti naujų modelių ir struktūrų, atsiradusių mūsų tyrinėjimuose, žavesį, netikėtus sąryšius. Matematika taip pat moko kuklumo. Mes žinome, kaip kartais gali būti sunku įrodyti, kad iš pažiūros paprastas ir aiškus teiginys yra teisingas. Mes žinome matematinės tiesos ribas, nes ne viską, kas yra teisinga, galima įrodyti; tai teigia Gödelio rezultatas apie neišsprendžiamumą. Jūs nesurasite matematiko, tvirtinančio, kad jau yra galutinis sprendimas, vieninga viską paaškinanti teorija.

Mes veikiau ieškome netikėtumų, atveriančių naujus požiūrius į pasaulį ir dar netyrinėtus lobynus. Mūsų patirtis sako, kad jie atsivers. Matematikui pasaulis atrodo ne tik keistesnis negu jums, bet dargi keistesnis, negu jūs galite įsivaizduoti. Mūsų darbas yra tirti šį keistumą.

Ką tyrinėja matematika?

Iš dalies į šį klausimą jau atsakyta. Matematika tyrinėja ne daiktus, bet jų ryšius. Šie ryšiai aprašomi „sąvokomis“. Taigi mes kalbame apie atstumą tarp miestų ir jaučiame, kad jis yra mažiau „realus“ negu patys miestai. Vis dėlto daiktų tarpusavio ryšiai ir jų supratimas turi lemiamos reikšmės mūsų buvimui ir veiklai pasaulyje. Šia prasme matematika turi kalbos pobūdį. Reikia pabrėžti, kad mūsų sugebėjimas naudotis sąvokomis ir ryšiais vystėsi ir, matyt, toliau vystysis.

Šiuo atžvilgiu atrodo keista, kad matematikai savo srities laimėjimais dažniausiai laiko žymių problemų sprendimus. Žinoma, tokie sprendimai suteikia jų autoriams šlovės ir sėkmės, bent jau šlovės matematikų pasaulyje. Tačiau matematikos ir jos taikymų istorija rodo, kad būtent matematikos kalba, sąvokos ir metodai turi išliekamąją vertę ir tampa kasdieninio naudojimo dalykais. Mes jau anksčiau minėjome kelis pavyzdžius. Aukštesniu lygmeniu galima teigti, kad be šios kalbos, pavyzdžiui, grupių teorijos ir Hilberto erdvių, teorinė fizika būtų neįsivaizduojama.

Štai keletas didžiųjų sąvokų, tyrinėjamų griežtame matematiniam kontekste:

skaičius, ilgis, plotas, tūris, kitimo greitis, atsitiktinumas, skaičiavimas ir skaičiuojamumas, simetrija, judesys, jėga, energija, kreivumas, erdvė, tolydumas, begalybė, dedukcija.

Sukurti matematiką, naujų sąvokų kūrimo meistro Aleksandro Grothendiecko žodžiais tariant, dažnai reiškia „prikelti naujas sąvokas iš tamsos“ [6]. Būtent šios naujos sąvokos supaprastina sudėtingus dalykus, parodo, ką turime daryti, veda į kelią.

Labai svarbu, kaip matematika apibrėžia sąvokas ir operuoja jomis, sudarydama matematines struktūras. Šios struktūros, šie modeliai parodo sąvokų ryšius ir jų struktūrinę elgesį. Kaip minėta anksčiau, matematika tyrinėja modelius ir struktūras. Šie modeliai ir struktūros yra abstraktūs, apie tai mes kalbėsime vėliau.

Kas yra matematikos metodologija?

Tai sritis, kuri nei dažnai, nei išsamiai nestudijuojama. Pauliaus Erdőso žodžiais „matematika yra būdas paversti kavą teoremomis“. Gali būti, tačiau pradedančiajam tai nedaug tesako. Taigi apžvelkime kelis klausimus, aptariamus P. Daviso ir R. Hersho [2,3] knygoje „Matematinė patirtis“ ir „Dekarto svajonė“, ypač pirmosios knygos skyriuje „Vidinės temos“.

