

Algirdas Bastys

Dekarto koordinatės, funkcijos ir signalai



Ieškant tiesos būtinės metodas.

R. Dekartas „Proto vadovavimo taisyklos“

Koordinatė – terminas mirgantis ir matematikos mokslo straipsniuose, ir mokykliniuose vadoveliuose. Ši sąvoka atsirado kaip natūrali skaičių ir geometrijos pasaulių jungtis. Jos užuomazgą mokslo istorikai randa labai tolimoje praeityje. „Istorija – bedugnis šulinys,“ – rašė Tomas Manas. Taigi bet kuris pradžios taškas visada sąlyginis. Tokia sąlygine koordinačių metodo pradžia priimta laikyti R. Dekarto „Geometrijos“ veikalą, pasirodžiusį 1637 metais. Tačiau tų koordinačių, kuriomis mes įpratę naudotis, toje knygoje nerasime. Dabartinė koordinačių samprata susiformavo tik XVIII amžiuje. R. Dekartas parodė, kad geometrinių objektų – taškų ir kreivių – aprašymas skaičiais ir lygtimis atveria naujas matematikos raidos perspektyvas. Šiuolaikinis matematikos pasaulis susideda ne tik iš skaičių, figūrų ir kreivių. Tačiau koordinačių metodas dažnai geriausiai tinkta ir sudėtingiausiems objektams aprašyti.

1. Kaip orientuotis plokščiame pasaulyje?

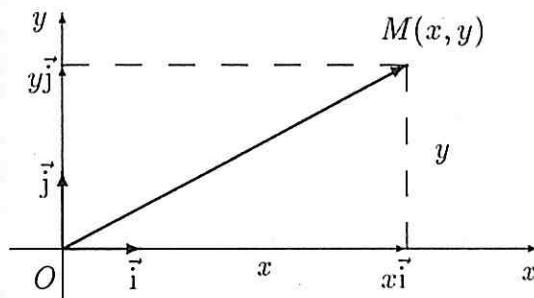
Įsivaizduokime padarus gyvenančius statiniame dvimačiame euklidiniame pasaulyje. Epitetas *statinis* reiškia, kad šiame pasaulyje neegzistuoja *laikas*, žodžiai *dvimatis-euklidinis* pažymi, kad įsivaizduojamo pasaulio scena yra plokštuma. Tarkime, kad dvimačiai sutvérmai norėtų kaip nors aprašyti savo pasaulį, kad galėtų tame orientuotis.

1.1. Dekarto koordinačių sistema

Tokią pasaulį patogu aprašyti Dekarto koordinačių sistema, kurios pagrindą sudaro dvi statmenai besikertančios plokštumos tiesės (žr. 1 pav.). Tarkime, įsivaizduojamo pasaulio gyventojai yra be galo maži. Tuomet juos galėsime žymėti plokštumos taškais $M = M(x, y)$; čia x ir y žymi taško M projekcijas atitinkamai Ox ir Oy ašyse. Vienetinio ilgio vektorių, nukreiptą x ašies kryptimi, pažymėkime simboliu \vec{i} . Analogiską y ašies vektorių žymėsime \vec{j} . Nesunku įsitikinti, kad bet kuriam plokštumos vektoriui \overrightarrow{OM} teisingas dėstynys

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}. \quad (1)$$

• • • $\alpha + \omega$ • • •

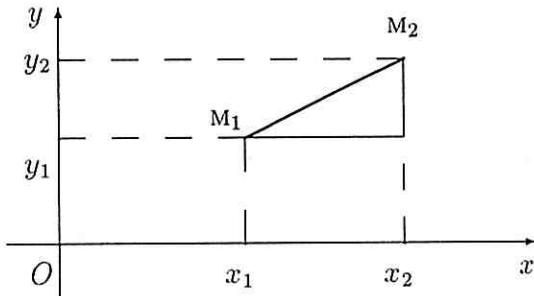


1 pav. Dekarto koordinačių sistema

Sakykime, plokštumos gyventojai yra savo užimamas vietas „patriotai“ ir todėl koordinačių ašis įveda taip, kad koordinačių pradžios taškas sutaptų su jų padėtimi plokštumoje, ir atsitiktinai pasirenka Ox ašies kryptį. Kaip žinoma, būti patriotu dažniausiai naudinga. Iš tikrujų šiame pasaulyje mums svarbiausi yra artimiausiai subjektai ir todėl juos siekiame pažinti geriau. Šia prasme dvimačio pasaulio gyventojai elgiasi teisingai sutapatindami koordinačių pradžią su savo padėties pasaulyje tašku. Tuomet artimiausią kaimyną padėties taškų koordinačių reikšmės moduliu bus mažiausios. Vadinasi, koordinatėms x ir y aprašyti skirdami vienodą skaitmenų skaičių, tiksliausiai nusakysime gretimus kaimynus. Pavyzdžiui, jei koordinatėms užrašyti naudosime 5 reikšminius skaitmenis ir apytiksliai žinosime dviejų kaimynų koordinates $A(1,0256 \pm 0,00005; -3,1495 \pm 0,00005)$ ir $B(10256 \pm 0,5; -31495 \pm 0,5)$, tai A kaimyno padėtis bus apie 10 000 tiksliau lokalizuota už B kaimyno padėti.

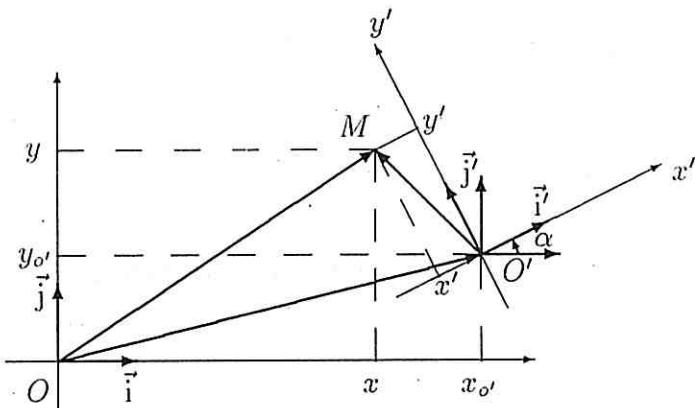
Atstumą tarp bet kurių dviejų plokštumos taškų $M_1(x_1, y_1)$ ir $M_2(x_2, y_2)$ (žr. 2 pav.) galime suskaičiuoti pagal formulę

$$M_1 M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2)$$



2 pav. Atstumas Dekarto koordinačių sistemoje

Fiksavę koordinacijų pradžios tašką O ir abscisių ašį Ox , nubrėsime vienintelę plokštumos tiesę einančią per tašką O ir statmeną Ox ašiai. Ordinačių ašiai Oy apibrėžti pakanka nubrėžtoje tiesėje išskirti teigiamą kryptį, t. y. pasirinkti kurį nors tiesės galą ir jį pažymeti rodykle. Kokiu principu remiantis reikėtų pasirinkti ordinačių ašies kryptį? Pagal mūsų dvimačio pasaulio aprašymą skirtinių gyventojų naudoja skirtinges koordinacijų sistemas – skiriąsi jų pradžios ir abscisių kryptys. Pabandykime įvesti truputį tvarkos reikalaujami, kad skirtinges koordinacijų sistemas būtų galima sutapatinti *poslinkiais* ir *posūkiais*. Tam, kad dvimačio pasaulio gyventojai galėtų pagal šį principą suderinti Ox ir Oy ašių tarpusavio padetį, suteikime jiems aukščio pojūtį. Kitaip tariant, nors ir nejausdami trimačio pasaulio, jie visi vienodai turi jausti, kur jų plokštumos atžvilgiu yra „viršus“ ir kur „apačia“. Tokia prielaida nėra dirbtinė. Mes, trimačio pasaulio gyventojai, savo išsiskiria elementarių dalelių charakteristika – sukinys (angl. *spin*), charakterizuojamas tik orientacija – sukimusi iš kairės į dešinę arba atvirkščiai, sukimusi iš dešinės į kairę.



3 pav. Taško M koordinatės $\{Ox, Oy\}$ ir $\{O'x', O'y'\}$ sistemose

1.2. Skirtingų Dekarto koordinacijų sistemų ryšys

Tarkime, visi stebėtojai orientuoja Ox ir Oy ašis mums išprasta tvarka, t.y. žiūrint iš viršaus abscisių ašis trumpiausiu keliu link ordinačių ašies sukama prieš laikrodžio rodyklę. Panagrinėkime, kokios problemos kyla dvimačiams sutvėrimams dėl vieningos koordinacijų sistemos nebuvimo, t.y. kokiai kainą reikia sumokėti už stebėjimo iš įvairių pradžios taškų patogumą ir Ox ašies krypties pasirinkimo laisvę. Tarkime, turime du skirtinges stebėtojus su koordinacijų sistemomis $\{Ox, Oy\}$ ir $\{O'x', O'y'\}$. Tuomet šie stebėtojai tą patį plokštumos tašką M aprašys skirtinges koordinatėmis: $M(x, y)$ ir $M(x', y')$. Ryšiu tarp (x, y) ir (x', y') koordinacijų rasti reikia informacijos apie $\{Ox, Oy\}$ ir $\{O'x', O'y'\}$ sistemų tarpusavio išsidėstymą. Tarkime, kad antroji koordinacijų sistema paslinkta x_o' ilgio vienetų Ox kryptimi, y_o' ilgio vienetų Oy kryptimi, ir pasukta α radianų kampu, skaičiuojamu prieš

$$\bullet \bullet \bullet \alpha + \omega \bullet \bullet \bullet$$

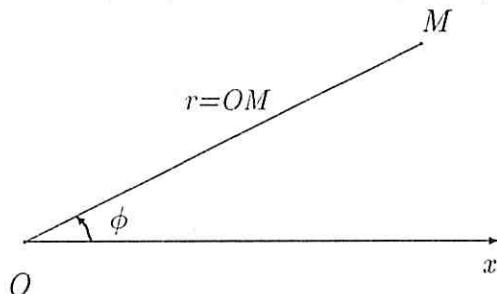
laikrodžio rodykle. Tuomet išreiškė lygybės $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ vektorius $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{O'M}$ koordinatėmis bei ortais (žr. 3 pav.), gausime

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_{o'}\vec{i} + y_{o'}\vec{j} + x'\vec{i}' + y'\vec{j}'.$$

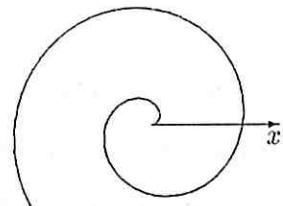
Padauginę pastarąjį lygybę skaliariškai iš \vec{i} ir \vec{j} ortų rasime

$$\begin{aligned} x &= x_{o'} + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= y_{o'} + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}$$

Tačiau plokštumą galima aprašyti ne tik Dekarto koordinatėmis. Pavyzdžiuui, parinkus pradžios tašką O ir nubrėžus spindulį Ox , kiekvieną plokštumos tašką M galima nusakyti jo atstumu $r = OM$ iki pradžios taško (poliaus) ir kampu tarp Ox ir OM (žr. 4 pav.). Tai polinė koordinačių sistema.



4 pav. Polinė koordinačių sistema



5 pav. Archimedo spirale $r = \varphi$

Kokia koordinačių sistema geriausia – vienareikšmiškai atsakyti negalima. Tiesių bei antros rūšies kreivių lygtys paprasčiausios Dekarto koordinačių sistemoje. Tiesės lygtis šioje koordinačių sistemoje

$$ax + by = c, \quad (a^2 + b^2 \neq 0).$$

Polinėje koordinačių sistemoje ji sudėtingesnė:

$$r \cos(\varphi - \varphi_0) - p = 0.$$

Antra vertus, polinės koordinatės geriau tinka spiralėms aprašyti. Pavyzdžiui, Archimedo spiralės lygtis polinėje koordinačių sistemoje, kurios poliaus taškas sutampa su spiralės pradžios tašku, yra: $r = \varphi$ (žr. 5 pav.).

