Uždaviniai

• • • ○ • • •

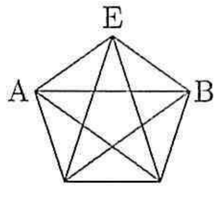
Turbūt perskaitėte A. Baltrūno straipsnį apie Pitagorą. Šiame skyrelyje rasite keletą su Pitagoro vardu vienaip ar kitaip susijusių uždavinių. Jie tikrai nesunkūs.

• • • ○ • • •

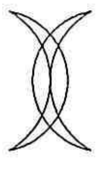
ε.6

◇ ◇ ◇

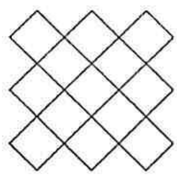
Iš pradžių pamiklinkite ranką: nepakeldami pieštuko nuo popieriaus lapo nubrėžkite tokias figūras:



Pentagrama
(Pitagoro žvaigždė)



Mahometo parašas



Šiaip figūra

ε.7

◇ ◇ ◇

Sakoma, kad taškas C dalija atkarpą AB aukso pjūvio santykiu, jei

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}.$$

Nesunkiai įsitikinsite, kad šis santykis lygus

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

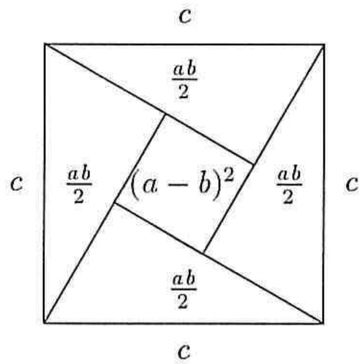
• • • $\alpha + \omega$ • • •

Aukso pjūvio santykis dažnas Pitagoro žvaigždėje. Įsitikinkite, kad pentagramos įstrižainės AB ir kraštinės AE santykis lygus φ. Panagrinėkite įstrižainių susikirtimo taškus ir raskite daugiau aukso pjūvio santykių.

$\varepsilon.8$

◇ ◇ ◇

Yra daug Pitagoro teoremos įrodymų. Štai XII amžiaus indų matematiko Bhaskari įrodymas. Jis nubrėžė figūrą ir parašė: „Žiūrėk!“ Taigi įsižiūrėkite į brėžinį ir įrodykite Pitagoro teoremą: $a^2 + b^2 = c^2$.



Pitagoro teoremos įrodymas

$\varepsilon.9$

◇ ◇ ◇

Štai dar vienas būdas įrodyti Pitagoro teoremą. Į statųjį trikampį, kurio statiniai lygūs a, b, įbrėžkime apskritimą. Tegu jo spindulys yra r. Išreikškime trikampio plotą dviem būdais:

$$S_{\triangle} = \frac{ab}{2} = \frac{pr}{2},$$

čia p yra trikampio pusperimetris. Išreikškite r per trikampio kraštines ir gaukite dar vieną Pitagoro teoremos įrodymą.

$\varepsilon.10$

◇ ◇ ◇

Statusis trikampis vadinamas Pitagoro trikampiu, jei visų jo kraštinių ilgiai reiškiami sveikaisiais skaičiais. Pitagoro trikampio plotas yra racionalusis skaičius. Nagrinėkime trikampius (nebūtinai stačiuosius), kurių kraštinės reiškiamos racionaliaisiais skaičiais. Tokio trikampio plotas nebūtinai yra racionalusis skaičius. Jei visų trijų trikampio kraštinių ilgiai bei plotas yra racionalieji skaičiai, trikampį vadinsime Herono trikampiu. Įrodykite, kad $\triangle ABC$ yra Herono trikampis tada ir tik tada, kai bent vienos jo kraštinės ilgis ir kampų prie šios kraštinės pusių tangentai reiškiami racionaliaisiais skaičiais.

●●● $\alpha + \omega$ ●●●

Skyrelį tvarko **Giedrius Alkauskas**

Pirmuosius šešis šiame skyrelyje skelbiamus uždavinius sprendė Tarptautinės matematikų olimpiados Argentinoje, Mar del Platoje dalyviai. Šeštąjį olimpiados uždavinį sukūrė Vilniaus universiteto Matematikos fakulteto studentas Giedrius Alkauskas. Jis pats ir analizuoja šį uždavinį mūsų žurnalo puslapiuose. Giedrius Alkauskas pasiūlė ir kitus šio skyrelio uždavinius (α.75–α.80) Primename, kad galite mums siųsti naujus uždavinius bei jau paskelbtų uždavinių sprendimus. Teisingus ir gražius sprendimus spausdinsime.

α.69

◇◇◇

Plokštuma padalyta į vienetinius kvadratus, kurie pakaitomis nuspalvinti juodai ir baltai (kaip šachmatų lenta). Kvadratų viršūnės yra taškuose su sveikomis koordinatėmis. Kiekvienai teigiamųjų skaičių m, n porai panagrinė-kime statųjį trikampį, kurio viršūnės turi sveikąsias koordinates, o statiniai, kurių ilgiai yra m, n eina kvadratų kraštinėmis. Bendrą juodosios trikampio dalies plotą pažymėkime S_1, o baltosios dalies – S_2. Pažymėkime $f(m,n) = |S_1 - S_2|$. Apskaičiuokite $f(m,n)$, kai m, n yra abu lyginiai arba abu nelyginiai. Įrodykite, kad $f(m,n) \leq \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ su visais m, n. Įrodykite, kad nėra tokios konstantos C, jog su visais m, n $f(m,n) < C$.