(i) Simboliai

Simboliai ir simboliniai žymenys yra viena iš matematikos ypatybių ir būtent ta, kuri atstumia daugumą žmonių. Žmonės sako, kad jie gali suprasti matematiką, kol neprasideda iksai ir ygrekai. Manipuliavimas simboliais pagal tam tikras taisykles yra svarbi matematinio meno dalis. Kartais tenka mokyti žmones, norinčius perprasti ekonomiką, bet nesugebančius iš $x + 2 = 4$ išvesti $x = 2$. Jiems labai sunku suprasti ir sudėtingas ekonomikos sąvokas. Labai sudėtingi ryšiai gali būti paprastai išreiškiami simboliškai, to beveik neįmanoma padaryti vien žodžiais. Ši reišimo simboliais ekonomija nuolat didėja, kai simboliai naudojami aukštesnio lygmens sąvokoms žymėti ir veiksmų su simboliais taisyklės pradedamos taikyti veiksmams su sąvokomis.

Šiek tiek perdedant sakoma, kad matematikos istorija yra žymenų tobulėjimo istorija. Tai atspindi tam tikras proto, kuriam reikia nuorodų ir metaforų pagalbos ir vadovavimo, baigtinės prigimties savybes.

Kai kurie simboliai patys yra metaforos. Pavyzdžiui: $=, <, \leq, \subset, \angle, \int$ ir taip toliau. Su kitais taip stipriai susijusios tam tikros asociacijos, kad mes juos galime naudoti kaip metaforas. A. N. Whiteheado žodžiais tariant, simboliais galima išreikšti „ekonomiškai ir tiksliai“. Laikui bėgant, atskirų simbolių naudojimas keičiasi, kai matematikai prie jų įpranta ir randa atitinkamus naujus žymenis.

Kartais žymenys, atsiradę dėl matematikų tingumo, veda prie naujų teorijų. Pavyzdžiui, reiškiniai

$$(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)$$

laikui bėgant sutrumpėjo iki Ax ; kaip matote, tai lengviau užrašyti nesuprantant, ką užrašas reiškia. Siekiant tiksliai atlikti veiksmus su šiomis santrumponėmis, buvo išvystytos veiksmų su vadinamosiomis matricomis taisyklės, dabar plačiai naudojamos tiek matematikoje, tiek gamtos moksluose bei inžinerijoje.

O štai pavyzdys artimas vienam iš mūsų tyrinėjimų. Pirmasis autorius daugelį metų domėjosi, ar linijiniai matematikos žymenys yra būtinybė, ar istorinė išdava, padiktuota spausdinimo poreikių. Šio lingvistinio klausimo analizė padėjo atsirasti naujos rūšies „aukštesnės dimensijos algebrai“, kurioje simboliai susiję ne tik su stovinčiais kairėje ir dešinėje, bet taip pat ir su parašytais viršuje ir apačioje, taip pat ir kitame puslapyje. Tokia algebra geriau atitinka tam tikras geometrines situacijas ir padeda atsirasti naujoms teoremų formulėms ir įrodymams, naujiems skaičiavimams ir požiūriams.

(ii) Abstrakcija

Tai esminė matematikos dalis, taip pat paverčianti matematiką daugumos žmonių akyse nesuprantamu dalyku.

Kaip jau buvo sakyta, matematinės struktūros yra abstrakčios, apibrėžiamos jų tarpusavio ryšiais. Jos mąstomos, bet nesuvokiamos pojūčiais. Abstrakčių pranašumai yra trejopi.

- Abstrakti teorija koduoja mūsų žinias apie daugybę atskirų pavyzdžių taip palengvindama bendrų bruožų tyrinėjimą. Vienos teorijos pakanka daugybei pakeisti. Šis kodavimas naudoja ne tik pačių daiktų, bet ir daiktų ryšių bei elgesio analogijas. Suradus šias analogijas pakeisti daugybę abstrakčia teorija, yra svarbus matematikos metodas.
- Jeigu teorija sukurta, galima ją taikyti naujiems pavyzdžiams. Ši galimybė yra susižavėjimo ir džiaugsmo šūkinių „Tai primena man ...!“ šaltinis. Pavyzdys naujas, tačiau pagrindiniai jo teorijos bruožai jau yra, tik atsiverskite jau parašytus puslapius.
- Abstrakti teorija supaprastina įrodymus. Tai netikėtumas, tačiau paprastai jis pasitvirtina. Abstrakti teorija išryškina esminius bruožus. Įdomu žinoti, ar teorema arba faktas teisingas esant bendrai situacijai, ar tik atskiru atveju. Abstrakti teorija leidžia atsisakyti nesvarbių aspektų.