Kreivės lygties sudėtingumas priklauso ne tik nuo koordinačių sistemos, bet ir nuo jos orientacijos. Pavyzdžiui, elipsių ir hiperbolų lygtys paprasčiausiai atrodo Dekarto koordinačių sistemoje, kurios abscisių ašis kerta abu židinius, o ordinačių ašis eina per atkarpos, jungiančios židinius, vidurio tašką.

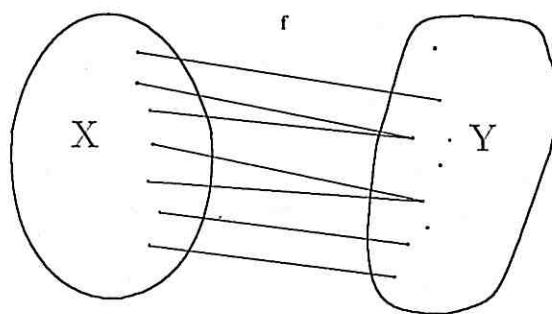
1.3. Išvados

Pateikiame kai kurias dvimačio pasaulio aprašymo išvadas.

- Norint objektyviai aprašyti egzistuojantį pasaulį, reikia įvesti koordinačių sistemas, kurios plokštumos taškus atvaizduotų į skaičių poras.
- Koordinačių sistema yra savotiškas pasaulio stebėjimo instrumentas, tenkinantis pasaulio stebėtojo poreikius. Skirtingų stebėtojų interesai skiriasi. Todėl pasaulio aprašymui naudojamos įvairios koordinačių sistemos.
- Skirtingi stebėtojai juos supantį pasaulį turi suprasti vienodai. Todėl reikia žinoti taško koordinačių skirtinose koordinačių sistemose ryšio formules.
- Idealios koordinačių sistemos ir geriausios jos padėties nėra. Skirtingiems pasaulio objektams aprašyti galima rasti savas optimalias koordinačių sistemos. Sistemą tikslinga priderinti prie stebėtojo padėties ir stebimų objektų orientacijos.

2. Funkcijų aprašymas

Pereikime prie sudėtingesnio objekto – *funkcijų*. Funkcija yra viena kertinių matematikos sąvokų. Tegul žinomas dvi aibės X ir Y bei duota taisykla, priskirianti kiekvienam $x \in X$ vienintelį $y \in Y$, žymimą $f(x)$ (žr. 6 pav.). Tuomet sakoma, kad X aibėje yra apibrėžta funkcija $y = f(x)$, kurios reikšmės yra Y aibės elementai. Mes kalbėsime tik apie *skaitinės* funkcijas, t.y. apie tokias, kurių aibės X ir Y elementai yra realūs skaičiai.



6 pav. Funkcija $f : X \rightarrow Y$

Skaitinės funkcijos gali būti aprašytos labai įvairiai. Panagrinėkime paprasčiausias funkcijų klasės.

$$\bullet \bullet \bullet \alpha + \omega \bullet \bullet \bullet$$

2.1. Funkcijos ir formulės

Mokykloje skaitinės funkcijos dažniausiai aprašomos formulėmis. Toks būdas vadinamas analiziniu. Pirma yra apibrėžiamos elementariosios funkcijos. Jų aibę sudaro

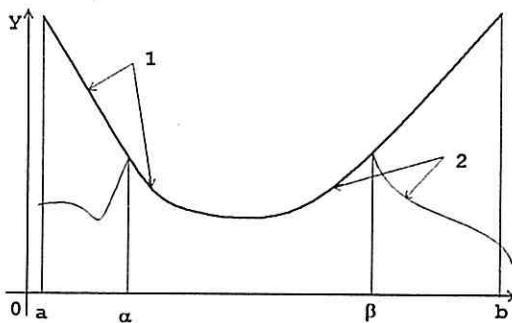
- daugianariai (pvz., $2x + 3$, $3x^2 - 1$, $x^4 - 2x^2 + 1$),
- rodiklinės funkcijos (pvz., e^x , 2^x),
- logaritminės funkcijos (pvz., $\ln x$, $\log_{10}(x)$),
- trigonometrinės funkcijos (pvz., $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$),
- atvirkštinės trigonometrinės funkcijos (pvz., $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$),
- funkcijos, gaunamos iš išvardytų funkcijų baigtinių skaičių kartų naudojant keturias aritmetines operacijas (pvz., $\frac{\sin x}{x-2x}$, $\frac{2x+3}{x^2+1}$) ir superpozicijos operaciją, (pvz., $\sin(\cos(x))$, e^{x^2}). Bet kurios elementariosios funkcijos išvestinė taip pat yra elementarioji funkcija, tačiau ne visų elementariųjų funkcijų neapibrėžtinis integralas yra elementarioji funkcija, pavyzdžiui,

$$\int e^{-x^2} dx.$$

Kita svarbi funkcijų grupė, kuriai priklauso elementariosios funkcijos, yra analizinių funkcijų aibė. Pagal apibrėžimą bet kokia funkcija, išreiškiama laipsnine eilute, vadinama analizine. Jei analizinės funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritis X yra intervalas (a, b) , tai ši funkcija yra kiek norima kartų diferenčiuojama intervale (a, b) ir bet kokio taško $x_0 \in (a, b)$ pakankamai mažoje aplinkoje teisinga lygybė

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

Ši formulė vadinama *Teiloro formule*. Analizinės funkcijos pasižymi išskirtine vientisumo savybe, kuri reiškia štai ką. Jeigu funkcija $y = f(x)$ yra analizinė intervale (a, b) , tai ją galima vienareikšmiškai rekonstruoti visame intervale (a, b) naudojantis tik jos reikšmėmis $y = f(x)$, žinomomis kiek norima mažame intervale $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$. Vientisumo savybė rodo, kad kiekviena analizinė funkcija apibrėžiama savo „formule“, kuri glaučia aprašo funkcijos grafiką $\{(x, f(x)), x \in (a, b)\}$. Kartu analizinių funkcijų vientisumo savybė atskleidžia ir jų ribotumą. Sakykime, funkciją nusakome, laisvai brėždami jos grafiką taip, kad pasirinkę popieriaus lape kokią nors Dekarto koordinacių sistemą (Ox, Oy) gautume vienareikšmę funkciją $y = f(x)$. Aišku, kad klasė funkcijų, kurių grafiką galima nubrėžti neatitraukiant rankos nuo popieriaus lapo, bus daug platesnė už analizinių funkcijų klasę, nes bet kokios analizinės funkcijos globalus grafikas $\{(x, f(x)), x \in (a, b)\}$ yra vienareikšmiškai nusakomas bet kokiui lokaliui grafiku (žr. 7 pav.) $\{(x, f(x)), x \in (\alpha, \beta) \subset (a, b)\}$.



7 pav. Funkcijos: 1 – analizinė; 2 – neanalizinė

2.2. Funkcijų Dekarto koordinačių sistemos

Plokštumos taškams aprašyti įvedėme Dekarto koordinačių sistemą. Šioje sistemoje jie aprašomi realiųjų skaičių poromis (x, y) . Koordinačių x ir y reikšmės priklauso ne tik nuo taško M , bet ir nuo Dekarto koordinačių sistemos pradžios taško O bei nuo abscisių ir ordinačių ašių krypties. Tos pačios plokštumos taškams aprašyti galima įvesti be galo daug Dekarto koordinačių sistemų ir nurodyti, koks yra to paties plokštumos taško M koordinačių skirtinėse sistemoje ryšys. Kai kurios geometrinės charakteristikos išreiškiamos tomis pačiomis formulėmis nepriklausomai nuo Dekarto koordinačių sistemos pasirinkimo. Pavyzdžiu, atstumas nuo taško $M(x, y)$ iki koordinačių pradžios taško O skaičiuojamas pagal formulę

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3)$$

Panaši formulė (žr. (2)) yra atstumui tarp bet kurių dviejų plokštumos taškų $M_1(x_1, y_1)$ ir $M_2(x_2, y_2)$ skaičiuoti. Paslinkus arba pasukus Dekarto koordinačių sistemą (2) ir (3) formulės nesikeičia (yra invariantiškos).

Paméginkime panašiai aprašyti ir funkcijas. Tarkime, funkcija $u = u(x)$ yra analizinė intervale $(-R, R)$. Tuomet jai teisinga Teiloro formulė

$$u(x) = u(0) + \frac{u'(0)}{1!}x + \frac{u''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{u^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-R, R). \quad (4)$$

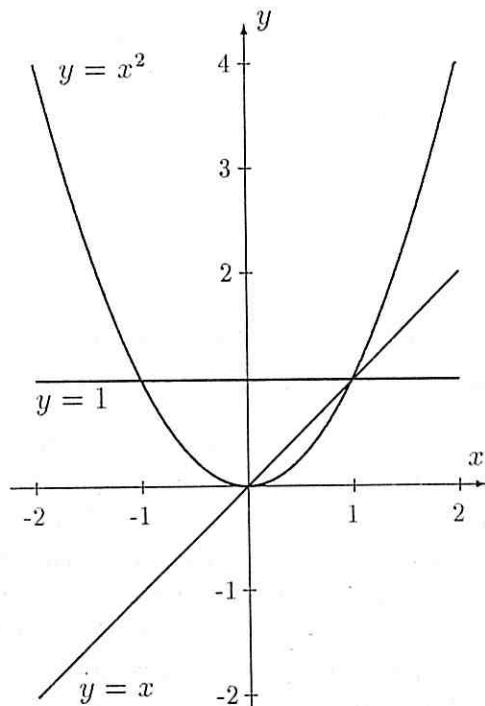
Bandykime palyginti šią formule su (1) išraiška. Pastarosios kairiojoje pusėje stovi laisvai pasirinktas plokštumos vektorius, o dešinioji pusė yra vektorių \vec{i} ir \vec{j} tiesinis darinys. Panašiai galime interpretuoti ir (4) lygybę. Jos kairiojoje pusėje yra funkcija $u = u(x)$, $x \in (-R, R)$, o dešinioji – funkcijų sistemos

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\} \quad (5)$$

begalinis tiesinis darinys. Deja, negalima teigti, kad (5) sistemos elementai x^n yra \vec{i} ir \vec{j} ortų analogai. Neaišku, kokia prasme „vektorius“ x^n ilgis lygus

• • • $\alpha + \omega$ • • •

1. Dar didesnė problema kils, jei (5) sistemos elementams norēsime taikyti statmenumo savykā. Iš tikrujų kokia prasme funkcijos 1 , x , x^2 ir t.t. gali būti statmenos (žr. 8 pav.)?!



8 pav. Teiloro skleidinių pirmųjų trijų ašių vektoriai – funkcijos

Kalbant apie funkcijų statmenumą, reikia susitarti, ką laikyti kampu tarp dviejų funkcijų. Prisiminkime, kad skaliarinė dviejų vektorių

$$\overrightarrow{OA} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}, \quad \overrightarrow{OB} = y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j}$$

sandauga skaičiuojama pagal formulę

$$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

o kampus α tarp jų randamas iš lygybės

$$\cos \alpha = \frac{\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|}.$$

Vektoriaus ilgį su skaliarine sandauga sieja toks ryšys:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}.$$

Vadinasi, norint apibrėžti kampą tarp dviejų funkcijų, pakanka išvesti funkcijų skaliarinės sandaugos savykā.

