

Antanas Laurinčikas

Ramanujano sąsiuviniai



1997 metų gruodžio 22 dieną sukako 110 metų įžymiam indų matematikui Srinivasai Ramanujanui. Matematikos istorikai jam vieningai skiria išskirtinę vietą matematikos istorijoje. Išskirtinumas pasireiškia ne tik jo matematinių rezultatų svarba, bet ir nepaprastu likimu. Neturėdamas aukštojo išsilavinimo, spaudžiamas skurdo, dirbdamas visiškoje izoliacijoje, net nesinaudodamas biblioteka Ramanujanas gavo gilių rezultatų ir paliko amžiną pėdsaką matematikoje.

Srinivasas Ramanujanas gimė 1897 metų gruodžio 22 dieną pietinės Indijos mieste Erode. Vaikystė prabėgo Kumbakoname, 50 000 gyventojų turėjusiame mieste 120 mylių į rytus nuo Erodo. Čia būsimo genijaus tėvas pas vieną prekybininką dirbo sąskaitininku.

Būdamas 12 metų, Ramanujanas iš vieno studento pasiskolino trigonometrijos vadovėlį ir savarankiškai jį išstudijavo. Tame vadovėlyje buvo ne tik įprastinis trigonometrijos kursas, bet ir rodiklinių funkcijų, kompleksinio skaičiaus logaritmo, hiperbolinių funkcijų, begalinių eilučių ir sandaugų, trigonometrinių funkcijų skleidinių įvadas. Taigi berniukas atliko didžiulį darbą. Tačiau didžiausią įtaką būsimajam matematikui padarė vieno Kembridžo namų mokytojo „Elementariųjų matematikos rezultatų santrauka“, kurią penkiolikmetis Ramanujanas pasiėmė iš vietinio koledžo bibliotekos. Ši knyga berniuką visiškai užvaldė. Apie 6000 analizės ir geometrijos teoremų, pateiktų be įrodymų arba beveik be įrodymų, Ramanujanui buvo tikras lobis. Jis jas be perstojo studijavo ir įrodinėjo. Šioje knygoje nebuvo nė žodžio apie kompleksinio kintamojo funkcijas, taigi Ramanujanas jų niekada nestudijavo. Tačiau, nepaisant to, jis įnešė didžiulį indėlį į elipsinių ir modulinių funkcijų teoriją.

1903 metais Ramanujanas išlaikė imatrikuliacijos egzaminus Madraso universitete. Deja, tuo metu jis jau buvo visiškai atsidaavęs matematikai ir negalėjo studijuoti jokio kito dalyko. Beje jau po pirmų metų jis neišlaikė anglų kalbos ir gamtos mokslo egzaminų Kumbakonamo koledže, po ketverių metų ta

pati nesėkmė jį ištiko viename Madraso koledže. Taigi Ramanujanas neįgijo net koledžo lygio išsilavinimo.

1903–1910 metais Ramanujanas buvo visiškai atsidavęs kūrybai ir savo rezultatus užrašinėjo į garsiuosius sąsiuvinius. Tiesa, 1909 metais jis vedė, todėl reikėjo lėšų šeimai išlaikyti. 1910 metais jis susitiko su Indijos matematikų draugijos įkūrėju V. R. Aiyaru, tuo metu dirbusiu vienoje Madraso valstybinėje įstaigoje, ir paprašė darbo tos įstaigos biure. V. R. Aiyaras atidžiai peržiūrėjęs Ramanujano teoremas, parašė laišką P. V. Seshu Aiyarui, tuo metu studijavusiam Kumbakonamo koledže, o šis savo ruožtu, pristatė Ramanujaną garsiam ir palyginti turtingam matematikui R. Ramachandra Rao. Ramanujano sąsiuvinų turinys jam padarė didžiulį įspūdį, ir jis jaunajam matematikui paskyrė mėnesinę stipendiją.

