Mindaugas Maknys (1944 -1992)

1992 metų liepos 25 dieną nelaimingas atsitikimas nutraukė gabaus matematiko Mindaugo Maknio gyvenimo siūlą. Mindaugas baigė tik 48-uosius savo gyvenimo metus. Sukauptos žinios, patirtis, darni šeima (užauginti 2 sūnūs) leido tikėtis naujų gražių rezultatų Mindaugo pamėgtoje algebrinių skaičių teorijoje, deja, likimas buvo negailestingas. Paskelbti 45 moksliniai darbai, ant darbo stalo, lyg laukdami šeimininko, liko atversti nebaigti rašyti rankraščiai apie pirminių skaičių pasiskirstymą aukštesniuose algebriniuose kūnuose.

Laikas bėga labai greitai. 1997 metų vasarą sukako 5 metai, kai tarp mūsų nebėra Mindaugo. Nebematome jo visur skubančio, nebegirdime jo simpatiško balso ir juoko. Todėl norisi nors trumpai prisiminti Mindaugo nuveiktus darbus bei gautus rezultatus, juoba kad jo indėlis į skaičių teoriją yra tikrai didelis. Nėra lengva aprėpti visą gana plačią Mindaugo Maknio mokslinę veiklą, todėl apsiribosime tik viena iš jo darbo krypčių – algebrinės skaičių teorijos didžiojo rėčio metodu.

Prof. A. Laurinčikas

••• $\alpha + \omega$ •••

Antanas Laurinčikas

Mindaugas Maknys ir didysis rėtis

Didžiojo rėčio metodas

Gerai žinomas senovės graikų matematiko Eratosteno rėtis leidžia iš natūraliųjų skaičių sekos išsijoti sudėtinius skaičius. Eratosteno metodą 1919 m. plėtojo norvegų matematikas V. Brun. Šio metodo esmė tokia: iš natūraliųjų skaičių sekos išsijojami skaičiai su mažais pirminiais dalikliais, o likusių pirminių ir beveik pirminių skaičius įvertinamas iš viršaus ir iš apačios. Bruno rėtis leidžia gauti, pavyzdžiui, tokį rezultatą.

Tegu $a_1, \ldots, a_k$ yra sveikieji fiksuoti skaičiai. Atmetę iš sekos $1, 2, \ldots, N$ skaičius, tenkinančius bent vieną iš sąlygų

$$m \equiv a_j (\mathrm{mod}\ p), \qquad j = 1, \ldots, k,\ p \leqslant \sqrt{N},$$

gauname, jog lieka iš viso

$$\frac{BN}{\log^k N}$$

skaičių.

Čia ir toliau B_η yra skaičius, moduliu aprėžtas konstanta, priklausanti nuo η (B aprėžtas absoliučia konstanta). Naudojant Bruno metodą, galima gauti ir pirminių dvynių (p ir $p+2$ yra pirminiai), neviršijančių x , skaičiaus įvertį iš viršaus, t.y.

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p+2-\text{pirminiai}}} 1 = \frac{Bx}{\log^2 x}.$$

Deja, iki šiol neištirta, ar dvynių aibė yra begalinė.

1947 m. kitas norvegų matematikas A. Selberg modifikavo Bruno metodą, sukurdamas vadinamąjį Selbergo rėtį. Šis rėtis yra paprastesnis už Bruno ir duoda tikslesnius rezultatus.

Yra ir daugiau rėčių, tačiau jie nerezultatyvūs, kai likinių klasės ir jų skaičius priklauso nuo kurio nors pirminio skaičiaus. 1941 m. rusų matematikas J. V. Linnik sukūrė naują galingą metodą, ir pavadino didžiuoju rėčiu.

Šis metodas remiasi trigonometrinių sumų savybėmis ir įverčiais. J. V. Linnik sprendė tokį uždavinį.