Jeigu vietoje plokštumos vektorių (kuriuos galima sutapatinti su koordinatių poromis) nagrinėsime begalines realiųjų skaičių sekas (begalinius skaičių rinkinius)

$$x = \{x_1, x_2, \dots\}, \quad y = \{y_1, y_2, \dots\},$$

tai skaliarinę sandaugą natūralu apibrėžti lygybe

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots,$$

pasirūpinus, žinoma, kad begalinė suma būtų apibrėžta. Jeigu vietoje sekų turime funkcijas $f(x), g(x)$, apibrėžtas tame pat intervale (a, b) ir įgyjančias realias reikšmes, tai galima pabandyti skaliarinę sandaugą apibrėžti integralu

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

O dabar pateiksime griežtą D. Hilberto [1] darbe pasiūlytą funkcijų skaliarinės sandaugos apibrėžimą.

Apibrėžimas. Tegul $L_2(a, b)$ yra integruojamoji intervale (a, b) kvadrato kompleksinių funkcijų aibė. Funkcijų $u \in L_2(a, b)$ ir $v \in L_2(a, b)$ skaliarinė sandauga apibrėžiama formule

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)\overline{v(x)} dx.$$

Kampu α tarp u ir v vadinamas mažiausias neneigiamas lygties

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

sprendinys. Šia $\|f\|$ žymi f funkcijos normą: $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Plokštumos Dekarto koordinatių sistemos pagrindą sudaro du statmeni išeinantys iš vieno taško \vec{i} ir \vec{j} vektoriai. Paméginkime funkcijų aprašymui parinkti \vec{i} ir \vec{j} ortų analogus. Tačiau prieš tai mums reikia apsispręsti, kokių funkcijų klasę bandysime išreikšti pasirinktos funkcijų sistemos tiesiniais dariais, t.y. apibrėžti plokštumos analogą. Nagrinékime funkcijų erdvę $L_2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Įsitikinkime, kad funkcijų sistema $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ iš Teiloro formulės negali būti Dekarto koordinatių sistemos pagrindas. Iš tikrujų, jei $n+m$ yra lyginis, tai x^n ir x^m funkcijų skaliarinė sandauga erdvėje $L_2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ yra

$$\langle x^n, x^m \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^n x^m dx = \frac{2^{-(n+m)}}{n+m+1}.$$

Todėl kampo tarp jų kosinusas nelygus nuliui. Vadinasi, visos tokios funkcijų poros x^n, x^m nėra statmenos ir todėl netinka Dekarto koordinatių ašims apibrėžti.

Kur kas geresnės šiuo atžvilgiu yra sinuso ir kosinuso funkcijos $\sin(2\pi mx)$, $\cos(2\pi mx)$. Formulės bus grakštėsnės, jeigu naudosime kompleksinių eksponenčių sistemą

$$\{e^{i2\pi nx}\}_{n=-\infty}^{\infty}, \quad e^{i2\pi nx} = \cos(2\pi nx) + i \sin(2\pi nx).$$

Ši sistema yra ortonormuota $L_2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ erdvės skaliarinės sandaugos prasme, t.y.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i2\pi nx} \overline{e^{i2\pi mx}} dx = \begin{cases} 1, & \text{kai } n = m, \\ 0, & \text{kai } n \neq m. \end{cases}$$

Negana to, kompleksinių eksponenčių sistema yra pakankamai turtinga ta prasme, kad bet kurią integruojamojo intervale $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ kvadrato funkciją $u = u(x)$ galima kiek norima tiksliai ($L_2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ erdvės normos prasme) aproksimuoti kompleksinių eksponenčių tiesiniai dariniai, t. y. funkcijai $u \in L_2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ atsiras tokie koeficientai c_n , kad

$$\min_{c_n} \|u(x) - \sum_{|n| < N} c_n e^{i2\pi nx}\| \rightarrow 0, \text{ kai } N \rightarrow \infty.$$

Tokiu atveju rašysime

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{i2\pi nx}.$$

Taikant postūmio ir poslinkio operacijas, galima gauti be galio daug skirtingu plokštumos Dekarto koordinačių. Galima apibrėžti ir erdvės $L_2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ Dekarto koordinačių sistemos $\{e^{i2\pi nx}\}$ posūkius. Tegu $\alpha_{n,k}$ yra kompleksiniai skaičiai, tenkinantys sąlygas

$$\sum_k \alpha_{n,k} \overline{\alpha_{m,k}} = \begin{cases} 0, & \text{jei } n \neq m, \\ 1, & \text{jei } n = m, \end{cases} \quad \alpha_{n,m} = \overline{\alpha_{m,n}}.$$

Dabar apibrėžkime funkcijas

$$u_n(x) = \sum_k \alpha_{n,k} e^{i2\pi kx}.$$

Tada $\{u_n(x)\}$ yra ortonormuota sistema ir jos begaliniai tiesiniai dariniai galima užrašyti visus $L_2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ erdvės elementus. Vadinas, kaip ir plokštumos atveju, įvairiai $L_2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ erdvės Dekarto koordinačių sistemos posūkiai gaujamos naujos Dekarto koordinačių sistemos.

2.3. Išvados

Plokštumos taškai aprašomi Dekarto koordinatėmis, vektoriai reiškiami tiesiniai ortū dariniai. Matėme, kad funkcijos irgi gali būti aprašomos tam

tikrais tiesiniaiš dariniaiš (tik begaliniaiš). Taigi Dekarto metodas yra pritaiko-
mas ir funkcijų pasaulyje. Priminsime tokio funkcijų aprašymo savybes.

- Funkcijoms aprašyti pasirenkama bet kokia sistema $\{u_n(x), x \in (a, b)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, kurios begaliniaiš tiesiniaiš dariniaiš galima užrašyti bet
kokią integruojamąjo intervalo (a, b) kvadrato funkciją.
- Kiekvienas sistemos $\{u_n\}$ elementas pažymi tam tikrą kryptį funkcijų $L_2(a, b)$ erdvėje. Jei u_n ir u_m yra statmenos visiems $n \neq m$, tai sistemos $\{u_n\}$ elementai aprašo Dekarto koordinačių sistemą. Jei dar papildomai tenkinama normavimo sąlyga $\|u_n\|_{L_2} = 1$, tai u_n yra $L_2(a, b)$ erdvės Dekarto koordinačių sistemos ortai, o sistema $\{u_n\}$ vadinama ortonormuotaja $L_2(a, b)$ erdvės baze.
- Bet koks $L_2(a, b)$ erdvės elementas $g = g(x)$ aprašomas koordinatėmis $g_n = \langle g, u_n \rangle$. Elemento g Dekarto koordinatės g_n priklauso nuo koordinačių sistemos parinkimo. To paties elemento koordinačių skirtingoje sistemoje $\{u_n\}$ ir $\{v_n\}$ ryšio formulės priklauso nuo kampų tarp koordinatinii
ašių u_n ir v_m , surandamų iš skaliarinių sandaugų $\langle u_n, v_m \rangle$.
- Jeigu funkcija reiškia kokį nors signalą (pvz., garsą), tai jos normą

$$\|f\| = \int |f(x)|^2 dx$$

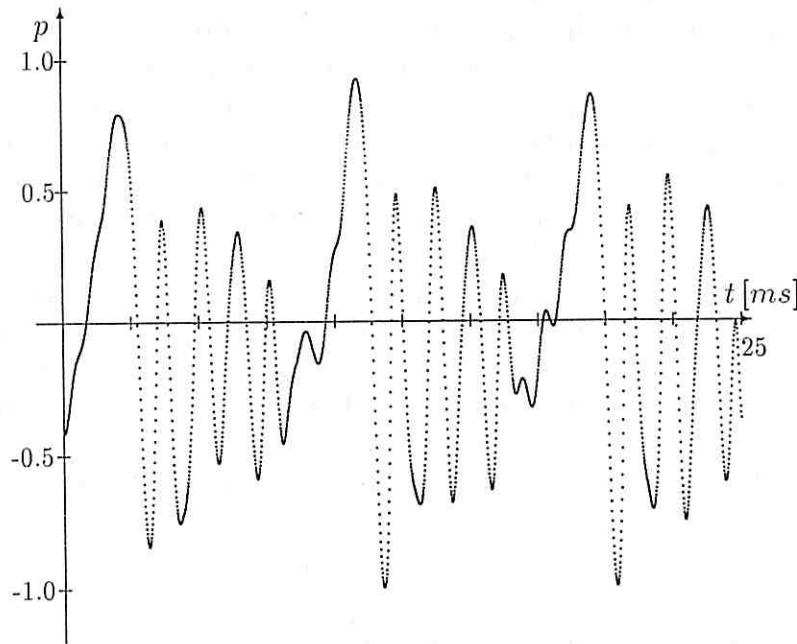
galima interpretuoti kaip signalo energiją. Energijos, skaliarinės sandaugos,
kampo tarp dviejų funkcijų ir kitos geometrinės charakteristikos išreiški-
mos formulėmis, kurios pereinant nuo vienos Dekarto koordinačių sistemos
prie kitos nesikeičia.

- Visos Dekarto koordinačių sistemos $L_2(a, b)$ erdvei aprašyti yra vienodai
geros. Kai yra žinoma papildoma informacija apie aprašomas funkcijas, ga-
lima kalbėti apie skirtą Dekarto koordinačių sistemą optimalumą kokia
nors prasme. Dažnai sakoma, kad sistema $\{u_n\}$ gerai tinkta poaibiu
 $A \subset L_2$ aprašyti, jei daugumos (ar visų) elementų $g \in A$ maža dalis
Dekarto koordinačių šioje sistemoje yra ženkli, o kitos artimos nuliui.

3. Funkcijų vaizdai skirtingoje koordinačių sistemoje

Įsivaizduokime, kad stebime kokį nors signalą, pavyzdžiui, garsą. Kokiomis
funkcijomis jį galima aprašyti? Aprašant realius signalus erdvės $L_2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
funkcijomis, kyla tam tikrų keblumų. Reikalavimas, kad funkcijos (signalo)
kvadratas būtų integruojamas, nėra varžantis. Greičiau atvirkščiai – signalo
modulio kvadrato integralas interpretuojamas energija ir visiškai natūralu ana-
lizuoti tik tokius signalus, kurių energija yra baigtinė. Problemos kyla dėl
integravimo intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Bet koks argumento poslinkis nekeičia signalo
prigimties. Tarkime $p = p(t)$ yra garso slėgio * įrašas, reiškiantis kokį nors
žodį. Straipsnio autorius pateiktą „a“ garso įrašo fragmentą galima pamatyti
9 pav.

* Garso slėgiu vadinami oro slėgio pokyčiai laike atžvilgiu atmosferinio slėgio, kuriuos
registroja žmogaus ir kitų gyvūnų klausai.



9 pav. „a“ garso slėgio 25 milisekundžių fragmentas

Akivaizdu, kad klausytojas garso įrašą $p = p(t)$ suvoks vienodai nepriklausomai nuo klausymosi laiko. Kitaip tariant, visos funkcijos

$$T_a p(t) = p(t - a)$$

reiškia tą patį žodį. Deja, erdvės $L_2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ elementams negalima taikyti poslinkio operacijos T_a , nes visiems $a \neq 0$ susidursime su argumentų reikšmėmis $x - a$, kurioms funkcija u bus neapibrėžta.

3.1. Funkcijų Furjė vaizdai

Signalus vaizduokime erdvės $L_2(-\infty, \infty)$ funkcijomis. Bet kokios šios erdvės elementų poros $u, v \in L_2(-\infty, \infty)$ skaliarinė sandauga skaičiuojama pagal formulę

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Signalai $u \in L_2$ yra baigtinės energijos, t.y.

$$\|u\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \langle u, u \rangle < \infty.$$

Bet koks poslinkio operatorius

$$T_a u(x) = u(x - a)$$

• • • $\alpha + \omega$ • • •

erdvės $L_2(-\infty, \infty)$ elementus atvaizduoja į tą pačią erdvę. Nesunku išsitikinti, kad poslinkio operatoriai šioje erdvėje nekeičia skaliarinės sandaugos:

$$\langle u, v \rangle = \langle T_a u, T_a v \rangle, \quad u, v \in L_2(-\infty, \infty).$$

Vadinasi, poslinkio operacija išlaiko kampą tarp funkcijų porų.

