Giedrius Alkauskas

Nelygybės

Dažnai tenka įrodinėti nelygybes bei ieškoti dydžių įverčių. Dažniausiai nelygybę galima įrodyti pasinaudojus aibės (pvz., realiųjų skaičių) sutvarkymu, tačiau kartais prireikia sudėtingesnių samprotavimų. Pavyzdžiui, P. Čebyševo nelygybę

$$\alpha\frac{x}{\log x} < \pi(x) < \beta\frac{x}{\log x},$$

(čia $\pi(x)$ – pirminių skaičių p, $p \le x$, kiekis, α, β – teigiamos konstantos), galime įrodyti nustatę, kad jos neiginys veda prie prieštaros*.

Su visais realiaisiais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ teisinga

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \ge 0.$$

Daugelis nelygybių gaunamos tiesiog iš šios. Pavyzdžiui, $x^2+y^2 \ge 2xy$. Tačiau panagrinėkime įdomesnius atvejus.

Viena elementari nelygybė

Tegu $0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ ir $0 \le b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ yra du realiųjų skaičių rinkiniai. Kokiu nors būdu perstatykime skaičius b_i, t. y. sudarykime naują seką $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_n}$ ir susumuokime sandaugas $a_k b_{i_k}$. Įrodysime, kad teisinga nelygybė

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_{i_k} \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_k. \qquad (1)$$

Kairiojoje šių nelygybių sumoje didėjant sumavimo indeksui k dydžiai a_k didėja, o prie jų stovintys daugikliai b_{n-k+1} mažėja. Dešiniojoje sumoje tiek a_k, tiek b_k didėja.

Įrodysime tik dešiniąją (1) nelygybę, nes kairioji įrodoma analogiškai. Peržiūrėkime visas vidurinės sumos dėmenų poras $a_k b_{i_k}, a_l b_{i_l}, k < l$. Visoms joms teisinga $a_k \le a_l$. Jeigu visoms poroms taip pat teisinga $b_{i_k} \le b_{i_l}$, tai vidurinė

* Žr. išsamiau „Alfa + omega", 1996, 1, p. 29.

suma tiesiog sutampa su dešiniąja ir įrodymas baigtas. Jei atsiras pora su sąlyga $b_{i_k} > b_{i_l}$, tai iš nelygybės

$$(a_l - a_k)(b_{i_k} - b_{i_l}) > 0$$

gausime

$$a_l b_{i_k} + a_k b_{i_l} > a_l b_{i_l} + a_k b_{i_k},$$

t. y. vidurinės sumos dėmenis $a_k b_{i_k}, a_l b_{i_l}$ pakeitę dėmenimis $a_k b_{i_l}, a_l b_{i_k}$ sumą tik padidinsime. Šioje naujoje sumoje prie dydžių $a_k \leq a_l$ daugikliai $b_{i'_k} = b_{i_l}, b_{i'_l} = b_{i_k}$ tenkina nelygybę $b_{i'_k} < b_{i'_l}$. Nagrinėkime, ar šios naujosios sumos taip pat negalima tuo pačiu būdu padidinti. Jei ne – gausime (1) nelygybės dešiniąją pusę. Jei taip – padarykime tai. Po baigtinio skaičiaus tokių pertvarkymų būtinai gausime (1) dešiniąją sumą. Taigi nelygybė įrodyta.

Įrodytoji nelygybė „slepiasi" po daugeliu žinomų nelygybių. Tegu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yra teigiami skaičiai, $S = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$. Jeigu reikia, pernumeruokime skaičius x_i, kad galiotų nelygybės

$$1 \leq \frac{S}{x_i} \leq \frac{S^2}{x_1 x_2} \leq \ldots \leq \frac{S^{n-1}}{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}}. \tag{2}$$

Tada

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}}{S^{n-1}} \leq \frac{x_1 x_2 \ldots x_{n-2}}{S^{n-2}} \leq \ldots \leq \frac{x_1}{S} \leq 1. \tag{3}$$

(2) sekos k-ąjį skaičių pažymėkime a_k, (3) sekos – b_k. Pritaikykime (1) kairiąją nelygybę:

$$a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1.$$

Tačiau ši nelygybė, įstačius į ją a_i, b_j reikšmes, virsta nelygybe

$$\frac{x_1}{S} + \frac{x_2}{S} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{S} + \frac{S^{n-1}}{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}} \geq n,$$

arba po paprastų skaičiavimų –

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

taigi aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe.