> *Tegu* $\mathbb{N}(z,N)=\{m_1,m_2,\dots,m_z : m_j \leqslant N\}$ *– bet kuri natūraliųjų skaičių aibė, o* p *– bet kuris pirminis skaičius. Kiek likinių klasių* $\operatorname{mod} p$ *yra tarp skaičių* m_j *?*

Aišku, kad jei aibė $\mathbb{N}(z,N)$ yra pakankamai gausi, o pirminiai skaičiai p lyginant su N, yra maži, tai tuomet beveik visiems p tarp skaičių m_j bus beveik visos likinių klasės. Tegu $0<\tau<1$ yra fiksuotas skaičius. J. V. Linnik [1] įrodė, kad skaičius pirminių skaičių p, $p \leqslant \sqrt{N}$, kuriems likinių klasių skaičius $\operatorname{mod} p$ yra mažesnis už $(1-\tau)p$ (tokie pirminiai vadinami *išimtiniais*), neviršija

$$\frac{BN}{\tau^2 z}.$$

Šis rezultatas, aišku, yra įdomus tik tuomet, kai santykis N/z nėra didelis. Minėtą rezultatą J. V. Linnik pritaikė [2] uždaviniui apie mažiausią kvadratinį nelikinį $\operatorname{mod} p$ spręsti. Jis įrodė, kad skaičius pirminių skaičių p, $N^\varepsilon \leqslant p \leqslant N$, $0<\varepsilon<1$, kurių mažiausias kvadratinis nelikinys yra didesnis už p^ε, neviršija B_ε, kitaip tariant, aprėžtas konstanta, priklausančia nuo ε.

Linniko didžiojo rėčio metodą toliau plėtojo vengrų matematikas A. Rényi. Paminėsime tik porą jo rezultatų. Tegu $z(p,h)$ yra j reikšmių, kurioms

$$m_j \equiv h(\operatorname{mod} p),$$

skaičius, $Q(p)$ – bet kuri teigiama p funkcija ir

$$Q=\max_{p\leqslant\sqrt{N}} Q(p).$$

Tuomet A. Rényi įrodė [3], kad visiems $p \leqslant \sqrt{N}$, išskyrus

$$\frac{BN^2Q^3}{z^2\tau^{3/2}}$$

pirminius išimtinius, visoms likinių klasėms h, išskyrus τ_p klasių kiekvienam pirminiam skaičiui p, teisinga nelygybė

$$\left|z(p,h)-\frac{z}{p}\right| < \frac{z}{p\,Q(p)}. \tag{1}$$

Truputėlį vėliau, remdamiesi tikimybių teorijos idėjomis, A. Rényi gavo [4] vidurkinį (1) nelygybės analogą

$$\sum_{p\leqslant X} p \sum_{h=0}^{p-1}\left(z(p,h)-\frac{z}{p}\right)^2 \leqslant 2Nz \tag{2}$$

su $X = (N/12)^{1/3}$. Suma pastarojoje nelygybėje primena dispersiją, todėl ji buvo įrodyta remiantis tikimybiniais rezultatais.

1965 m. K. F. Roth išvystė [5] Rényi metodą ir kaip atskirą atvejį įrodė (2) nelygybę su $X = (N/\log N)^{1/2}$. Tolesni didžiojo rėčio metodo laimėjimai siejami su italų matematiko E. Bombieri vardu. Jo sukurtas metodas [6] leido, pavyzdžiui, gauti (2) nelygybę su $X = \sqrt{N}$. Tačiau svarbiausia Bombieri metodo išvada, įvertinta Fyldso medaliu, yra labai reikšmingas rezultatas apie pirminių skaičių pasiskirstymą aritmetinėse progresijose. Tegu

$$\Psi(x;\, q, a) = \sum_{\substack{m \leqslant x \\ m \equiv a (\operatorname{mod} q)}} \Lambda(m);$$

čia $\Lambda(m)$ yra Mangoldto funkcija, apibrėžiama taip:

$$\Lambda(m) = \begin{cases} \log p, & \text{jei } m = p^{\alpha}, \\ 0, & \text{jei } m \neq p^{\alpha}. \end{cases}$$