Tačiau nei $\sin(2\pi mx)$, nei $\cos(2\pi mx)$, taigi ir $e^{2\pi imx}$ nepriklauso erdvėi $L_2(-\infty, \infty)$. Šios funkcijos yra aprėžtų ir tolydžių visoje tiesėje funkcijų erdvės $C(-\infty, \infty)$ elementai. Tačiau neskubékime atsisakyti šių labai naudingų funkcijų paslaugų. Vadinasi, iš erdvės $C(-\infty, \infty)$ „pasiskolinkime“ funkcijas $e^{2\pi ifx}$ ir fiksavę realius parametrus $\{f_k\}_{k=1}^n$, kuriuos vadinsime *dažniais*, ir kompleksinius koeficientus $\{\hat{u}_k\}$ nagrinékime funkcijas

$$u(x) = \sum_{k=1}^n \hat{u}_k e^{2\pi f_k x}. \quad (6)$$

Funkcija $u(x)$ (signalas) visiškai aprašoma realiaisiais skaičiais f_k ir kompleksiniai skleidinio (6) koeficientais. Ne visi svarbūs signalai gali būti tokiu būdu aprašyti. Atlikime dar vieną žingsnį ir nagrinékime signalus, kurie reiškiami panašiai kaip (6), tačiau vietoje sumos naudojant integralą

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ifx} \hat{u}(f) df. \quad (7)$$

Gautoji (7) išraiška vadinama funkcijos $u = u(x)$ integraliniu Furjė skleidiniu arba atvirkštine Furjė transformacija. Analizuojant (7) formulę kyla du klausimai:

- Kaip rasti integralinio Furjė skleidinio koeficientų funkciją $\hat{u} = \hat{u}(f)$, kai skleidžiama funkcija $u = u(x)$ yra žinoma?
- Kokia prasme reikia suprasti Furjė skleidinio integralą ir lygybę (7) formulėje?

Padauginę abi (7) lygybės pusės iš $e^{-2\pi ifx}$ ir integruodami x atžvilgiu intervale $(-\infty, \infty)$, bei sukeitę dešiniojoje pusėje integravimo tvarką, formaliai gausime tokią integralinio Furjė skleidinio koeficientų išraišką:

$$\hat{u}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ifx} u(x) dx, \quad f \in (-\infty, \infty). \quad (8)$$

Ši formulė vadinama funkcijos $u = u(x)$ integralinio Furjė skleidinio koeficientų išraiška, arba funkcijos u (tiesiogine) Furjė transformacija. Abi (7) ir (8) transformacijos yra integralinės ir jų branduoliai skiriasi tik kompleksinės eksponentės argumento ženklu. Todėl atvirkštinės ir tiesioginės Furjė transformacijų egzistavimo klausimas sprendžiamas vienodai. Jei funkcija $u = u(x)$ yra integruojama Lebegó prasme intervale $(-\infty, \infty)$, tai jos tiesioginė Furjė transformacija yra tolydi funkcija, t.y. $\hat{u} = \hat{u}(f) \in C(-\infty, \infty)$. Ir atvirkščiai, jei Furjė

koeficientų funkcija $\hat{u} = \hat{u}(f)$ yra integruojama Lebego prasme, tai (7) formulė užrašoma funkcija $u = u(x) \in C(-\infty, \infty)$. Tačiau ne visų tolydžių ir aprėžtų signalų Furjė koeficientų funkcijos yra integruojamos.

Ar (7) skleidinys eksponenčių sistemos $\{e^{2\pi ixf}\}$ elementais yra analogiškas erdvės $L_2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ funkcijų skleidiniams Dekarto sistemos $\{e^{2\pi ixm}\}$ elementais?

Jei $g_1, g_2 \in L_2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, tai

$$g_1(x) = \sum_m \hat{u}_m e^{2\pi x m}, \quad g_2(x) = \sum_m \hat{v}_m e^{2\pi x m}$$

ir jų skaliarinė sandauga

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \sum_m \hat{u}_m \bar{\hat{v}}_m. \quad (9)$$

Funkcijoms $u, v \in L_2(-\infty, \infty)$ teisingas toks (9) lygybės analogas (Parsevalio tapatybė):

$$\int u(x) \overline{v(x)} dx = \int \hat{u}(f) \overline{\hat{v}(f)} df, \quad u, v \in L_2(-\infty, \infty).$$

Vadinasi, kompleksinių eksponenčių sistema $\{e^{2\pi ifx}\}_{f \in \mathbb{R}}$ tam tikra prasme apibrėžia integruojamojo kvadrato funkcijų erdvės Dekarto koordinačių sistemą.

3.2. Funkcijų vaizdai laiko ir dažnio plokštumoje

Nagrinėkime be galio daug kartų diferencijuojamas funkcijas $u = u(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, tenkinančias sąlygą

$$\{t : u(t) \neq 0\} \subset [-1/2, 1/2].$$

Tokių funkcijų aibę žymėsime simboliu $C_0^\infty(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Kiekvieną šios erdvės funkciją galime užrašyti Furje integralu

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(f) e^{2\pi ift} df. \quad (10)$$

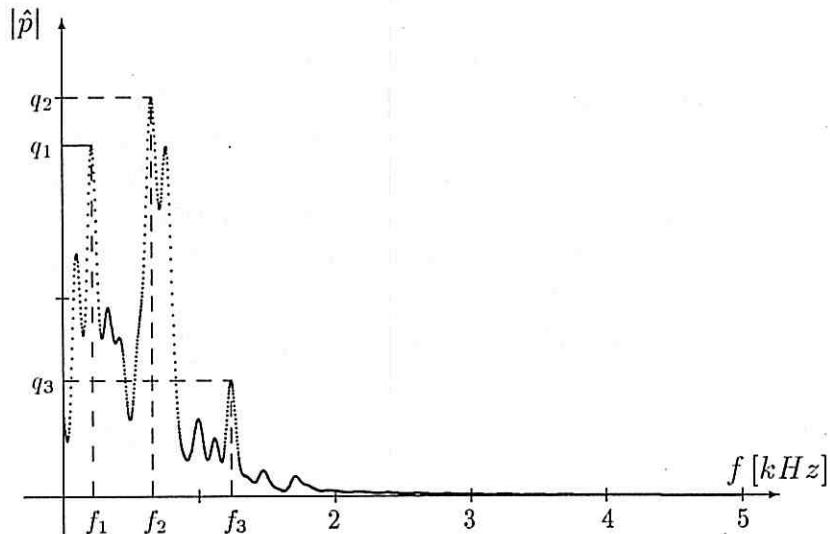
Taigi signalą $u(t)$ visiškai aprašo funkcija $\hat{u} = \hat{u}(f)$. Galima įrodyti, kad šiai funkcijai teisinga Teiloro formulė

$$\hat{u}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{u}^{(n)}(0)}{n!} f^n,$$

todėl (10) skleidinys nusakomas skaičia komponenčių $\{u^{(n)}(0)\}$ sistema.

Kada signalus $u(t)$ patogu aprašyti (10) skleidinio funkcija $\hat{u}(f)$? Kai jų grafikai primena kelių dažnių sinusų ir kosinusų tiesinį darinį. Paprastai osciliuojančių signalų Furjė vaizdai $\hat{u} = \hat{u}(f)$ yra paprastesni už pradinį vaizdą $u = u(t)$. Mūsų kalbos balsės (a, e, i ir t.t.) yra kaip tik tokie signalai,

sprogstamieji priebalsiai (p , t , k ir t.t.) yra ne osciliuojantys, bet lokalizuoti laike. Palyginkite, kaip ta pati balsė „a“ vaizduojama 9 pav. ir Furjė bazėje $\{e^{2\pi if}\}_{f \in \mathbb{R}}$ (žr. 10 pav.).



10 pav. „a“ garso 25 milisekundžių fragmento spektras

„a“ garso slėgio funkcijos $p = p(t)$ priklausomybė nuo laiko yra pakankamai sudėtinga, kad ją būtų galima charakterizuoti keliais parametrais. Tuo tarpu Furjė vaizdo modulio funkciją $|\hat{p}(f)|$ nebogai charakterizuojant trijų lokalių maksimumų taškų abscisės f_1 , f_2 ir f_3 , bei ordinatės q_1 , q_2 ir q_3 .

3.2.1. Vignerio transformacija

Tegu $u(t)$ yra koks nors signalas, tarkime, $u(t) \in L(-\infty, \infty)$. Primename, kad modulio kvadrato integralas interpretuoojamas energija.

Kai $u = v$, iš Parsevalio tapatybės, gauname

$$E_u = \langle u, u \rangle = \langle \hat{u}, \hat{u} \rangle.$$

Todėl funkcijos $u = u(t)$ ir jos Furjė transformacijos $\hat{u} = \hat{u}(f)$ modulių kvadratai vaizduoja signalo energijos tankio pasiskirstymą atitinkamai laiko ir dažnio skalese. Tačiau atskiru $u = u(t)$ ir $\hat{u} = \hat{u}(f)$ reikšmių priklausomybės tikėtis negalima.

Ar nebūtų galima rasti transformaciją, kurios signalą $u = u(t)$ transformuotų į dviejų kintamujų funkciją $\hat{u}(t, f)$ taip, kad $\hat{u}(t, f)$ derintysi su $|u(t)|^2$ ir $|\hat{u}(f)|^2$ reikšmėmis? Bene sėkmingiausiai su šia problema susidoroja Vignerio (Wigner) transformacija, integruojamojo kvadrato funkciją $u = u(t)$ atvaizduojanti į laiko ir dažnio funkciją $\hat{u}(t, f)$, tokiu būdu:

$$\hat{u}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t + \frac{\tau}{2}) \bar{u}(t - \frac{\tau}{2}) e^{-2\pi if\tau} d\tau.$$

• • • $\alpha + \omega$ • • •

Galima įrodyti, kad

$$\int \hat{u}(t, f) df = |u(t)|^2 \quad (11)$$

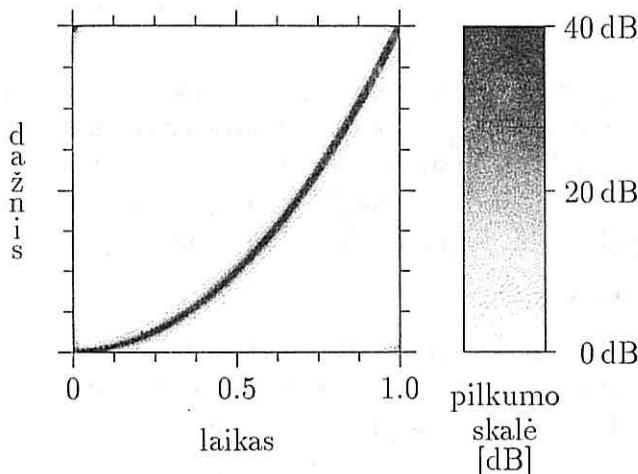
ir

$$\int \hat{u}(t, f) dt = |\hat{u}(t)|^2. \quad (12)$$

(11) lygybė parodo, kad Vignerio transformacijos reikšmės $\hat{u}(t, f)$ kintant dažniui f vidutiniškai osciliuoja apie $|u(t)|^2$ reikšmę. Iš (12) išplaukia analogiška savybė t ir f argumentų porai. Todėl Vignerio transformacijos reikšmė $\hat{u}(t, f)$ yra interpretuojama signalo u energijos tankio verte laiko momentu t esant dažniui f . Nors $\hat{u}(t, f)$ reikšmės gali būti ir neigiamos ar net kompleksinės, tačiau bendras tankio integralas sutampa su signalo energija, t.y.

$$\int \int \hat{u}(t, f) dt df = \int |u(t)|^2 dt = \int |u(f)|^2 df = \|u\|^2.$$

