Alfa + omega seminaras

Paslaptis miršta, kai ją sužino kiti žmonės, tačiau ne matematinė idėja. Idėją tiesiog būtina pagarsinti, kad ji būtų įvertinta, patikrinta, interpretuota ir išplėtota. Geriausia vieta tai padaryti – matematikos seminaras. *Seminarium* lotyniškai reiškia daigyną. Taigi seminare idėjos skleidžamos, diegiamos, dažnai ir pačios spontaniškai dygsta. Mokslinis straipsnis dažnai būna išsami atlikto darbo ataskaita, gi pranešimas seminare – visada fragmentiškas, brėžiantis kontūrus, keliantis klausimus, nors ne visada į juos atsakantis. Galbūt Jūs turite idėjų, klausimų, pastabų, uždavinių? Kodėl gi neparengus pranešimo mūsų seminarui?

Giedrius Alkauskas

Svarbių matematinių rezultatų užuomazgos moksleivių olimpiadose

Matematinis olimpiadinis judėjimas, prasidėjęs 1894 metais Vengrijoje, labai išsiplėtė: beveik nėra šalies, kuroje nevyktų nacionalinės matematikos olimpiados. Vyksta daug tarptautinių regioninių varžybų (mūsiškis „Baltijos kelias“, „Balkaniada“ ir t. t.), nuo 1959 metų kasmet organizuojama Tarptautinė matematikos olimpiada (TMO), kurioje šiais metais dalyvavo 84 valstybės.

Pagrindinis olimpiadų tikslas – ugdyti moksleivių savarankišką mąstymą, matematinę kūrybą. Dėl mokyklinio matematikos kurso ribotumo rimtesnė matematinė problema olimpiadai netinka, tad dažnas konkursinis uždavinys kaip matematinis rezultatas yra menkavertis, nors jo sprendimas ir reikalauja virtuoziško matematinės technikos įvaldymo. Tai suprantama: moksleiviams visų pirma reikia išsiugdyti tam tikrą matematinę kultūrą. Matematikai, taip pat ir matematikos studentai jau gilinasi į bendras teorijas, o ne į galvosūkius ar olimpiadinio pobūdžio uždavinius. Tačiau ir olimpiadose kartais pasitaiko uždavinių, kuriuos galima pavadinti svarbių rezultatų užuomazgomis. Kelių tokių uždavinių analizei ir skirtas šis straipsnis.

Tegu $n \geq 2$ yra natūralusis skaičius. Įrodykite, kad jei $k^2 + k + n$ yra pirminis su visais natūraliaisiais $k, 0 \leq k \leq \sqrt{n/3}$, tai $k^2 + k + n$ yra pirminis skaičius su bet kuriuo $k, 0 \leq k \leq n - 2$.

(TMO, Havana, 1987)

Štai šio uždavinio sprendimas. Pažymėkime $a_k = k^2 + k + n$ ir $r = [\sqrt{n/3}]$ (sveikoji dalis). Taigi a_k pirminis su visais $k, 0 \leq k \leq r$. Tarkime, ne visi a_k su $r < k \leq n - 2$ yra pirminiai. Tegu s yra mažiausias iš skaičių, kuriam $r < s \leq n - 2$ ir a_s yra sudėtinis. Gausime prieštarą, įrodančią, kad tokio s negali būti.

Tegu p yra mažiausias pirminis a_s daliklis, tada $p \leq \sqrt{a_s}$. Nesunku pastebėti, kad turi būti teisinga nelygybė $p < 2s + 1$. Priešingu atveju iš nelygybės $\sqrt{a_s} \geq p \geq 2s + 1$ gautume prieštarą:

$$a_s = s^2 + s + n \geq (2s + 1)^2, \quad n - 1 \geq 3s^2 + 3s \geq 3(r + 1)^2 > n.$$

Dabar nagrinėkime s skaičių $a_s - a_k = (s - k)(s + k + 1)$ $(k = 0, 1, \ldots, s - 1)$. Kadangi skaičių aibė

$$\{s - k : k = 0, 1, \ldots, s - 1\} \cup \{s + k + 1 : k = 0, 1, \ldots, s - 1\}$$

sutampa su skaičių aibe $\{1, 2, \ldots, 2s\}$ ir $p < 2s$, tai atsiras toks k, kad p dalys $(s - k)(s + k + 1)$. Taigi atsiras toks $k, 0 \leq s - 1$, kad p dalys a_k. Kadangi pagal prielaidą a_k pirminis, tai $a_k = p$. Tačiau tada gauname prieštarą:

$$n < k^2 + k + n = p < \sqrt{a_s} = \sqrt{s^2 + s + n} < n.$$

Kaip matome, įrodymas gana paprastas, tačiau rezultatas turiningas. Šveicarų matematikas L. Oileris 1772 metais atrado daugianarį

$$f(k) = k^2 + k + 41,$$

kurio visos reikšmės $f(k)$, $k = 0, 1, \ldots, 39$, yra pirminiai skaičiai. Iš suformuluoto rezultato išplaukia, kad tuo galime įsitikinti nustatę, kad skaičiai $f(0), f(1), f(2), f(3)$ yra pirminiai. Visiškai tikėtina, kad skaičių sekoje $f(k)$ pirminiai skaičiai pasitaiko dažniau negu kitose gerai išnagrinėtose sekose (taip pat aritmetinėse progresijose). Pavyzdžiui, daugiau kaip $2/5$ aibės $f(k)$, $0 \leq k \leq 11000$, skaičių yra pirminiai. Apskritai apie pirminių skaičių pasiskirstymą sudėtingesnėse sekose žinoma labai mažai.

Natūraliojo skaičiaus n skirtingų išraiškų dvejeto laipsniais kiekį pažymėkime $f(n)$. Išraiškos, kurios skiriasi tik dėmenų tvarka, laikomos vienodomis. Įrodykite, kad su visais $n \geq 3$

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}. \tag{1}$$

(TMO, 1997, Mar del Plata, Argentina)

• • • $\alpha + \omega$ • • •

Vienas šių nelygybių įrodymas gali būti sukonstruotas įrodžius rekurentinius sąryšius

$$f(2n+1) = f(2n),\ f(2n) = f(2n-1) + f(n),\ n \geq 1.$$

Čia pateiksime kitą įrodymą, kuris duoda dar tikslesnius rėžius. Teks pasinaudoti n-matės erdvės $\mathbb{R}^n$ poaibių savybėmis, kurios, nors ir nenagrinėjamos mokykliniame matematikos kurse, tačiau yra lengvai intuityviai suprantamos.

Iš pradžių pastebėkime, kad lygties

$$x_0 + 2x_1 + 2^2x_2 + \ldots + 2^n x_n = 2^n$$

sprendinių sveikaisiais neneigiamais skaičiais kiekis lygus nelygybės

$$2x_1 + 2^2x_2 + \ldots + 2^n x_n \leq 2^n \tag{2}$$

sprendinių sveikaisiais neneigiamais skaičiais kiekiui. Taigi galime nagrinėti (2) nelygybę.

Viršutinis rėžis. Kiekvienam $1 \leq i \leq n$ yra vienintelis sprendinys, kuris paverčia (2) reiškinį lygybe $2^i x_i = 2^n$. Jei $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nėra vienas iš šių n sprendinių, tai su kiekvienu $1 \leq i \leq n$ gauname $2^i x_i < 2^n$. Taigi x_i gali įgyti ne daugiau kaip 2^{n-i} reikšmių. Tada

$$f(2^n) \leq n + \prod_{i=1}^{n-1} 2^{n-i} = n + 2^{n(n-1)/2} < 2^{n^2/2}, \text{kai}\ \ n \geq 3.$$

Apatinis rėžis. Tegu $a_1, a_2, \ldots, a_n, k$ yra teigiami skaičiai. Įvertinsime nelygybės

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq k \tag{3}$$

sprendinių neneigiamais sveikaisiais skaičiais kiekį iš apačios. Jis lygus taškų su sveikosiomis koordinatėmis kiekiui aibėje

$$A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \geq 0, a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq k\}.$$

Tarkime $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ yra aibės A taškas su sveikosiomis koordinatėmis. Sukonstruokime jam hiperkubą

$$K(s) = s + [0,1]^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : s_i \leq x_i \leq s_i + 1, i = 1, \ldots, n\}.$$

Visi kubai visiškai padengia aibę A. Išties, jei $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$, tai $s = ([x_1], [x_2], \ldots, [x_n]) \in A$ ir $x \in K(s)$. Tegu N yra (3) nelygybės sprendinių neneigiamais sveikaisiais skaičiais kiekis. Tada N lygus kubų sąjungos tūriui, kuris savo ruožtu yra ne mažesnis už aibės A_n tūrį $v(A_n)$. Taigi

$$N \geq v(A_n). \tag{4}$$

Aibė A_2 yra statusis trikampis ir jo tūris (plotas) lygus

$$\frac{1}{2}\frac{k^2}{a_1 a_2}.$$

Tetraedro A_3 tūris lygus

$$\frac{1}{6}\frac{k^3}{a_1 a_2 a_3}.$$

Analogiškai

$$v(A_n) = \frac{1}{n!}\frac{k^n}{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Pritaikę (4) su $a_i = 2^i, k = 2^n$, gausime (3) nelygybės sprendinių kiekio, taip pat ir funkcijos $f(n)$, apatinį rėžį:

$$f(n) > \frac{1}{n!}2^{(n^2-n)/2}.$$

Aišku, dideliems n šis rėžis yra daug geresnis nei (1).