(iii) Apibendrinimas ir išvystymas

Jie turi su abstrakcija bendrų bruožų, bet paprastai taikomi skirtingai. Stataus trikampio su kraštinėmis (3, 4, 5) apibendrinimas yra Pitagoro teorema, o išvystymas – didžioji Ferma teorema, teigianti, kad lygtis $x^n + y^n = z^n$ neišsprendžiama sveikaisiais skaičiais x, y, z , kai natūralusis skaičius n didesnis už 2. Neseniai buvo sukurtas šios teoremos įrodymas, tiesa, su trūkumu, kuris dabar jau pašalintas.

(iv) Įrodymas

Įrodymų griežtumas yra išskirtinė matematikos ypatybė. Būtent dėl jos matematika yra svarbi inžinerijos, saugumo, fizikos ir kitų sričių klausimams.

Matematikos įrodymo, pagrįstumo sąvoka yra bendro klausimo apie pagrįstumą mokslo srityje aspektas. Kiekviena sritis, pradedant socialiniais mokslais, ekonomika, chemija, biologija, edukologija, teise, literatūra ir taip toliau turi savo pagrįstumo sampratą, ir klausimas apie šių sampratų skirtumus ir naudojimą yra ypač įdomus.

Klausimas, kas matematikoje yra laikytina pagrįstais argumentais, vis dar yra ginčų ir diskusijų objektas, ypač todėl, kad egzistuoja labai ilgi įrodymai (pavyzdžiui, užimantys 15 000 puslapių [5]), ir vizualizacijai, eksperimentams ir skaičiavimams naudojami kompiuteriai.

(v) Matematikos objektų egzistavimas

Didis matematikas įtikinėjo, kad pagrindinė matematikos dėstymo problema yra išmokyti matematikos objektų realumo. Kas yra šis realumas? Kokia prasme šie objektai egzistuoja?

Šis klausimas buvo daugelio matematikos filosofų dėmesio centre, tačiau dėmesys jam galbūt blėsta. Matematika dažnai kalba apie procesus. Klausimas apie matematinės struktūros egzistavimą panašus į klausimą, ar šachmatų žaidimas egzistuoja. Aišku, jis egzistuoja kitaip negu stalai ir kėdės, bet, nepaisant to, jis daro įtaką daugelio žmonių gyvenimams ir išlaiko pinigų testą. (Ar jis pelno pinigų? Taip, pavyzdžiui, pasaulio čempionams ir šachmatų įrangos gamintojams.)

Beje matematinių sąvokų ir metodų ryšį su procesais rodo ir tai, kad raumenų veiklos ritmo atmintis svarbi matematiko darbui. Didelė dalis matematikos susijusi su pasikartojančių procesų atlikimu ir įsisąmoninimu. Matematikai gerai supranta ir įsivaizduoja judančius daiktus, jų dydžiai keliama iš vienos lygties pusės į kitą, formos keičiasi erdvėje. Rankų ir kojų judesiais jie išreiškia, tai kas vyksta. Idėjos ir objektai, apie kuriuos matematikai kalba, kartais yra daugybės tokių prisimintų procesų sanglauda. Šių idėjų rašytinė išraiška, priešingai, dažnai būna sausa ir glausta, ir dėl to iš dalies būna sunku išmokyti naudotis bei taikyti šias idėjas ir objektus. Kita vertus, tai kiekvienam suteikia galimybę labiausiai tinkamu būdu juos įsisavinti ir interpretuoti.

(vi) Begalybė

Begalybės prijaukinimas, arba toks vaizduotės išplėtojimas, kad ji apimtų begalines operacijas, yra vienas iš matematikos džiaugsmų, kartu ir vienas iš skandalų. Ar šie begaliniai objektai realūs? Netikėta, kad šie begaliniai, galbūt nerealiūs objektai gali būti naudojami įrodinėjant teiginius apie realius baigtinius daiktus, ir tai vėl matematikos paslapties bruožas. Tarkime, kad šie begaliniai objektai naudojami įrodinėjant branduolinio įrenginio saugumo sąlygas arba teiginius apie lėktuvų nusileidimą. Kiek galima pasikliauti tokiais įrodymais? Tai yra aktualūs klausimai.