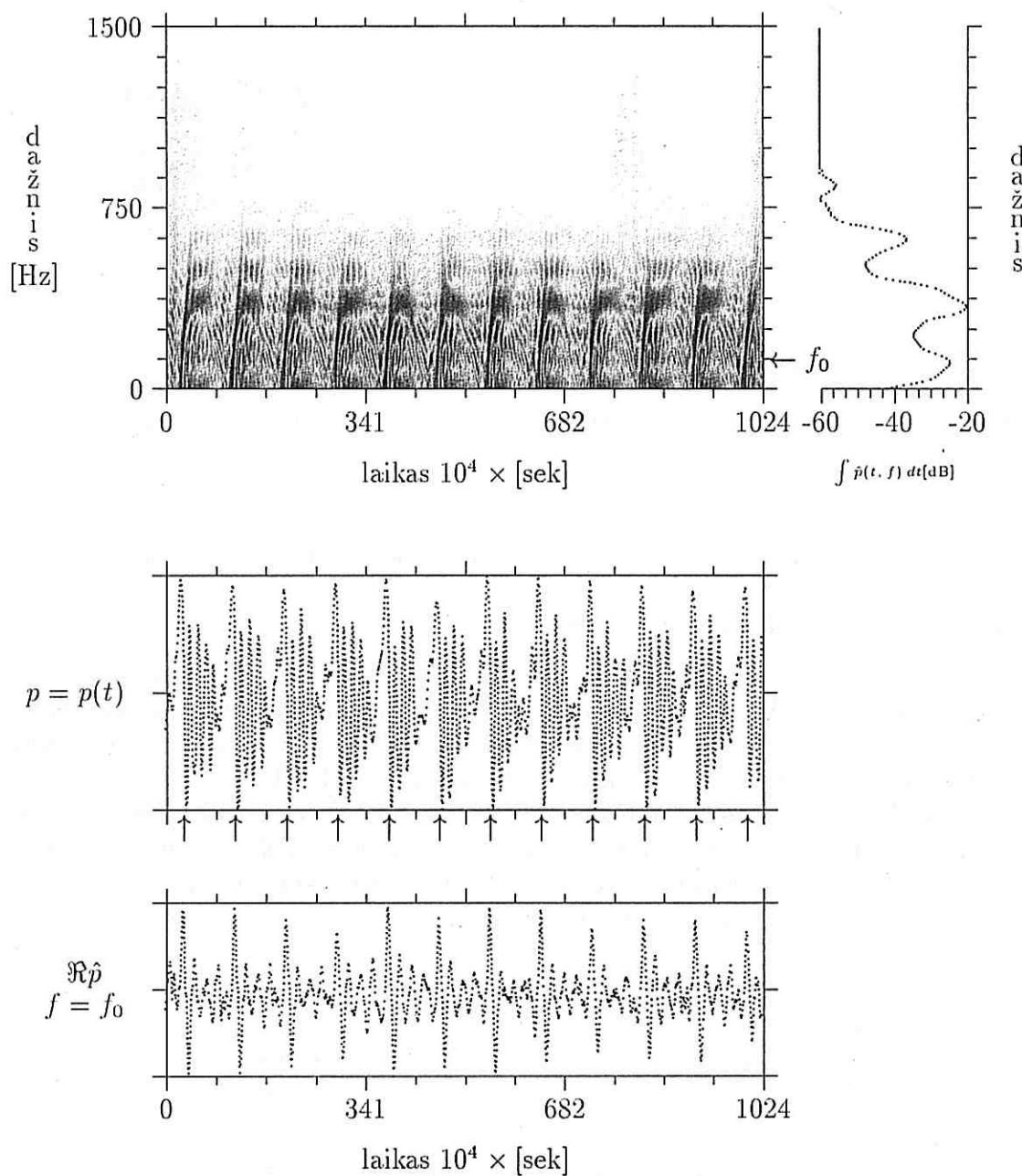
Funkciją $|\hat{u}(t, f)|$ vadinsime u signalo vaizdu laiko ir dažnio plokštumoje.



11 pav. $e^{2\pi it^3/3}$ vaizdas laiko ir dažnio plokštumoje

Koks yra kompleksinės funkcijos $u(t) = e^{2\pi it^2/2}$ vaizdas laiko ir dažnio plokštumoje? Kadangi kai t artimas 0 signalas $e^{\pi it^2}$ beveik pastovus, todėl šiemis t Vignerio transformacijos modulis turėtų būti didžiausias mažiems dažniams. Didėjant t reikšmėms, u pradeda vis labiau osciliuoti, vadinasi, ir $|\hat{u}(t, f)|$ maksimumo argumentas f turi proporcingai didėti. Susitarkime palyginus dideles $|\hat{u}(t, f)|$ reikšmes laiko ir dažnio plokštumoje vaizduoti tamsiai ir atvirkščiai, mažas Vignerio transformacijos – šviesiai.

Tiesiogiai skaičiuodami rastume $e^{2\pi it^2/2}$ signalo Vignerio transformaciją, o pagal ją sudarytas signalo vaizdas (t, f) plokštumoje būtų tiesė $f = t$. Remdamiesi tam tikrais formaliais skaičiavimais galime spėti, kad signalo $e^{2\pi it^3/3}$

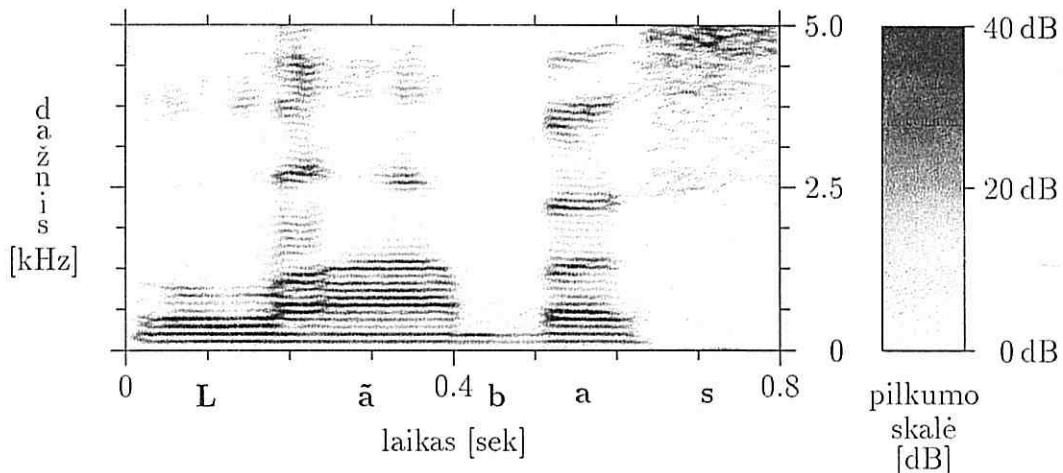


12 pav. „a“ garso vaizdas laiko ir dažnio plokštumoje

• • • $\alpha + \omega$ • • •

vaizdas laiko ir dažnio plokštumoje turėtų priminti parabolės grafiką. Ir iš tikrujų kompiuteriu atliktais apytiksliais šio signalo Vignerio transformacijos skaičiavimais, vaizdas panašus į parabolę (žr. 11 pav.).

12 pav. ir 13 pav. pateikti 0,1 sek. garso „a“ ir žodžio „labas“ vaizdai laiko ir dažnio plokštumoje.



13 pav. Žodžio „labas“ garso vaizdas laiko/dažnio plokštumoje

4. Vilnelių transformacijos

Šiame skyrelyje funkcijų Hilberto $L_2(-\infty, \infty)$ erdvę dėl trumpumo žymėsime tiesiog L_2 . Ankstesniuose skyreliuose aprašydami L_2 erdvę naudojomės koordinacių sistemomis, kurių ašis sudarė $\{e^{-2\pi ift}\}_{f \in \mathbb{R}}$ funkcijos. Koordinacių ašių buvo tiek, kiek realiųjų skaičių. Vadinas, bendra koordinacių ašių aibė yra kontinuumo galios. Paméginkime rasti skaičią koordinacių ašių sistemą, kurios ortų begaliniais tiesiniais dariniais būtu galima užrašyti visus L_2 erdvės elementus. Galima rasti daug šios problemos sprendimų. L_2 erdvei aprašyti gerai tinka Ermito (*Ch. Hermite*) daugianariai:

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t, \quad H_2(t) = 4t^2 - 2,$$

$$H_3(t) = 8t^3 - 12t, \quad \dots, \quad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n}, \dots$$

Kadangi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_n(t) H_k(t) dt = \begin{cases} \sqrt{\pi} n! 2^n, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases}$$

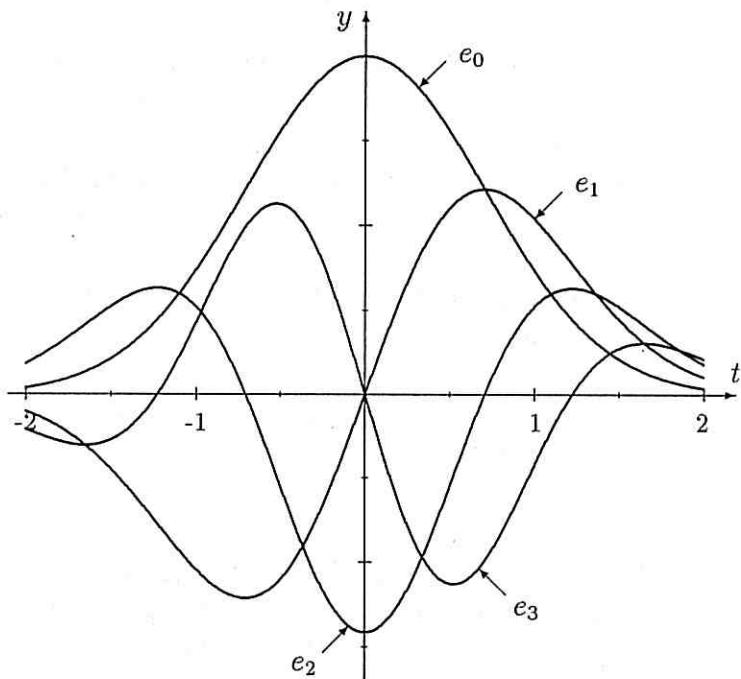
tai sistema

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} n! 2^n}} e^{-t^2/2} H_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

yra ortonormuota L_2 erdvėje. Negana to, pasirodo, kad bet kurią integruojamojo kvadrato funkciją u galima užrašyti konverguojančia normos L_2 prasme eilute

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u, e_n \rangle e_n(t). \quad (13)$$

Todėl $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ sistemas elementai laikytini L_2 erdvės Dekarto koordinačių sistemos ortais. Atlikdami įvairius koordinačių ašių posūkius, iš šios sistemos gausime ir kitas L_2 erdvės Dekarto koordinačių sistemas, kurių ašys sudarys skaičią aibę. Tačiau Ermito daugianarių pagrindu sukonstruota Dekarto L_2 erdvės koordinačių sistema turi vieną esminį geometrinį trūkumą. Paanalizuokime kelių pirmujų e_n sistemas funkcijų grafikus. Iš 14 pav. matyti, kaip jie skiriasi keičiantis n .



14 pav. Pirmosios keturios Ermito sistemos e_n funkcijos

Vadinasi, kiekvienas e_n ortas yra unikalus ir todėl koordinačių ašių posūkio geometrinė prasmė tampa migloti. Šia savo unikalumo savybe Ermito koordinačių ašys labai skiriasi nuo plokštumos ar erdvės Dekarto koordinačių sistemų. Ermito daugianariai ir e_n funkcijos jautrios ir argumento poslinkio operacijai. Tiksliau, kai $n \neq 0$, visi netrivialūs argumento poslinkiai $t \rightarrow t - a$ generuoja $H_n(t - a)$ ir $e_n(t - a)$, kurios skiriasi nuo bet kurios Ermito koordinačių ašies funkcijos (žr. 14 pav.).