Tačiau Ramanujanas labai pergyveno, kad neturi pastovaus darbo. Pagaliau 1912 metais vasario mėnesį įsidarbino Madraso miesto kredito žinybos kanceliarijoje. Šis žingsnis turėjo lemiamos įtakos tolesnei S. Ramanujano karjerai. Minėtos žinybos vadovas buvo žymus anglų inžinierius F. Springas, o direktorius – matematikas S. N. Aiyaras. Jie abu susidomėjo Ramanujano darbais ir pasiūlė parašyti apie savo rezultatus anglų matematikams. Yra žinoma, kad Ramanujanas parašė laiškus dviem anglų matematikams: žymiam geometriui ir analizės specialistui H. F. Bakeriui bei garsiam analitikui E. W. Hobsonui, tačiau laiškai sugrižo be jokių komentarų. Žinomi matematikai palaikė Ramanujaną nevertu dėmesio mėgėju ir nepanoro įsigilinti į jo rezultatus. Vėliau, padedamas vieno anglų inžinieriaus, Ramanujanas parašė dar ir M. J. Hillui, kuris susidomėjo atsiųstais darbais, bet būdamas labai užimtas nesurado laiko rimtai į juos įsigilinti.

Pagaliau 1913 metų sausio mėnesį Ramanujanas parašė žinomam matematikui G. H. Hardy ir visam gyvenimui surado draugą, kuris ištiesė jam pagalbos ranką. Gavęs laišką, Hardy iš pradžių atidėjo jį į šalį, tačiau tos pačios dienos vakare su savo kolega J. E. Littlewoodu užsidarė šachmatų kambaryje ir ėmė nagrinėti indo laišką. Įeidamas į kambarį, Hardy tarė, kad šis indas yra arba trenktas, arba genialus. Beveik 3 valandas padirbėję prie Ramanujano užrašų, abu garsūs matematikai paskelbė nuosprendį: Ramanujanas – genijus. Žinoma, kai kurie Ramanujano rezultatai buvo neteisingi, kai kurie gerai žinomi, tačiau dauguma jų buvo nauji teisingi ir įdomūs. Hardy nedelsdamas parašė atsakymą Ramanujanui ir pakvietė atvykti į Kembridžą, kur buvo visos sąlygos neeiliniam jo talentui visiškai atsiskleisti. Tačiau motina nepritarė kelionei ir Ramanujanas iš pradžių atsisakė vykti į Angliją. Buvo ir kita atsisakymo priežastis: nuo 1913 metų kovo 1 dienos Madraso universitetas, atsižvelgdamas

į kelių Anglijos mokslininkų rekomendacijas paskyrė Ramanujanui 75 rupijų per mėnesį stipendiją. Taigi galų gale Ramanujanas susilaukė pripažinimo tėvynėje ir turėjo pragyvenimo šaltinį. Kiekvieną metų ketvirtį jis turėjo pateikti universitetui ataskaitą apie nuveiktą darbą.

1914 metų pradžioje į Madraso universitetą skaityti paskaitų atvyko anglų matematikas E. H. Neville'is. Vienas iš jo vizito tikslų buvo prikalbinti Ramanujaną vykti į Angliją. Neville'io ir kitų pastangomis pagaliau pavyko įtikinti motiną, jog jos sūnus privalo vykti į Kembridžą. Tų pačių metų kovo mėnesį matematikos genijus jau buvo Anglijoje.

Vėlesni treji metai Ramanujanui buvo labai produktyvūs. Tiesa, jam nelabai tiko Anglijos oras, trūko vegetariško maisto. Tačiau buvo didžiulė abipusė nauda, kurią teikė bendradarbiavimas su Hardy. Kaip pastarasis prisimena, Ramanujanas beveik kas dieną atnešdavo apie dešimtį naujų teoremų.

Tačiau įtemptas darbas gerokai pakirto nelabai tvirtą Ramanujano sveikatą. Buvo manoma, jog jis susirgo tuberkulioze, tačiau vėliau ta diagnozė buvo suabejota. Sulysęs ir išsekęs, jis tęsė matematikos tyrimus, kartkartėmis taisydamas sveikatą sanatorijose. Karas Europoje trukdė grįžti į Indiją, ir tik 1919 metų pradžioje Ramanujanas sugrįžo į tėvynę. Čia vėl be atokvėpio tęsė darbą, gautus rezultatus rašydamas į sąsiuvinį, kuris dabar vadinamas pamestuoju. Visas jo dėmesys buvo sutelktas į q -eilučių teoriją. Nepajėgęs atgauti sveikatos ir tėvynėje, Ramanujanas 1920 metų balandžio 26 dieną mirė, vos pradėjęs trisdešimt trečiuosius metus.