Ar matematikoje tęsiami tyrimai?

Tie, kas nori tuo praktiškai įsitikinti, tepažiūrė, kaip pasikeitė *Mathematical Reviews* * nuo jo leidimo pradžios 1940 metais. Šiame kas mėnesį leidžiamame žurnale spausdinamos matematinių straipsnių santraukos. Grubiai kalbant, penkių puslapių straipsniui tenka kelios pastraipos. Puslapių skaičiumi leidinys per šiuos metus išaugo vienuolika kartų. Kiekvieną mėnesį išspausdinama apie 400 didelio formato puslapių matematinių straipsnių santraukų. Iš tiesų, tai matematikos aukso amžius tiek kiekybės, tiek kokybės atžvilgiu.

Tyrimų tikslai yra įvairūs. Vienas iš jų – išplėsti žinias apie tam tikros rūšies struktūras, kurios jau buvo apibrėžtos. Kitas – pradėti naujai atsiradusių svarbių struktūrų tyrimą. Atsiranda vis naujų struktūrų ryšių. Visada išlieka paprastumo siekis, ieškoma struktūrų, kurios paaikškina kitas struktūras ir padeda mums suprasti, kaip jos elgiasi ir yra tarpusavyje susijusios.

Pradedantiesiems ir platesnei visuomenei nelengva suprasti, kaip matematiniai tyrinėjimai vykdomi. Mes pateikiame keletą nuorodų kaip keturiais būdais galima vykdyti darbą. Žinoma, būdų yra gerokai daugiau, galų gale kiekvienas tyrinėtojas turi pats susikurti savąją sėkmės strategiją. Taip pat sunku nuspręsti, ką jau reikia žinoti, pradedant tyrimo darbą. Gerai žinomas atsakymas į šį klausimą skamba taip: „Viską arba nieko.“

1 metodas. Standartinio metodo taikymas įprastinėms. problemoms

Tai garantuoja sėkmę, jeigu tik šiuo būdu besinaudojantis yra pakankamai gerai įsisavinęs standartinį metodą. Šis būdas tikriausiai yra kiekvieno sėkmingo

* Amerikos matematikų draugijos leidžiamas referatyvinis žurnalas (Vert. past.).

tyrimo projekto dalis. Išties įprastinis matematinio tyrinėjimo siekimas yra suvesti problemą į jau nagrinėtą uždavinį. Jeigu pradinis uždavinys per sunkus, tai įprastinė strategija reikalauja supaprastinti jį, kad jis taptų standartinis, ir tik po to įvesti sudėtingesnes detales, paverčiančias įprastinį uždavinį nauju. Bendra prielaida gali būti ta, kad tik paprastus veiksmus galima atlikti. Taigi metodo esmė – suvesti problemą į tokią, kurios paprastumas aiškus. Jei kyla abejonių, visų pirma atlikite, tai kas akivaizdu.

Tie, kuriems praktika padeda tapti įgudusiais standartinių metodų taikytojais, vieną gražią dieną gali pastebėti, kad savo įgūdžius jie gali pritaikyti iki šiol nenagrinėtai problemai, ir tai gali duoti naujų ir svarbių rezultatų.

Didelę matematiko ugdymo dalį kaip tik ir sudaro žinių ir įgūdžių, reikalingų darbui pasirinktoje srityje, įgijimas.

2 metodas. Žymios pažinimo priešakinio fronto problemos. ataka

Tai įžymaus uždavinio ties pačia pažinimo riba atakos strategija. Jos pranašumas tas, kad jei pasiseks, tapsite įžymus. Sunkiau įvertinti jūsų sėkmės galimybes. Tikriausiai prireiks naujų idėjų.

Jaunam žmogui tai pats ambicingiausias metodas. Vis dėlto 1964 metais pokalbyje su pirmuoju autoriumi S. Ulamas pastebėjo, kad nors metodas ir gali būti patrauklus jaunam ambicingam asmeniui, susitelkimas ties tokiu uždaviniu gali sutrukdyti išvystyti labiausiai jam charakteringą matematikos rūšį, nes sprendžiami kitų žmonių uždaviniai.