4.1. Vilnelės

Šios Ermito ir kitų ortonormuotų funkcijų sistemų trūkumų neturi vilnele (*angl. wavelet*) aprašomos L_2 erdvės koordinacių ašys.

Apibrėžimas. Integruejamojo kvadrato funkcija $\psi = \psi(t)$, $t \in \mathbf{R}$, vadina vilnele, jei keičiant jos mastelį dvejeto sveikaisiai laipsniais bei imant sveikuosius poslinkius gaunama ortogonalė $L_2(\mathbf{R})$ erdvės baze, t.y. sistema

$$\{\psi_{j,n}(t)\} = \{\sqrt{2^j} \psi(2^j t - n)\}_{j,n \in \mathbf{Z}} \quad (14)$$

yra ortonormuota erdvėje $L_2(\mathbf{R})$ ir bet kurią integruejamojo kvadrato funkciją norimu tikslumu galima aproksimuoti baigtiniai $\psi_{j,n}$ funkcijų tiesiniai dariniai.

Intensyviai vilnelės pradėtos tyrinėti pasirodžius St. Mallato darbui [2]. Terminą „vilnelė“ (*wavelet*) pasiūlė vartoti J. Morletas. Vilnelė ψ turi dvi savybes:

- Kadangi vilnelė yra integruejamojo kvadrato, tai argumentui neaprēžtai augant ji vienaip ar kitaip privalo gesti. Dažniausiai vilnelė eksponentiškai nyksta begalybėje arba lygi nuliui už baigtinio intervalo ribų.
- Jei vilnelė yra integruejama, tai jos integralas realiujų skaičių tiese lygus 0. Vadinas, integruejamos vilnelės reikšmės syruoja apie nulį ir vidutinė jos reikšmė lygi 0.

Bet kokią integruejamojo kvadrato funkciją $u = u(t)$ galima užrašyti funkcijų $\psi_{j,k}$ begaliniu tiesiniu dariniu

$$u(t) = \sum_{j,n \in \mathbf{Z}} \langle u, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}(t), \quad u \in L_2(\mathbf{R}). \quad (15)$$

Paanalizuokime Furjė (6), Ermito (13) ir vilnelės (15) skleidinius. Visi trys skleidiniai turi bendrą savybę – jie užrašo bet kokį baigtinės energijos signalą pasirinktos funkcijų sistemos tiesiniu dariniu. Ir Furjė, ir vilnelės skleidinių bazinės funkcijos aprašomos tik viena funkcija. Furjė skleidinys aprašomas kompleksine eksponente $e^{2\pi i t}$, o vilnelės skleidinys apibrėžiamas viena funkcija ψ . Kompleksinės eksponentės mastelio parametras f kinta kontinuumo galios aibėje \mathbf{R} , vilnelės skleidinio parametrai j ir n kinta skaičioje aibėje \mathbf{Z} . Pirmasis parametras j reguliuoja vilnelės ištempimo laipsnį – didėjant j funkcijos $\psi_{j,n}$ grafikas vis labiau spaudžiasi. Daugiklis $\sqrt{2^j}$ (14) išraiškoje rašomas tam, kad visos $\psi_{j,n}$ funkcijos būtų vienetinės L_2 energijos. Sveikasis skaičius n parodo vilnelės poslinkio reikšmę – didėjant n vilnelės grafikas vis labiau slenkasi į dešinę. Ermito skleidinio bazinių funkcijų e_n aibė taip pat skaiti, tačiau čia parametras n nesusietas su argumento poslinkio ir mastelio keitimo operacijomis.

Iš (15) formulės matyti, kad funkcijos $\psi_{j,n}$, $j, n \in \mathbf{Z}$, tinkai L_2 erdvės koordinacių ašims pažymeti. Kadangi $\{\psi_{j,n}\}$ yra ortonormuota, tai vienos

vilnelės pagrindu sudaryta integruojamojo kvadrato funkcijų erdvės koordinacių ašių sistema bus Dekarto sistema ir ašis žyminti funkcijas $\psi_{j,n}$ turėsime teisę vadinti ortais.

Paprasčiausia yra Haro vilnelė

$$\psi(t) = \chi_{[0, \frac{1}{2})}(t) - \chi_{[\frac{1}{2}, 1)}(t), \quad t \in \mathbf{R}; \quad (16)$$

čia $\chi_{(a,b)}$ yra intervalo (a, b) indikatoriaus funkcija, t. y. funkcija lygi vienetui, kai argumentas priklauso intervalui ir lygi nuliui, kai nepriklauso. Ši funkcija pirmą kartą pasirodė Haro daktaro disertacijoje 1909 metais. Pažymėjė $g_0 = -g_1 = 1/\sqrt{2}$ ir

$$\phi(t) = \chi_{[0, 1)}(t),$$

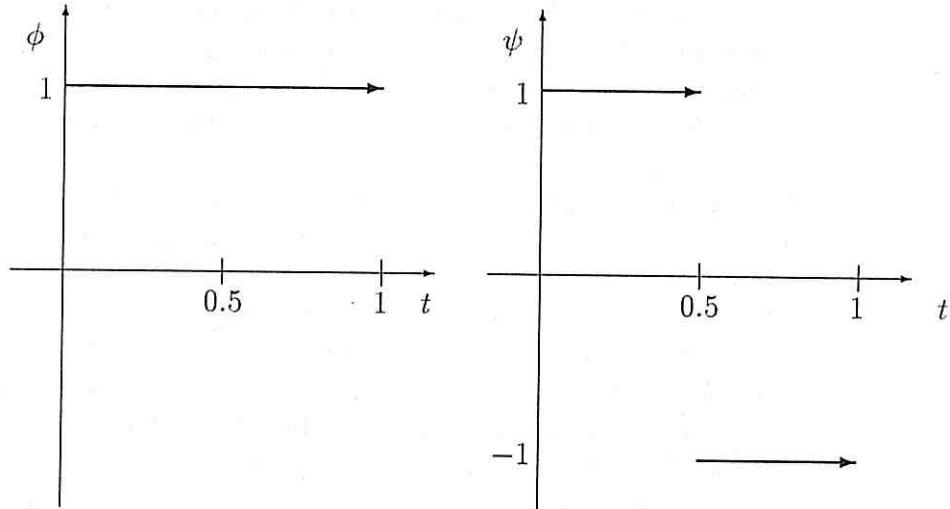
(16) lygybę galėsime perrašyti

$$\psi(t) = g_0 \sqrt{2} \phi(2t) - g_1 \sqrt{2} \phi(2t - 1). \quad (17)$$

Funkcijos ϕ sveikujų poslinkių sistema tap pat ortonormuota, tačiau jos integralas realiujų skaičių aibė nelygus nuliui, todėl ją vadinti vilnele būtų netikslu. Iš ϕ grafiko (žr. 15 pav.) matyti, kad ji tenkina panašų į (17) sąryšį:

$$\phi(t) = h_0 \sqrt{2} \phi(2t) + h_1 \sqrt{2} \phi(2t - 1); \quad (18)$$

čia $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$.



15 pav. Haro mastelio funkcija ϕ ir vilnelė ψ

Y. Mejeris ir S. Mallatas apibendrino (17)–(18) funkcijinius ryšius [3], pasiūlydami tokią vilnelės konstrukciją:

• • • $\alpha + \omega$ • • •

- Fiksuotiems koeficientams

$$h_0, h_1, \dots, h_{N-1}$$

surandama funkcija ϕ , tenkinanti lygtį

$$\phi(t) = h_0\sqrt{2}\phi(2t) + h_1\sqrt{2}\phi(2t-1) + \dots + h_{N-1}\sqrt{2}\phi(2t-N+1). \quad (19)$$

- Po to apskaičiuojama vilnele

$$\psi(t) = g_0\sqrt{2}\phi(2t) + g_1\sqrt{2}\phi(2t-1) + \dots + g_{N-1}\sqrt{2}\phi(2t-N+1). \quad (20)$$

Integruodami (19) lygybės abi pusės realiujų skaičių ašimi, gausime tokią sąlygą:

$$h_0 + h_1 + \dots + h_{N-1} = \sqrt{2}. \quad (21)$$

Jei dar sieksime, kad ϕ ir ψ funkcijų sveikujų poslinkių sistemos būtų ortonormuotos, tai h_n koeficientai turės tenkinti netiesines sąlygas

$$\sum h_n h_{n+2m} = \delta_{n-m}, \quad (22)$$

(čia $\delta_0 = 1$ ir $\delta_k = 1$, kai $k \neq 0$), o g_n bus išreiškiami formulėmis $g_n = (-1)^n h_{N-1-n}$. S. Mallatas ϕ pavadino mastelio (*angl. scaling*) funkcija, o (19) ir (20) vadinamos atitinkamai funkcijų ϕ ir ψ mastelių ryšio formulėmis. Nors iš pirmo žvilgsnio ϕ ir ψ mastelių ryšio formulės yra panašios, tačiau tarp jų yra gana esminis skirtumas. (19) formulė yra sudētingesnė, nes jos abiejose pusėse yra nežinoma funkcija $\phi = \phi(t)$. Naudojantis vilnelės mastelio ryšio formule (20), iš karto galima apskaičiuoti jos kairiojoje pusėje esančią vilnelės funkciją $\psi = \psi(t)$, jei tik dešiniosios pusės išraiškoje dalyvaujanti mastelio funkcija ϕ jau yra žinoma.

Didžiulę įtaką vilnelių teorijos vystymuisi padarė I. Dobešy (*I. Daubechies*) darbas [4]. Jis cituojamas praktiskai visuose vėlesniuose straipsniuose, kuriuose minimos vilnelės. Dobešy įrodė, kad visų integruojamų ortogonalų mastelio ir vilnelių funkcijų, tenkinančių mastelių ryšio formules (19)–(20), atramos (t. y. aibės tų t , su kuriais funkcija nelygi nuliui) telpa intervalė $[0, N-1]$. Kai $N = 2$ iš 15 pav. matyti, kad Haro mastelio ir vilnelės funkcijų atrama sutampa su intervalu $[0, N-1]$. Atramos kompaktiškumo savybė labai palengvina mastelio ryšio lygčių sprendimą. Iš tikrųjų turėdami omenyje, kad $\phi(t) = 0$, kai $t < 0$ ar $t > N-1$, ir imdami (19) formulėje sveikasias t reikšmes nežinomujų $\phi(0), \phi(1), \dots, \phi(N-1)$ atžvilgiu, gausime homogeninę N -osios eilės tiesinių lygčių sistemą. Šios sistemos matricos prie nežinomujų determinantas lygus nuliui, todėl viena iš sistemos lygčių yra pakeičiama normavimo sąlyga

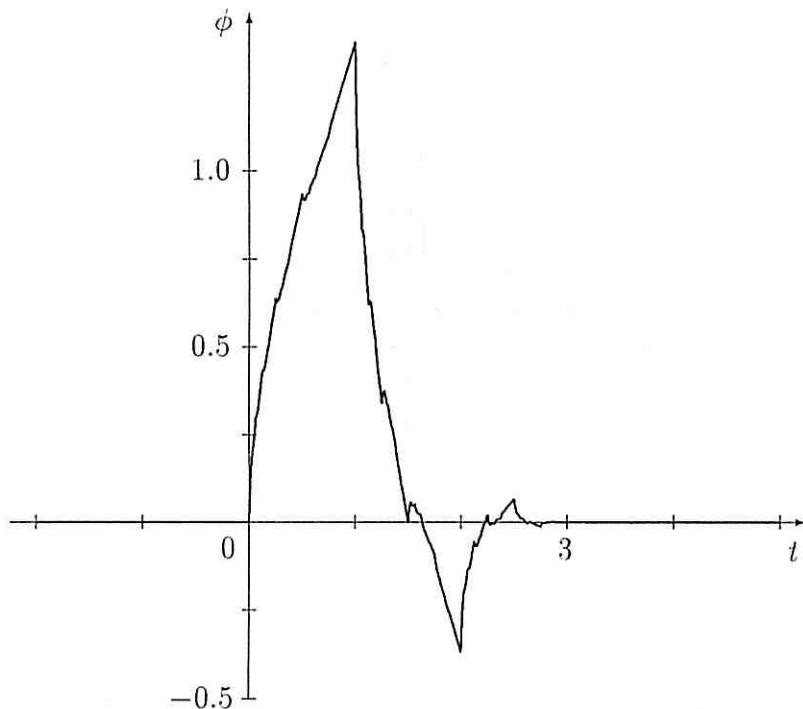
$$\phi(0) + \phi(1) + \dots + \phi(N-1) = 1.$$

Išsprendus tokiu būdu sudarytą tiesinių lygčių sistemą, surandamos mastelio funkcijos reikšmės sveikuosiuose taškuose $t = k$, po to, remiantis (19) formulėmis, paeiliui randamos ϕ reikšmės taškuose $t = k/2$, $t = k/4$ ir t.t.