Patobulinus skaičiavimus, galima gauti

$$\frac{1}{n!}2^{(n^2-n)/2}\left[n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k}{2^k}\right] < f(2^n) < \frac{1}{n!}2^{(n^2+n)/2}.$$

Skaičiavimai rodo, kad tikėtinas rezultatas

$$f(2^n) \sim C\frac{1}{(n-1)!}2^{n^2/2}, \quad n \to \infty \quad (\text{čia } C \text{ – konstanta.})$$

Skaičiai, kurių sumomis reiškiame skaičių k, yra specialūs (dvejeto laipsniai), tačiau tai – bendresnių uždavinių užuomazga. Turbūt analizinės skaičių teorijos specialistui nebūtų labai sunku nustatyti $f(n)$ asimptotiką. Žinomiausias tokio pobūdžio uždavinys – Hardžio–Ramanudžano problema apie lygties

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k = k$$

sprendinių kiekį $p(k)$ fiksuotam k. Gana elementariai įrodoma, kad

$$p(k) < e^{\pi\sqrt{2k/3}}.$$

Tegu X yra baigtinė aibė, o $E(X)$ – X poaibių, turinčių po lyginį skaičių elementų, rinkinys. Funkcija f apibrėžta $E(X)$ poaibiams ir įgyja realias reikšmes, be to, egzistuoja $D \in E(X)$, kad $f(D) > 0$ ir bet kokioms nesikertančioms aibėms $A, B \in E(X)$

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B). \tag{5}$$

Įrodykite, kad aibė X gali būti padalyta į dvi nesikertančias aibes P, Q, kad $f(S) > 0$ su visais $S \in E(P)$ ir $f(T) \leq 0$ su visais $T \in E(Q)$.

(Kinijos matematikos olimpiada, 1990)

••• $\alpha + \omega$ •••

Pastaba. Originalioje sąlygoje vietoje nulio buvo konstanta C, o (5) sąlyga buvo formuluojama taip: $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - C$. Aišku, kad toks uždavinys suvedamas į čia suformuluotą uždavinį keitiniu $\widehat{f}(A) = f(A) - C$.

Tarsime, kad aibės X elementų skaičius ne mažesnis už 3 (kiti atvejai trivialūs). Vietoje $f(\{x_1, \ldots x_{2n}\})$ rašysime tiesiog $(x_1, \ldots, x_{2n})$. Apibrėžkime funkciją $g : X \to I\!R$ taip:

$$g(x) = \frac{1}{2}[(x,a) + (x,b) - (a,b)];$$

čia $a, b \in X, a \neq b, a, b \neq x$. Funkcijos apibrėžimas yra korektiškas, nes $g(x)$ reikšmė nepriklauso nuo a, b. Iš tiesų naudodamiesi (5), gauname

$$(x,a) + (x,b) - (a,b) = (x,c) + (x,b) - (c,b) = (x,c) + (x,d) - (c,d)$$

su bet kuriais kitais $c, d \in X, c \neq d, c, d \neq x$.

Be to, pastebėkime, kad jei $x \neq y$, tai

$$g(x) + g(y) = (x,y).$$

Tam užtenka tiesiog sudėti reiškinius:

$$\frac{1}{2}[(x,y) + (x,a) - (y,a)], \quad \frac{1}{2}[(x,y) + (y,a) - (x,a)].$$

Tegu aibę P sudaro tie $x \in X$, kuriems $g(x) > 0$, o aibę Q – kuriems $g(x) \leq 0$. Galima patikrinti tiesiogiai, kad P, Q tenkina uždavinio sąlygas:

$$(x_1, \ldots x_{2n}) = g(x_1) + g(x_2) + \ldots + g(x_{2n}) > 0, \quad x_i \in P.$$

Analogiškai ir aibei Q.

Matematikui šis uždavinys yra labai specialus mato (tiksliau, krūvio) pratęsimo bei erdvės X Hano išdėstymo į teigiamo bei neigiamo krūvio dalis atvejis. Aišku, šis uždavinys nėra kelio pradžia, tai tik matematinio rezultato pritaikymas olimpiadai.

Panašių uždavinių olimpiadose pasitaiko nedažnai, tačiau kaip tik tokie uždaviniai skatina moksleivius tęsti tyrimus.