Paprastai imamas mažesnių uždavinių ties pažinimo horizontu, uždavinių, kuriems išspręsti nebuvo dėta tiek daug pastangų, taigi ir sėkmė juos sprendžiant yra labiau tikėtina. Jums visada teks išnagrinėti, kas jau daryta, kokios technikos yra naudojamos, ką reikia įveikti.

Paranku turėti uždavinių su aiškiais sėkmės kriterijais: atsakymu „taip“ arba „ne“ į tam tikrą klausimą. Kita vertus, negalėjimas pateikti sprendimo taip pat yra aiškus įbrėžimas, kaip ir per lengvos problemos sprendimas. Sprendžiant uždavinį matematikui tenka savo strategijoje numatyti planą tiek mažos, tiek didelės sėkmės atveju.

3 metodas. Skirtingų pažinimo sričių susiejimas.

Vadovaudamiesi šiuo metodu jūs išnagrinėjate skirtingų sričių pradmenis ir randate jų ryšius. Taigi jūs užpildote tarpus tarp viršūnių, nes dažniausiai „priešakinio fronto“ žmonės užsiėmę tų viršūnių kūrimu. Šio metodo pranašumas tas, kad jūs įgyjate žinių iš skirtingų sričių, ir naudingu būdu, nes jūsų darbas – sujungti abi sritis. Tai geras metodas daktaro disertacijai rašyti, nes vadovas dažnai mato ryšius nors ir nėra išvystęs jų detalių. Tai taip pat skatina bendrąjį matematikos vieningumą. Kitas pranašumas – jūs įprantate įrodinėti nedidelius, bet naudingus rezultatus, padedančius užpildyti tarpus ir susidaryti visumos vaizdą.

4 metodas. Tyrimai dangaus žydrinėje (*blue sky research*).

Jūs turite tik tam tikrą nuojautą apie matematiką, kuri turėtų egzistuoti, bei šioias tokias jos charakteristikas. Taip pat keletą nuorodų į tai, iš ko

ta matematika turėtų būti sukurta. Tikra matematika reikalauja apibrėžimų, pavyzdžių, teiginių, teoremų, įrodymų, skaičiavimų, bet iš pradžių viso to nėra. Juos reikia per tam tikrą laiką surinkti. Kokia tvarka tai turi būti padaryta, ir kaip svarbus bus šis darbas? Kol teorijos nėra, į tai negalima atsakyti, o teorija neiškils kaip Venera, visiškai jūros sukurta. Teorija formuojasi metų slinkyje, ir stiprus tyrimų krypties reikšmės jausmas yra būtinas motyvas leisti į ilgą kelią. Mes abu dešimtmečiais tyrinėjome pagal šią schemą kaip ir pagal kitas. 1960 metų viduryje pirmasis autorius suformulavo aukštesnės dimensijos algebros temą. Šioje algebroje simboliai susiję vieni su kitais ne tik linijine tvarka su simboliais dešinėje ir kairėje, bet taip pat ir su simboliais viršuje ir apačioje, ir netgi už puslapio ribų. Tikslas buvo sukurti algebrą glaudžiau susijusią su geometrija, kuri leistų naudoti bendresnę kompozicijos sąvoką. Buvo laukiama, kad ši algebra pateiks naujų teoremų formuluotes ir įrodymus, kurie automatiškai padės atsirasti naujiems skaičiavimo metodams.

Galų gale tai pasitvirtino, ir prie projekto prisidėjo daug žmonių. Vis dėlto ilgą laikotarpį – apie penkerius metus, tebuvo galima pasakyti, kad įmanoma nubrėžti brėžinius, rodančius, kad idėjos turėtų „dirbti“. Problema buvo ta, kad trūko priemonių algebrai, susijusiai su brėžiniais, su geometrija, išreikšti. Šios priemonės buvo palaipsniui sukurtos, ir buvo įdomu stebėti, kaip natūraliai tai vyko, kai idėjos buvo „tiksliai“ suvoktos. Taigi Wignerio citatoje minėto estetinio kriterijaus reikalavimai buvo patenkinti, ir teorija tapo geresnė nei buvusi jos vizija.

Reikia pabrėžti paradoksą, kad tyrimų sėkmės paslaptis yra sėkmingas nesėkmių įvaldymas. Jeigu jūs nepatyrėte nesėkmės, tai greičiausiai tikslai, kuriuos sau kėlėte, yra per paprasti. Įdomūs tyrinėjimai turi turėti rizikos elementą. Jums reikia strategijos situacijoms, kai reikalai prasti: uždavinys yra per lengvas arba per sunkus. Kas toliau? Nesėkmės priežasčių analizė, jų lyginimas su priežastimis, dėl kurių šį uždavinį norima spręsti, nubrėžia tolesnio darbo gaires.