Be publikuotų straipsnių Ramanujanas paliko 3 sąsiuvinius, minėtąjį pamestąjį sąsiuvinį ir keletą kitų rankraščių. Šiuose sąsiuviniuose be įrodymų buvo surašyti šimtai teoremų iš įvairių matematikos sričių. Pirmąjį sąsiuvinį prieš išvykdamas į Indiją Ramanujanas paliko Hardy, kiti du po jo mirties buvo perduoti Madraso universiteto bibliotekai. Vėliau Hardy pirmąjį sąsiuvinį taip pat perdavė šiai bibliotekai.

Hardy atkakliai siekė, kad Ramanujano sąsiuviniai būtų išleisti. 1923 metais jis parašė straipsnį, kuriame apžvelgė vieną pirmojo sąsiuvinio skyrių apie hipergeometrinės eilutes. Vėliau jis prisipažino, kad nagrinėti Ramanujano užrašus buvo nepaprastai sunku. 1927 metais buvo išleisti Ramanujano rinktiniai raštai, tačiau sąsiuviniams išleisti pritrūko lėšų.

1929 metais G. N. Watsonas ir B. M. Wilsonas nusprendė Ramanujano sąsiuvinius išleisti maždaug per 5 metus. Jie manė, kad atlikti šį darbą nebus labai sunku, nes trečiasis sąsiuvinys yra tik 33 puslapių, o antrasis yra pirmojo sąsiuvinio papildytas ir išplėstas variantas. Taigi pagrindinis yra antrasis sąsiuvinys. Wilsonui buvo pavesta išleisti 2–13 skyrius, o Watsonas turėjo

parengti 14–21 antrojo sąsiuvinio skyrius, suprantama, su visais įrodymais. Tačiau 1935 metais Wilsonas netikėtai mirė ir darbas sustojo. Per tą laiką jis buvo įrodęs daugumą 2–5 skyrių rezultatų, tačiau kiti skyriai liko net nepradėti nagrinėti. Watsonas irgi buvo atlikęs ne visą darbą.

1954 metais Indijos matematikų draugijos suvažiavime dar kartą buvo nutarta išleisti Ramanujano sąsiuvinius. Pagaliau 1957 metais fundamentaliųjų tyrimų institutas Bombėjuje be jokių komentarų paskelbė labai blogos kokybės dviejų pirmųjų sąsiuvinių fotokopijas.

Ramanujanas savo rezultatus pradėjo rašyti į sąsiuvinius 1903 metais, vien tik pirmąjį skyrių sudaro 202 jo anksčiau gauti rezultatai. Jis tęsė savo užrašus iki 1914 metų, kol išvyko į Angliją. Tikriausiai yra ir daugiau jo nežinomų užrašų.

Pirmąjį Ramanujano sąsiuvinį sudaro 16 skyrių, jie užima 134 puslapius, be to, yra dar 80 puslapių įvairių nesutvarkytų matematinių rezultatų. Visi sąsiuvinio puslapiai parašyti keistu žalios spalvos rašalu. Iš pradžių buvo rašoma vienoje lapo pusėje, vėliau papildomiems rezultatams užrašyti pradėta naudoti ir kita lapo pusė, rašant nuo sąsiuvinio pabaigos į pradžią.

Antrasis 252 puslapių Ramanujano sąsiuvinys padalytas į 21 skyrių. Kaip jau buvo minėta, tai išplėsta ir papildyta pirmojo sąsiuvinio versija. Be šių skyrių, yra dar apie 100 puslapių įvairių nesuskirstytų į skyrius rezultatų. Priešingai negu pirmame sąsiuvinyje, antrajame Ramanujanas rašė abiejose lapų pusėse.

Trečiojo sąsiuvinio 33 puslapiuose pateikta daugiausia nesuklasifikuota matematinė medžiaga.