••• $\alpha + \omega$ •••

Jenseno nelygybė

Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, čia I – realiųjų skaičių intervalas, vadinama įgaubtąja, jei su visais $x, y \in I$ teisinga nelygybė

$$f(\frac{x+y}{2}) \le \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

Iš šios nelygybės jau nesunku išvesti, kad su visais natūraliaisiais a, b, kuriems $a + b = 2^n$, teisinga nelygybė

$$f(\frac{a}{2^n}x + \frac{b}{2^n}y) \le \frac{a}{2^n}f(x) + \frac{b}{2^n}f(y). \tag{4}$$

Tegu dabar $f(x)$ – tolydi įgaubta funkcija, $0 < \alpha, \beta < 1, \alpha + \beta = 1$. Imkime natūraliųjų skaičių seką a_n, kad $a_n 2^{-n} \to \alpha$, kai $n \to \infty$. Jei $b_n = 2^n - a_n$, tai $b_n 2^{-n} \to \beta$, kai $n \to \infty$. Įstatę į (4) nelygybę $a = a_n, b = b_n$ ir perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, gausime

$$f(\alpha x + \beta y) \le \alpha f(x) + \beta f(y), \quad 0 \le \alpha, \beta \le 1, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Dabar jau nesunku šią nelygybę apibendrinti. Jei f – tolydi, įgaubta funkcija, tai su visais $x_1, \ldots, x_n$ ir visais $0 \le \alpha_1, \ldots, \alpha_n \le 1, \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, teisinga nelygybė

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

Ši nelygybė ir vadinama Jenseno* nelygybe.

Pritaikę Jenseno nelygybę įgaubtai funkcijai $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1)$, gautume

$$\ln(\mathrm{e}^{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n} + 1) \le \alpha_1 \ln(\mathrm{e}^{x_1} + 1) + \ldots + \alpha_n \ln(\mathrm{e}^{x_n} + 1).$$

Jei $x_i = \ln \tau_i (\tau_i > 0)$, tai šią nelygybę galima perrašyti taip:

$$\tau_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \tau_n^{\alpha_n} + 1 \le (\tau_1 + 1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (\tau_n + 1)^{\alpha_n}.$$

Atskiru atveju, kai $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1/n$, gauname Minkovskio nelygybę

$$(\tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_n)^{1/n} + 1 \le \left((\tau_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\tau_n + 1)\right)^{1/n}$$

kuri teisinga su visais $\tau_i \ge 0$.

---

* Johan Ludwig Jensen (1859–1925) – danų matematikas.

Vienos nelygybės tyrimas

1950 metais žurnale „*American Mathematical Monthly*“ pasirodė uždavinys:

esant kokiems natūraliesiems n nelygybė

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geq\frac{n}{2}$$

teisinga su visais teigiamais skaičiais x_i ?

Gali atrodyti, kad uždavinys nesunkus (kai $n = 3, 4$, taip iš tikrųjų ir yra). Tačiau atvejis $n = 7$ pasirodė išties sudėtingas. Vis dėlto buvo įrodyta, kad nelygybė teisinga su visais teigiamais x_i, kai $n \leq 13$. Tačiau, kai $n = 14$, nelygybė nėra teisinga, pavyzdžiui, ji negalioja su šiuo skaičių x_i rinkiniu:

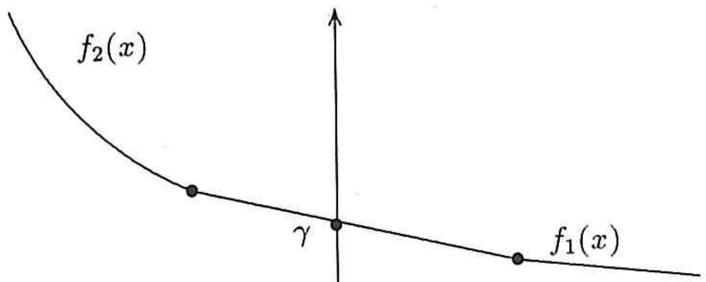
$$\{50; 5; 48; 1; 50; 0; 52; 1; 54; 4; 53; 69\}.$$

Nesunkiai galima įrodyti, kad jeigu nelygybė neteisinga su nelyginiu n, tai ji neteisinga su visais $m \geq n$. Buvo nustatyta, kad nelygybė neteisinga su $n = 25$. Atsakymas į uždavinio klausimą toks: nelygybė teisinga tik su visais lyginiais $n \leq 12$ ir nelyginiais $n \leq 23$.

Tačiau uždavinį galime tirti toliau. Kokiam didžiausiam skaičiui γ nelygybė

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geq\frac{n}{2}\gamma$$

teisinga su visais teigiamais x_i? Atsakymą 1969 metais dar būdamas moksleiviu rado Vladimiras Drinfeldas (1990 metais jis gavo Fyldso medalį). Šis skaičius γ lygus kreivių $y = f_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$ ir $y = f_1(x) = (\mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^{x})^{-1}$ bendrosios liestinės sankirtos su Oy ašimi ordinatei, žr. 1 pav. Skaitinė konstantos reikšmė $\gamma = 0,989...$



1 pav.

Įrodysime šį rezultatą. Mums prireiks tik anksčiau įrodytų nelygybių.