Nemažinant bendrumo h_0 ir h_{N-1} koeficientus galima laikyti nelygais nuliui. Jei rinkinys $h_n, n = 0, \dots, N-1$, tenkina (22) sąlygas, tai bendras rinkinio elementų skaičius N būtinai turi būti lyginis. Paprasčiausiu atveju, kai $N = 2$, iš (21) ir (22) matyti, kad tėra vienintelis būtinas ortogonalumo sąlygas tenkinantis h rinkinys, t.y. $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$. Šis rinkinys generuoja mums jau pažistamą Haro mastelio funkciją. Jei $N \geq 4$, tai galima surasti be galo daug rinkinių $\{h_n\}_{n=0}^{N-1}$, tenkinančių būtinas ortogonalumo sąlygas (21) ir (22). I. Dobešy pavyko rasti tokius koeficientų rinkinius $\{h_n\}$, indukuojančius glodžias mastelio ir vilnelės funkcijas. Akivaizdu, kad didėjant N didėja $\{h_n\}_{n=0}^{N-1}$ rinkinio laisvės laipsnis, todėl didesniems N galima atrasti glodesnių ϕ ir ψ . Kai $N = 2$, gauname Haro mastelio ir vilnelės funkcijas, turinčias keletą trūkio taškų. Kai $N = 4$, Dobešy pavyko rasti rinkinį

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}},$$

kurio indukuojamos mastelio ir vilnelės funkcijos yra tolydžios realiųjų skaičių aibėje. Ši jau tapusi klasikine Dobešy mastelio funkcija $\phi = \phi(t)$ pavaizduota 16 pav.

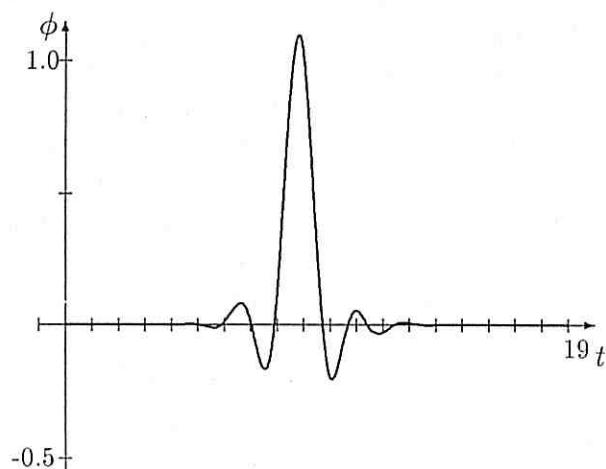


16 pav. Dobešy mastelio funkcija $\phi = \phi(t)$

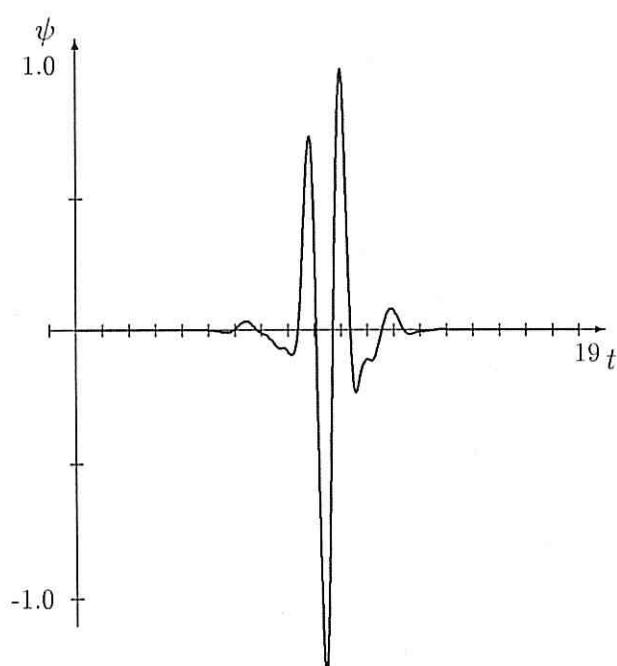
• • • $\alpha + \omega$ • • •

Kaip jau pastebėjome, didesniems N galima tikėtis dar glodesnių mastelio ir vilnelės funkcijų.

Dobešy mastelio funkcija ir vilnelė, kurių mastelių ryšio formulėje yra 20 nenuliniai koeficientai pavaizduotos atitinkamai 17 ir 18 pav.



17 pav. Dobešy mastelio funkcija su 20 nenuliniai koeficientų



18 pav. Dobešy mastelio funkcija su 20 nenuliniai koeficientų

Dobešy kompaktinės atramos mastelio ir vilnelės funkcijos laikytinos atitinkamų Haro funkcijų apibendrinimu. Šios funkcijos ir jų Furjė transformacijos

yra gana glodžios ir gerai lokalizuotos (greitai gesta, kai argumento modulis didėja). Daugelis praktikų teigia, kad signalams aproksimuoti geriausiai tinkamiai dariniai glodžių gerai lokalizuotų laiko ir dažnio srityse funkcijų.

4.2. Vilnelių skleidiniai

Kodėl tikslinga siekti vilnelės glodumo? Vilnelė naudojama (15) skleidinyje užrašant $u = u(t)$ signalą. Praktiškai signalai būna glodūs, t. y. turi daug ar be galio daug išvestinių. Jei glodų signalą u skleisime neglodžių funkcijų tiesiniu dariniu, pavyzdžiui, Haro vilnelės sveikaisias poslinkiais, paimtais su dvejeto sveikujų laipsnių masteliais, tai toks darinys privalės būti begalinis. Jei (15) skleidinio bazinė vilnelė ψ yra glodi, tai baigtiniai (15) tipo tiesiniai dariniai aprašys ψ glodumo eilės signalą $u = u(t)$. Jei bet kokia glodi funkcija $u = u(t)$ užrašoma (15) skleidiniu, apibrėžtu aukštostas eilės N Dobešy vilnele ψ , tai šio skleidinio koeficientai $\langle u, \psi_{j,n} \rangle$ greitai nyksta augant skalės rodikliui j . Taip yra todėl, kad Dobešy vilnelės ψ , apibrėžtos mastelių ryšio koeficientų rinkiniu h_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$, pirmieji $N/2$ momentai lygūs 0, t.y.

$$\int \psi(t) t^j dt = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N/2 - 1.$$

Iš šios Dobešy vilnelių savybės ir Teiloro formulės nesunkiai išplaukia, kad bet kokios $N/2$ kartų tolydžiai diferencijuojamos funkcijos u vilnelės skleidinio koeficientai tenkins įvertį

$$\langle u, \psi_{j,n} \rangle = O(2^{-j(N+1)/2}), \quad \text{kai } j \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Todėl signalai dažnai aprašomi Dobešy vilnelėmis. Praktiškai yra naudojami baigtinės (15) tipo funkcijų aproksimacijos. (23) parodo, kad glodžius signalus $u = u(t)$ galima norimu tikslumu aproksimuoti Dobešy vilnelės įvairių mastelių sveikujų poslinkių baigtiniais tiesiniais dariniais. Tačiau neglodžių signalų Dobešy vilnelės skleidinio koeficientai lėtai ges, todėl tokiemis signalams galima vilnelę adaptuoti apibrėžiant koeficientų rinkinį h_n taip, kad signalo skleidinio koeficientai kuo greičiau gestų neaprëztai augant skalės parametru j .

Gali kilti klausimas, kodėl nesirūpinama vilnelės skleidinio koeficientų $\langle u, \psi_{j,n} \rangle$ elgesiu, kai j neaprëztai mažėja. Ši problema yra kardinaliai sprendžiama, aprašant pradinį signalą u tam tikro mastelio funkcijos ϕ sveikujų poslinkių tiesiniu dariniu. Kitaip tariant, laikoma

$$u(t) = \sum_n u_n^J \sqrt{2}^J \phi(2^J t - n). \quad (24)$$

Tai nėra drastiška prielaida, nes artinant J i $-\infty$ bet kokią integruojamojo kvadrato funkciją $u = u(t)$ norimu tikslumu galima aprašyti $\phi(2^J t)$ funkcijos sveikujų poslinkių tiesiniu dariniu. Dėl mastelio ir vilnelės funkcijų sveikujų poslinkių ortogonalumo (24) išraiška aprašomos funkcijos u visi vilnelių koeficientai $\langle u, \psi_{j,n} \rangle$, kurių skalės parametras tenkina nelygybę $j \leq J$, yra lygūs

0. Pakanka nagrinėti atvejį $J = 0$, nes prie pradinės skalės $j = 0$ galima pereiti mastelių ištempiant: $v(t) = u(2^J t)$.

Koefficientai $\langle u, \psi_{j,n} \rangle$ yra vadinami funkcijos u vilnelės transformacija. Skirtingai nuo Furjė arba Ermito transformacijos, vilnelės transformaciją yra be galo daug. Skirtingos vilnelės ψ apibrėžia skirtinges transformacijas. Todėl atsiranda galimybė vilnelės transformaciją pritaikyti transformuojamam signalui. Skirtingą transformaciją kokybei palyginti dažnai naudojama entropijos charakteristika. Sakoma, kad u signalo ψ^1 vilnelės transformacija yra geresnė už ψ^2 transformaciją, jei u pirmosios vilnelės transformacijos entropija yra mažesnė už antrosios transformacijos entropiją, t.y.

$$-\sum_{j,n} |\langle u, \psi_{j,n}^1 \rangle|^2 \ln(|\langle u, \psi_{j,n}^1 \rangle|^2 / \|u\|^2) \leq -\sum_{j,n} |\langle u, \psi_{j,n}^2 \rangle|^2 \ln(|\langle u, \psi_{j,n}^2 \rangle|^2 / \|u\|^2);$$

čia $\|u\|^2$ žymi signalo L_2 energiją. Jei skirtinę indeksų transformacijos koeficientai yra poromis nepriklausomi, tai mažesnės entropijos signaluose yra „mažiau informacijos“. Mažos informacijos signalus galima efektyviai koduoti ir tiksliai aproksimuoti neilgomis dalinėmis vilnelės skleidinio sumomis. Todėl vilnelės transformacijos entropijos minimizavimo principas yra praktiskai plačiai taikomas.