α.70

◇◇◇

Kampas A yra mažiausias $\triangle ABC$ kampas. Taškai B ir C dalija apibrėžtą apie trikampį apskritimą į du lankus. Lanke, kuris jungia taškus B ir C, ir kuriam nepriklauso taškas A, paimtas vidinis taškas U. Kraštinių AB ir AC vidurio statmenys kerta tiesę AU atitinkamai taškuose V, W. Tiesės BV ir CW kertasi taške T. Įrodykite, kad

$$AU = TB + TC.$$

$\alpha.71$

◇◇◇

Realieji skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tenkina sąlygą

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 1, \quad |x_i| \leq \frac{n+1}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Įrodykite, kad egzistuoja tokia skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_n$ perstata $y_1, y_2, \ldots, y_n$, kad

$$|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

$\alpha.72$

◇◇◇

Lentelę $n \times n$, užpildytą aibės $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ skaičiais, vadinsime sidabrine, jei kiekvienam $i = 1, 2, \ldots, n$ i-oji eilutė ir i-asis stulpelis kartu turi visus aibės S skaičius. Įrodykite, kad sidabrinė lentelė neegzistuoja su $n = 1997$. Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug n reikšmių, su kuriomis sidabrinės lentelės egzistuoja.

$\alpha.73$

◇◇◇

Raskite visas sveikųjų skaičių $a \geq 1, b \geq 1$ poras, kurios tenkina lygybę

$$a^{b^2} = b^a.$$

$\alpha.74$

◇◇◇

Natūraliojo skaičiaus n skirtingų išraiškų dvejeto laipsniais kiekį pažymėkime $f(n)$. Išraiškos, kurios skiriasi tik dėmenų tvarka, laikomos vienodomis. Įrodykite, kad su visais $n \geq 3$

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

$\alpha.75$

◇◇◇

Tegu X yra n elementų aibė. Įrodykite, kad skaičius porų (A, B), kur $A \subset B \subset X, A \neq B$ lygus $3^n - 2^n$.

●●● $\alpha + \omega$ ●●●

α.76

◇ ◇ ◇

Tegu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yra realieji skaičiai. Žymėsime:

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n)^2.$$

Kam lygi suma

$$\frac{1}{n!} \sum S(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n});$$

čia sumuojama pagal visas skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_n$ perstatas?

α.77

◇ ◇ ◇

Tegu n yra natūralusis skaičius. Raskite didžiausiąjį natūralųjį skaičių p, turintį tokią savybę: jei X yra n, o C – p elementų turinti aibė, tai bet kokiai funkcijai $f : \mathcal{P}(X) \to C$ (čia $\mathcal{P}(X)$) yra visų X poaibių aibė) atsiras du skirtingi poaibiai $A, B \in \mathcal{P}(X)$, kad

$$f(A) = f(B) = f(A \cup B).$$

α.78

◇ ◇ ◇

Natūralieji skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_n, n \geq 4$, tenkina sąlygą $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 2x_1$. Tegu $R = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$. Tegu pirminio skaičiaus p natūralusis laipsnis p^k dalija R. Įrodykite, kad

$$\frac{R}{p^k} > n!.$$

α.79

◇ ◇ ◇

Tegu a, b, c yra sveikieji teigiami skaičiai. Tarkime lygtis

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

turi nenulinį sprendinį x, y, z sveikaisiais skaičiais. Įrodykite, kad tada lygtis

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

turi sprendinį racionaliaisiais skaičiais.

α.80

◇ ◇ ◇

Sveikųjų skaičių seka apibrėžta rekurentiškai:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 2, \quad n \geq 1.$$

Įrodykite, kad a_n yra sveikojo skaičiaus kvadratas.

• • • $\alpha + \omega$ • • •

• • • ○ • • •

Skyrelį tvarko **Artūras Dubickas**

Studentų matematinės olimpiados bei turnyrai nėra tokie populiarūs kaip moksleivių. Tačiau jie taip pat vyksta. Skyrelyje pateikiame keturis uždavinius iš Amerikos studentų 1995 metų matematinio turnyro (William Lowell Putnam mathematical competition).

• • • ○ • • •

ω.22

◇ ◇ ◇

Tegu S yra realiųjų skaičių aibė, uždara daugybos operacijos atžvilgiu, T, U – du nesikertantys S poaibiai, $S = T \cup U$. Tarkime, kad bet kurių trijų (nebūtinai skirtingų) T elementų sandauga priklauso T, aibė U irgi turi šią savybę. Įrodykite, kad bent viena iš aibių T, U yra uždara daugybos operacijos atžvilgiu.

ω.23

◇ ◇ ◇

Kokiems a, b integralas

$$\int_b^\infty \left(\sqrt{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}}\right) dx$$

konverguoja?

ω.24

◇ ◇ ◇

Tarkime, kad kiekvienas iš n žmonių įrašo į vieną $3 \times n$ matricos stulpelį skaičius $1, 2, 3$. Skaičiai įrašomi atsitiktinai, visi jų išsidėstymai yra vienodai galimi, o įrašai į skirtingus stulpelius yra nepriklausomi. Tarkime a, b, c yra skaičių, surašytų matricos eilutėse, sumos. Eilutes galime sukeisti vietomis, kad galiotų $a \le b \le c$. Įrodykite, kad egzistuoja skaičiai $n \ge 1995$, kad įvykio $\{b - a = 1, c - b = 1\}$ tikimybė yra keturis kartus didesnė už įvykio $\{a = b = c\}$ tikimybę.

ω.25

◇ ◇ ◇

Elipsė, kurios pusašės lygios a, b neslysdama rieda kreive $y = c\sin(x/a)$. Koks sąryšis sieja a, b, c, jei nuriedėdama vieną sinusoidės periodą, ji apsisuka vieną kartą?

• • • $\alpha + \omega$ • • •