Tegu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yra teigiami realieji skaičiai. Pažymėkime:

$$d_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ a_i = \frac{x_i}{x_{i+1}}, \ b_i = \frac{x_i}{x_{i+1} + x_i}, \ i = 1, 2, , \ldots, n-1, \tag{5}$$

$$d_n = \frac{x_1}{x_n}, \ a_n = \frac{x_n}{x_1}, \ b_i = \frac{x_n}{x_n + x_1}.$$

Taigi visais atvejais $a_i = 1/d_i, b_i = 1/(d_i+1)$. Tarkime, a_i^* yra tie patys skaičiai a_i, tik išdėstyti didėjimo tvarka: $a_1^* \leq a_2^* \leq \ldots \leq a_n^*$. Nesunku įsitikinti, kad juos atitinkantys skaičiai b_i^* irgi yra išdėstyti didėjimo tvarka: $b_1^* \leq \ldots \leq b_n^*$. Skaičiams a_i, b_i pritaikę (1) kairiąją nelygybę, gausime

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} =$$

$$a_1 b_2 + a_2 b_3 + \ldots + a_{n-1} b_n + a_n b_1 \geq \sum_{k=1}^{n} a_k^* b_{n-k+1}^*.$$

Prisiminę (5) žymenis, rašysime: $a_k^* = 1/d_k^*, b_k^* = 1/(1 + d_k^*)$. Tegu $r_k = a_k^* b_{n-k+1}^* + a_{n-k+1}^* b_k^*$, tada

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} r_k. \tag{6}$$

Nesunku patikrinti, kad

$$r_k = \frac{1}{d_k^* d_{n-k+1}^*} \left(\frac{d_{n-k+1}^*}{1 + d_{n-k+1}^*} + \frac{d_k^*}{d_{n-k+1}^*} \right).$$

Pažymėję $c_k = d_k^* d_{n-k+1}^*$, dydį r_k išreikšime taip:

$$r_k = \frac{1}{c_k} \left(1 + \frac{c_k - 1}{(1 + d_k^*)(1 + d_{n-k+1}^*)} \right).$$

Iš Minkovskio nelygybės gauname

$$(1 + d_k^*)(1 + d_{n-k+1}^*) \geq \left(1 + \sqrt{d_k^* d_{n-k+1}^*}\right)^2 = (1 + \sqrt{c_k})^2.$$

Jei $c_k \geq 1$, dydį r_k vertinsime $r_k > 1/c_k$; jei $0 < c_k < 1$, naudosime įvertį

$$r_k > \frac{1}{c_k} + \frac{c_k - 1}{(1 + \sqrt{c_k})^2} = \frac{2}{c_k + \sqrt{c_k}}.$$

Taigi iš (6) gauname

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geq$$
$$\frac{1}{2}\Big(\sum_{c_k\geq 1}\frac{1}{c_k}+2\sum_{c_k<1}\frac{1}{c_k+\sqrt{c_k}}\Big). \tag{7}$$

Pažymėkime $c_k = \mathrm{e}^{y_k}$. Kadangi $(c_1c_2\ldots c_n)=(d_1d_2\ldots d_n)^2=1$, tai $y_1+\ldots+y_n=0$. Dabar (7) nelygybę perrašysime

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geq$$
$$\geq\frac{1}{2}\Big(\sum_{y_k\geq 0}\mathrm{e}^{-y_k}+2\sum_{y_k<0}\frac{1}{\mathrm{e}^{y_k}+\mathrm{e}^{y_k/2}}\Big). \tag{8}$$

Funkcijos $f_1(x)=\mathrm{e}^{-x}$ ir $f_2(x)=2(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{x/2})^{-1}$ turi vieną bendrą liestinę $f_3(x)=mx+n$, lietimosi taškų abscisės yra α,β (žr. 1 pav.).

Apibrėžkime funkciją

$$g(x)=\begin{cases} f_2(x), & x\in(-\infty,\alpha],\\ f_3(x), & x\in(\alpha,\beta],\\ f_1(x), & x\in(\beta,\infty].\end{cases}$$

Ši funkcija yra įgaubta, be to, $g(x)\leq f_1(x), f_2(x)$. Tada iš (8) gauname (naudodami Jenseno nelygybę)

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geq\frac{1}{2}(g(y_1)+g(y_2)+\ldots+g(y_n))=$$
$$\frac{n}{2}\Big(\frac{1}{n}g(y_1)+\frac{1}{n}g(y_2)+\ldots+\frac{1}{n}g(y_n)\Big)\geq\frac{n}{2}g\Big(\frac{y_1+\ldots+y_n}{n}\Big)=\frac{n}{2}g(0)=\frac{n}{2}\gamma.$$

Šiek tiek sudėtingiau įrodyti, kad esant mažesnei už γ konstantai nelygybė jau nebėra teisinga su visais n ir x_i.

Nors pateiktas įrodymas yra paprastas, tačiau naudojant elementarias nelygybes prireikė didelio išradingumo. Žinoma, uždavinį galima tirti toliau. Pavyzdžiui, galima fiksuoti n ir klausti, kokia yra didžiausia konstantos γ_n reikšmė, kuriai esant nelygybė

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geq\frac{n}{2}\gamma_n$$

teisinga su visais teigiamais x_i. Gal vis dėlto už šios nelygybės slypi šis tas daugiau nei kelių elementarių nelygybių kombinacija?