Taigi svarbiausias yra antrasis sąsiuvinys. Kokie gi rezultatai tuose sąsiuvinuose? Dažniausiai pasitaiko begalinių eilučių. Daugelis tų eilučių diverguoja. Dažniausiai tai yra asimptotinės eilutės. Ramanujanas labai retai nurodo, ar eilutė konverguoja, ar diverguoja. Kalbėdamas apie asimptotines eilutes jis naudoja terminą „beveik diverguoja“. Galbūt jis net nežinojo termino „asimptotinė eilutė“, nes Poincaré ir Stieltjesas šių eilučių teorijos pagrindus buvo sukūrę ne taip seniai. Tačiau patys išsamiausi Ramanujano rezultatai yra būtent apie asimptotinius skleidinius. Nors jis ir nenurodo, ar eilutės konverguoja, ar diverguoja, nėra abejonės, kad jis žinojo, kurios iš jų konverguoja, o kurios diverguoja. 6-ajame skyriuje jis išvystė diverguojančių eilučių teoriją, parentą Eulerio -Maclaurino sumavimo formulę. Šią formulę labai mėgo ir naudojo kaip įrankį daugeliui rezultatų gauti. Todėl nenuostabu, kad Bernoullio skaičiai įeina į Ramanujano formules, nes jie yra ir Eulerio -Maclaurino formulėje.

Po begalinių eilučių antrą vietą Ramanujano sąsiuvinuose užima integralai,

jų transformacijos bei grandininės trupmenos, vis dažniau pasitaikančios tolesniuose skyriuose.

Sąsiuviniai visų pirma buvo skirti asmeniniam naudojimui, o ne publikavimui. Todėl juose nurodyti ne visi žymenys, praleistos kai kurios sąlygos, yra ir kitų trūkumų. Dažnai tik iš konteksto įmanoma suprasti, kas buvo turėta galvoje. Tačiau apskritai sąsiuviniai bemaž be klaidų, yra tik mažų netikslumų. Iš pirmo žvilgsnio kai kurie rezultatai atrodo netikslūs, bet suteikus sąvokoms reikiamą prasmę jie tampa teisingi.

Sąsiuvinuose beveik nėra įrodymų arba pateikiami tik jų kontūrai. Įrodymų šiek tiek daugiau yra tik pirmajame. Paskutiniuose skyriuose įrodymų iš viso nėra. Tai nenuostabu, nes sąsiuviniai tėra rezultatų santrauka, o įrodymus Ramanujanas turėjo savo galvoje. Antra vertus, vargšui genijui popierius buvo per brangus įrodymams užrašyti ir jis jį taupė.

Daugelis Ramanujano biografų tvirtina, jog formules, surašytas jo sąsiuvinuose sapne jam padiktuodavo deivė Namagiri. Akivaizdu viena, kad Ramanujanas turėjo nepaprastą intuiciją, o jo draugo ir globėjo Hardy teigimu, Ramanujanas mąstė panašiai kaip ir daugelis matematikų. Kita vertus, kai kurie jo įrodymai turėjo spragų ir buvo formalūs. Pavyzdžiui, jis kartais atlikdavo nepagrįstus ribinius perėjimus, veiksmus su begalinėmis eilutėmis. Tačiau turint galvoje Ramanujano išsilavinimą, tai buvo ne jo trūkumas, o veikiau pranašumas. Jeigu Ramanujanas būtų viską griežtai įrodinėjęs, kaip kad daro kiti matematikai, šiandien neturėtume daugelio gražių teoremų, nes jis ne visas pats mokėjo įrodyti. Kartais ilgą laiką jis nežinodavo kaip įrodyti savo rezultatus. Pavyzdžiui, garsiąją Rogerso–Ramanujano tapatybę jis atrado jau prieš kelionę į Angliją, bet jos įrodymo nežinojo, kol nepamatė Rogerso straipsnio.

Hardy manė, kad apie du trečdaliai Ramanujano rezultatų, gautų Indijoje, buvo jau žinomi, t. y. Ramanujanas dirbdamas toli nuo mokslo centrų, atrado juos iš naujo. Daugelio Ramanujano paskelbtų straipsnių užuomazgos yra jo sąsiuvinuose.