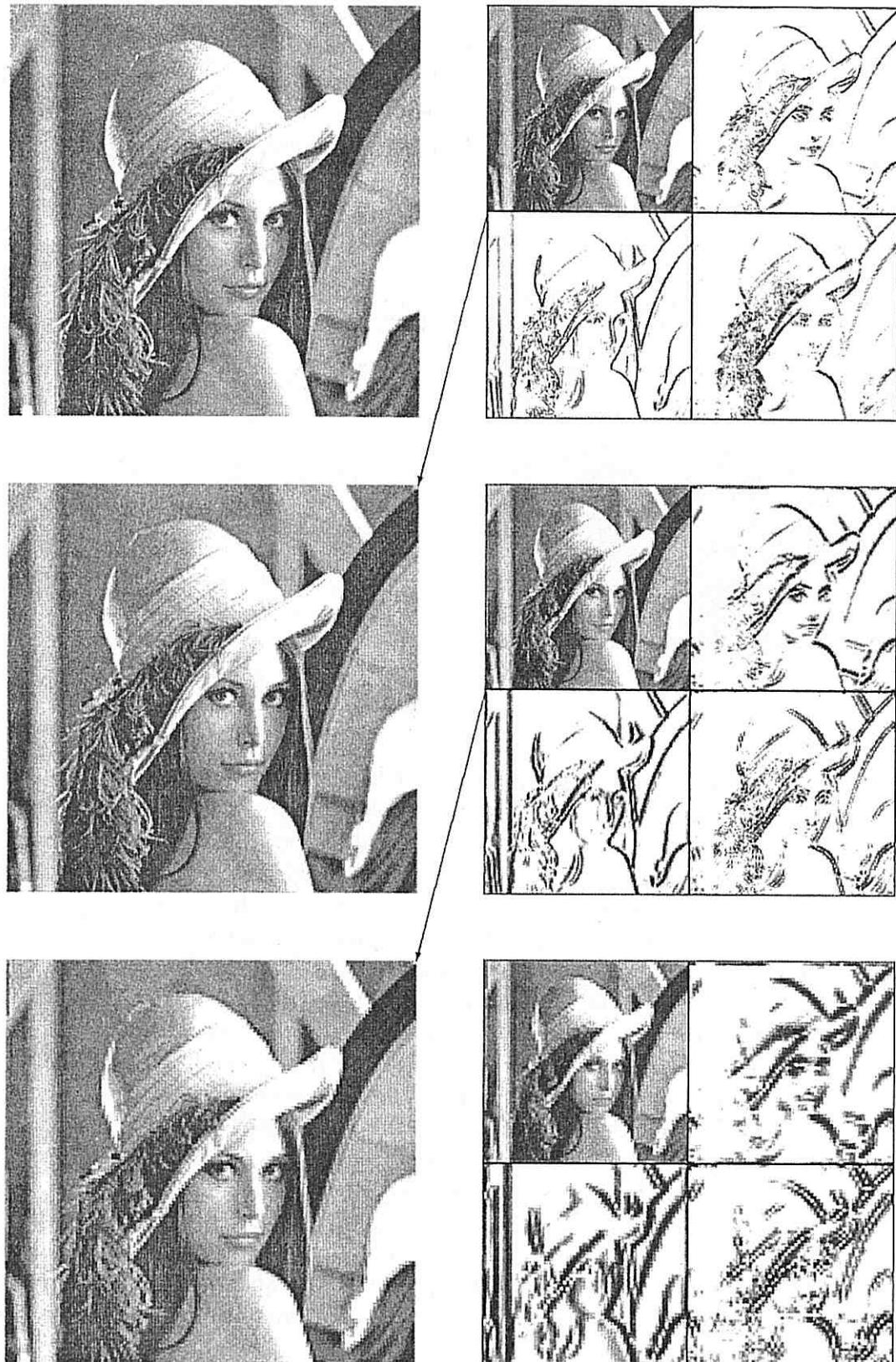
Vilnelės transformacija turi dar vieną labai svarbią praktikai savybę – yra žinomas efektyvus koeficientų $\langle u, \psi_{j,n} \rangle$ skaičiavimo algoritmas, vadinamas greitaja vilnelės transformacija. Greitoji vilnelės transformacija skaičiuojama rekurentiškai. Nuliname žingsnyje koeficientai $\langle u, \phi(t-n) \rangle$ laikomi žinomais. Šių koeficientų įverčio klausimas yra gana subtilus, nes paprastai funkcija $u = u(t)$ būna apytiksliai išmatuota tik tam tikruose taškuose $t_n = n\Delta t$. Mastelių visuomet galima parinkti taip, kad $\Delta t = 1$ ir $t_n = n$. Praktiskai gerai pasiteisina tokia paprasta pradinių koeficientų parinkimo taisyklė: $\langle u, \phi(t-n) \rangle = u_n$. Čia u_n yra signalo $u = u(t)$ apytiksliai išmatuota reikšmė taške $t = t_n$. Pirmu vilnelės transformacijos žingsniu remiantis mastelio ryšio formulėmis apskaičiuojami c_n ir d_n koeficientai:

$$\sum_n u_n \phi(t-n) = \sum_n c_n \sqrt{2} \phi(2t-n) + \sum_n d_n \sqrt{2} \psi(2t-n).$$

Antru žingsniu taikant tas pačias formules skaidoma funkcija

$$\sum_n c_n \phi(t-n) = \sum_n cc_n 2\phi(4t-n) + \sum_n dc_n 2\psi(4t-n).$$

Trečiu žingsniu skaidoma funkcija $\sum_n cc_n 2\phi(4t-n)$ ir taip toliau. Jei mastelio funkciją apibrėžiančių nenulinių koeficientų h_n yra N , o pradinių žinomų duomenų $u_n = u(n)$ yra M , tai pirmo vilnelės transformacijos žingsnio skaičiavimo aritmetinių veiksmų skaičius proporcingas NM , antrojo – $NM/2$, trečiojo – $NM/4$ ir t.t. Nesunku įvertinti, kad bendras aritmetinių operacijų skaičius, reikalingas apskaičiuoti vilnelės transformacijai, proporcingas NM . Dėl šios priežasties rekurentinis vilnelės transformacijos skaičiavimo algoritmas vadinamas greituoju. Palyginimui, su tais pačiais pradiniais duomenimis greitosios Furjė transformacijos algoritmo sudėtingumas yra $M \log_2 M$.



19 pav. „Lenos“ įvairių mastelių vaizdai, gauti vilnelių metodu

• • • $\alpha + \omega$ • • •

Pasižiūrėkime į dvimačio vaizdo vilnelės transformacijos pavyzdžius, patiekus 19 ir 20 pav. Dvimačių signalų vilnelės transformacijos atliekamos taip pat rekurenčiais žingsniais. Pirmas žingsnis pradinį signalą transformuoja į keturis naujus vaizdus, kurie gaunami taikant hh , hg , gh ir gg filtravimus. Pirmas simbolis parodo naudojamą filtrą įprasta x kryptimi, o antrasis – y kryptimi. Viršutinė 19 pav. dalis iliustruoja pirmą transformacijos žingsnį.



20 pav. „Lenos“ trijų žingsnių vilnelės transformacija

Pradinis vaizdas, vadinamas „Lena“, yra kairiajame viršutiniame kampe. hh , hg , gh ir gg filtrais gaunami rezultatai parodyti dešiniau ir atitinkamai užima antrajį, pirmajį, trečiąjį ir ketvirtąjį ketvirčius. hh dalis primena du kartus x ir y kryptimis suspaustą pradinį vaizdą. Kitos trys dalys gerai aprašo vaizdo kontūrus. hg dalis geriausiai išryškina horizontalius kontūrus, gh – vertikaliuosius, o gg – kontūrus, sudarančius 45 ir 135 laipsnių kamпą su horizonto linija. Antras transformacijos žingsnis atliekamas su „suspausta pradinio vaizdo kopija“, t.y. su hh dalimi. Jis iliustruoja vidurinę 19 pav. dalis. Kairėje pusėje pateikta du kartus x ir y kryptimis padidinta po pirmojo žingsnio gauta hh dalis*. Dešiniau yra po antrojo vilnelės transformacijos žingsnio gaunami vaizdai. Apatinė pėsinio dalis analogiškai iliustruoja trečią žingsnį. Visų trijų žingsnių bendras rezultatas matyti 20 pav. Ar galima iš dešiniojo 20 pav. signalo rekonstruoti pradinį „Lenos“ vaizdą? Taip, galima, nes kiekvienas vilnelės transformacijos žingsnis yra apgręžiamas. Vizualiai nesunku ivertinti, kad „Lenos“ vilnelės transformacijos palyginti maža dalis koeficientų yra didelė, o didžioji dalis koeficientų, žymimų balta spalva, yra maža. Todėl transformuotos „Lenos“ entropija yra mažesnė ir informacijos prasme šis vaizdas

* Realiai vilnelės transformacija tokio hh dalies padidinimo neatlieka. Čia taip pateikta, kad būtų lengviau sulyginti transformacijos skirtinių žingsnių rezultatus.

yra patogesnis analizei.

4.2. Išvados

Įsitikinome, kad egzistuoja be galio daug diskrečiųjų $L_2(-\infty, \infty)$ erdvės Dekarto sistemų. Integruojamojo kvadrato funkcijų erdvės n -oji koordinačių ašis aprašoma funkcija $u_n \in L_2(-\infty, \infty)$. Bet kokią integruojamojo kvadrato funkciją $x = x(t)$ visiškai aprašo jos Dekarto koordinatės $x_n = \langle x, u_n \rangle$. Skaliarinės sandaugos bei atstumo tarp dviejų integruojamojo kvadrato funkcijų $x, y \in L_2(-\infty, \infty)$ formulės nepriklauso nuo funkcijų erdvės Dekarto koordinačių sistemos pasirinkimo:

$$\langle x, y \rangle = \sum_n x_n \bar{y}_n;$$

$$\rho(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{\sum_n |x_n - y_n|^2}.$$

Skirtingai nuo plokštumos ortų \vec{i} ir \vec{j} , Dekarto koordinačių ašis aprašančios funkcijos u_n visiems n gali būti unikalios. u_n sistemos unikalumas suprantamas ta prasme, kad bet kurios ašinės funkcijos u_n negalima sutapatinti su kuria nors kita ašine funkcija naudojant argumento poslinkio ir mastelio keitimo operacijas. Egzistuoja integruojamojo kvadrato funkcijų erdvės Dekarto koordinačių sistemos, aprašomos vienos funkcijos (vilnelės) dvejeto sveikujų laipsnių mastelių sveikaisias poslinkiais, t.y. funkcijomis

$$\psi_{j,n}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - n), \quad j, n \in \mathbb{Z}.$$

Tokios sistemos integruojamojo kvadrato funkcija u aprašoma savo projekcijomis į Dekarto koordinačių ašis, t. y. skaičiais $u_{j,n} = \langle u, \psi_{j,n} \rangle$. Koeficientų rinkinį $u_{j,n}$ galima interpretuoti u signalo vaizdu laiko ir dažnio plokštumoje. Dobešy kompaktinės atramos vilnelės ψ , kurios pirmieji momentai lygūs nuliui, t.y.

$$\int \psi(t) t^j dt = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M,$$

gerai tinkta aprašyti glodžioms funkcijoms $u = u(t)$, nes jų Dobešy vilnelės transformacijos koeficientai greitai gėsta, kai skalės parametras didėja.

Pabaigai išvardysime sritis, kuriose sėkmingai taikomos vilnelės. Tai – astronomija, akustika, atominė fizika, vaizdų kodavimas, garso ir vaizdo signalų analizė, neurofiziologija, muzika, magnetinio rezonanso apdorojimas, kalbos ir opinio teksto atpažinimas, fraktalai, turbulentiškumas, optika, žemės drebėjimų prognozė, antenų modeliavimas, žmogaus rega, skaitinis integravimas, diferencialinių lygtių sprendimas ir t.t.

Literatūra

- [1] Hilbert D., *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Lpz. – B., 1912; N. Y., 1953.
- [2] Mallat S., A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, *IEEE Trans. PAMI*, 1989, **11**, 674–693.
- [3] Mallat S., Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models, *Trans. Acoust. Signal Speech Process.*, 1989, **37**, 2091–2110.
- [4] Daubechies I., Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets, *J. Comm. on Pure and Applied Math.*, 1988, **XLI**, 909–996.