Kas yra gera matematika?

Mes neketiname duoti jokio galutinio atsakymo į šį klausimą, bet pabandysime suformuluoti tam tikrus mūsų siekio aspektus. Išties kaip žurnalų redaktoriai mes turime priimti tokius sprendimus kasdien. Apie naują matematikos straipsnį mes klausiamo: Ar jo rezultatai nauji? Kiek pasistūmėta, lyginant su esama literatūra? Ar straipsnis aiškiai ir gerai parašytas? Ar autorius gerai nusimano, apie šios srities tyrimus ir savo darbo ryšį su jais? Kiek netikėti yra jo rezultatai? Ar jo metodai elegantiški? Ar sukurta naujų metodų?

Dalis tos matematikos, kurią mes vadiname gražia, įveda naujas idėjas ir sąvokas, kurios iki šiol sudėtingus dalykus paverčia paprastais. Tai prieštarauja įspūdžiui, kurį kas nors gali susidaryti, kad matematika turi būti sudėtinga ir veikti žmones panašiai kaip šaltas dušas. Priešingai, gera matematika gali, o gal ir privalo būti paprasta. Tik dažnai mes nežinome, kaip tą pasiekti. Iš pažiūros paprastų argumentų ir netikėtų išvadų bei vingių derinys – štai kas mums visų labiausiai patinka.

Kelia nerimą, kad daug jaunų matematikų baigia studijas taip ir nesusidūrę su diskusija apie „geros matematikos“ sampratą. Kiekvienoje žmonių veiklos srityje klausimas apie vertę kyla ir visuomenei, ir kiekvienam asmeniui. Tai argumentas, kad mokslo srities dėstyme atsispindėtų šis tas iš profesionalų vertybinio požiūrio. Pavyzdžiui, profesionalui negana tik gauti atsakymą, bet taip pat svarbu, jeigu įmanoma, pateikti ir atitinkamą paaiškinimą.

Taigi mes esame už tai, kad mokiniams ir studentams būtų kalbama apie gerą dėstymą, mes netgi skatintume juos varžytis, ne sprendžiant uždavinius, bet aiškinant ir demonstruojant matematinius principus ir jų taikymą. Mūsų darbas kuriant matematinę parodą [9,10] pasirodė esąs labai pamokomas.

Pabaiga

Kartais pareiškiama nuomonė, kad nebeįmanoma atrasti fundamentalios matematikos. Šį požiūrį galima palyginti su nuomone tų, kurie tvirtina, kad fizika užbaigta, pagrindinės problemos išspręstos.

Mes, priešingai, jaučiame, kad matematika išgyvena revoliuciją, tylią, bet vis dėlto revoliuciją. Tai vyksta dviem frontais.

Visų pirma, tai skaičiavimo revoliucija. Jos poveikis operavimui su skaičiais, grafiniam vaizdavimui yra gerai žinomas. Ne taip gerai žinoma programinė įranga, galinti manipuluoti su simboliais ir aksiomomis, bei įranga, automatizuojanti loginius samprotavimus. Iš esmės tai duos matematikams galimybę atlikti milijonus kartų didesnius skaičiavimus ir logines dedukcijas negu jie gali dabar ir nagrinėti tokio sudėtingumo sistemas, kurios pastaruoju metu neįveikiamos. Visų šių galimybių poveikis matematikos dėstymui dar turi būti tinkamai suprastas ir įvertintas, nors daug darbo jau daroma. Poveikis tyrimams jau ir dabar žymus ir turi tendenciją didėti.

Dar subtilesnė yra konceptuali revoliucija. Matematikos, kaip struktūrų tyrimo, akcentas pasireiškia kategorijų teorijoje, kuri matematikos bei algebros priemonėmis tiria struktūras. Kategorijų teorija atskleidė naujus požiūrius į fundamentalias tokių matematikos sričių kaip logika, aibių teorijos pagrindai, sąvokas; išties privertė atkreipti dėmesį į idėją, kad matematikos praktikai reikalingas ne vienas pagrindas, kaip galvota anksčiau, bet alternatyvios aplinkos ir priemonės joms palyginti. Šios idėjos taip pat yra svarbios kompiuterių mokslo raidai, jos, pavyzdžiui, suteikia naujų požiūrių į duomenų struktūras.