Ramanujano sąsiuviniai yra svarbus palikimas tiek moksliniu, tiek istoriniu požiūriu. Kam nors reikėjo juos publikuoti. Šio nepaprastai sunkaus darbo (po jau minėtų nesėkmingų mėginimų) ėmėsi žinomas analizinės skaičių teorijos specialistas Iliojaus universiteto profesorius B.C. Berndtas. Jis tęsė savo žodį. 1985 metais pasirodė pirmoji sumanyto darbo dalis, kurioje su įrodymais buvo antrojo sąsiuvinio 1–9 skyriai – iš viso 759 Ramanujano rezultatai. Jeigu įrodymas jau buvo skelbtas, knygoje pateikiama tik nuoroda į šaltinį. Minėtuose skyriuose formuluojami rezultatai apie magiškuosius kvadratus (ankstyvieji Ramanujano tyrimai), apie sumas, susijusias su harmonine eilute, kai kurie kom-

binatorinės analizės klausimai, teoremos apie eksponentinės funkcijos iteracijas, Eulerio polinomus ir skaičius, Bernullio skaičius, Riemanno dzeta funkciją, Ramanujano diverguojančių eilučių teorijos teiginiai, rezultatai apie gama funkciją ir jos analogus, begalinių eilučių tapatybės bei transformacijos. Be to, šioje dalyje yra ir Ramanujano rezultatai iš ataskaitų, kiekvieną metų ketvirtį siųstų Madraso universitetui.

Antroji sąsiuvinių dalis pasirodė 1989 metais. Joje išnagrinėti 10–15 antrojo sąsiuvinio skyriai. Daugelis šių labai svarbių rezultatų buvo nusiųsti 1913 metais laiške Hardy. Čia nagrinėjamos hipergeometrinės eilutės ir funkcijos, grandininės trupmenos, viena iš labiausiai mėgstamų Ramanujano problemų – asimptotiniai įvairių funkcijų skleidiniai, įvairios eilučių tapatybės, eilutės su hiperbolinėmis funkcijomis, modifikuotų teta funkcijų transformacijos.

Dar po 2 metų – 1991-aisiais pasirodė trečioji sąsiuvinių dalis. Ji dedikuota Ramanujano žmonai S. Janaki Ammal, kurią 1987 metais B. C. Berndtas ap-lankė Indijoje. Šioje dalyje pateikti antrojo sąsiuvinio 16–21 skyrių rezultatai. Čia randame teiginius apie q -grandinines trupmenas, q -eilutes, teta funkcijas, elipsines funkcijas ir modulines lygtis, susijusias su teta funkcijų tapatybėmis.

1994 metais buvo išleista ketvirtoji sąsiuvinių dalis. Joje skelbiami rezultatai iš nesusistemintos antrojo sąsiuvinio dalies. Čia randame įvairių elementarių analizės rezultatų, taip pat teiginių apie dalinius trupmenų skleidinius.

Dar keli žodžiai apie pamestąjį sąsiuvinį. 1976 metais žinomas kombinatorikos specialistas profesorius G. Andrewsas tarp įvairių G. N. Watsono rankraščių Trinity koledžo bibliotekoje rado 130 puslapių Ramanujano darbų sąsiuvinį, kurį jis pavadino pamestuoju. Jame yra apie 650 rezultatų (aišku, be įrodymų), gautų paskutiniu metu Ramanujano gyvenimo laikotarpiu. Apie 60% iš jų yra apie q -eilutes ir teta funkcijas. G. Andrewsas atstatė beveik visų rezultatų įrodymus. Kiti (apie 40%) skirti teta funkcijų tapatybėms, teta funkcijų integralams, nepilniems elipsiniams integralams, Rogerso-Ramanujano grandininėms trupmenoms, Eizenšteino eilutėms. Čia yra ir nepaaiškintos skaičių lentelės.

1997 metų lapkričio 10–14 dienomis teko dalyvauti Kyoto skaičių teorijos konferencijoje. Joje profesorius B. C. Berndtas skaitė pranešimą apie pamestojo sąsiuvinio minėtus 40% užrašų, skirtą 110-osioms Ramanujano gimimo metinėms. Galime tikėtis, kad sulauksime ne tik penktosios, bet ir šeštosios Ramanujano sąsiuvinių dalies. Jau išleistosios 4 dalys yra solidūs 3-4 šimtų puslapių tomiai.