Viena iš žavių matematikos ypatybių yra galimybė operuoti įvairiais lygiais, kurie vėliau sąveikauja. Pavyzdžiui, algebrinis matematinių struktūrų tyrimas sukūrė naujas matematines struktūras, atsirado galimybė kai kurias jų taikyti matematikoje ir fizikoje.

Vis dėlto matematikos tyko daug pavojų. Stokojama bendro įvertinimo, ką matematikai yra nuveikę ir kokia matematikos reikšmė. Iš dalies taip yra dėl pačių matematikų, vengiančių apibrėžti ir aiškinti savo sritį plačiąja prasme savo studentams, visuomenei, vyriausybės ir pramonės institucijoms. Juk studentui įmanoma gauti gerą matematikos studijų įvertinimą, nenusimanant, kokie tyrimai šioje srityje vykdomi.

Kitas pavojus glūdi didėjančiame pasitikėjime kompiuteriais, kaip juodomis dėžėmis, pateikiančiomis atsakymus, nesuprantant, kokie procesai atliekami ir kokiomis sąvokomis manipuluojama. Tiek kompiuterių galimybės, tiek jų naudojimo ribos lieka nesuprastos, matematinis pagrindas ignoruojamas ir galbūt nepakankamai vystomas, todėl kompiuteriai gali būti naudojami netinkamais būdais arba peržengiant programinės įrangos dizaino nustatytas ribas. Sakoma, kad kai kurios inžinerijos firmos matematinių tyrimų skyrių atsisako inžinierių, dirbančių su programinės įrangos paketais, labui. Ar tai padidins produktų saugumą ir patikimumą, ar sudarys galimybes naudoti aukštesnio lygmens matematines sąvokas?

Jeigu šių pavojų reikia vengti, tai didėjantis mūsų pradžioje išvardytų klausimų supratimas ir įvertinimas turi esminės reikšmės.

Turėtų būti galimybių paspartinti perėjimą nuo matematikų conceptualių įžvalgų prie mokslinių ir technologinių taikymų. Jiems surasti reikia, kad teisingai būtų suvokiamas matematikų darbas ir matematikos vaidmuo visuomenėje, kurioje gyvename. Rasti būdus tokiam supratimui išsiskleisti yra mūsų pareiga mokslui, kurį mylime.

Padėka. Daugelis šiame straipsnyje iškeltų klausimų buvo aptariami su studentais kurso „Matematika kontekste“, kurį mes kartu vedėme, paskutiniaisiais metais, o taip pat su pirmųjų metų matematikos studentais, klausiusiais kursą „Idėjos matematikoje“. Šių studentų pareikštos diskusijose mintys turėjo didelės įtakos mūsų mąstymui. Mes taip pat dėkojame Rogeriui Bowersui ir Brianui Dentonui, skaičiusiems Liverpulio universitete kursą „Matematika visuomenėje“.

Literatūra

1. Dantzig T. *Number: the Language of Science*. Macmillan, 1930, second edition 1954.
2. Davis P. and Hersch R. *The Mathematical Experience*. Penguin, 1981.
3. Davis P. and Hersch R. *Descartes' dream*. Penguin, 1988.
4. A. Einstein A. (1916) Quoted in *Math Intell.* (1990) 12(2). P. 31.
5. Gorenstein S. The longest proof. *Scientific American*.
6. Grothendieck A. (1985). Private communication.
7. Van Lint J. (1994). Private communication.
8. Wigner E. P. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Comm. in Pure Appl. Math.* 1960. Reprinted in *Symmetries and reflections: scientific essays of Eugene P. Wigner*. Bloomington: Indiana University Press, 1967.
9. Bangor Maths exhibition group. *Mathematics and Knots: Exhibition for the Pop Maths RoadShow*, 1989 (16 A2 boards); also brochure, published by Mathematics and Knots, 1989, Flyer.
10. Brown R. and Porter T. Why we made a mathematical exhibition. In: „The Popularisation of Mathematics.“ Eds. G. Howson and P. Kahane. Cambridge Univ. Press, 1992.