Bombieri teorema tvirtina, kad bet kurią teigiamą konstantą A atitinka tokia teigiama konstanta b, su kuria

$$\sum_{q \leqslant X} \max_{(a,q)=1} \max_{y \leqslant x} \left| \Psi(y;\, q, a) - \frac{y}{\varphi(q)} \right| = Bx(\log x)^{-A}, \tag{3}$$

jei $X = \sqrt{x}(\log x)^{-b}$; čia $\varphi(q)$ yra Oilerio funkcija. E. Bombieri pastarąją lygybę įrodė su $b = 3A+27$. Tolesni rezultatai susiję su konstantos b mažinimu ir X didinimu. Tačiau yra žinoma [7], kad (3) nėra teisinga su

$$X = x \exp\left\{ \frac{-(a-\varepsilon)(\log\log x)^2}{\log\log\log x} \right\}.$$

Didžiojo rėčio metodas paprastai formuluojamas remiantis didžiojo rėčio nelygybėmis. Sakysime, (3) įvertis yra nelygybės

$$\sum_{q \leqslant X} \sideset{}{'}\sum_{\chi} \left| \sum_{m=Y+1}^{Y+U} a_m \chi(m) \right|^2 \leqslant 2.2 \max_{(U, X^2)} \sum_{m=Y+1}^{Y+U} |a_m|^2$$

rezultatas. Ženklelis „$'$“ čia ir toliau rodo, kad yra sumuojama pagal primityvius charakterius $\operatorname{mod} q$.

Šiuolaikines didžiojo rėčio nelygybes sudaro trigonometrinių sumų

$$\sum_{x \in \mathcal{H}} |S(x)|^2$$

įverčiai. Čia

$$S(x) = \sum_{m=Y+1}^{Y+U} a_m e^{2\pi i m x},$$

o $\mathcal{H}$ yra baigtinė intervalo $[0,1]$ taškų aibė. Pavyzdžiui, nesunku paskaičiuoti, kad

$$p \sum_{h=0}^{p-1} \Big(z(p,h) - \frac{z}{p} \Big)^2 = \sum_{a=1}^{p-1} \Big| S\Big(\frac{a}{p}\Big) \Big|^2$$

su $a_m \equiv 1$. Taigi (2) nelygybė yra trigometrinės sumos įverčio rezultatas.

Svarbiausi Mindaugo Maknio rezultatai

M. Maknys didžiuoju rėčiu susidomėjo dar būdamas studentu. 1968 m. profesoriaus J. Kubiliaus vadovaujamas parašė ir apgynė diplominį darbą „J. V. Linnik didžiojo rėčio tikimybinė interpretacija", kuriame apibendrino (2) A. Rényi rezultatą. Jis įrodė dvi (2) tipo nelygybes, vieną Mangoldto funkcijai $\Lambda(m)$, o kitą bet kuriai aritmetinei funkcijai. Aišku, jog pirmoji iš jų yra atskiras antrosios atvejis, todėl suformuluosime tik antrąją.

1 teorema. *Tegu $a(m)$ yra reali aritmetinė funkcija. Tuomet su visais $M < n$*

$$\sum_{p<M} p \sum_{r=1}^{p-1} \Big(\sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv r (\mathrm{mod}\, p)}} a(m) - \frac{1}{p} \sum_{m=1}^{n} a(m) \Big)^2 = Bn \sum_{m=1}^{n} a^2(m).$$

Šiai teoremai įrodyti diplomantas pritaikė tokią vieno A. Rényi tikimybinio rezultato interpretaciją. Tegu

$$S(\xi,\eta) = \sup_{f,g} R\big(f(\xi), g(\eta)\big).$$

Čia $R(\xi,\eta)$ yra atsitiktinių dydžių ξ ir η koreliacijos koeficientas, o supremumas imamas pagal visas Borelio prasme išmatuojamas funkcijas, kurioms egzistuoja vidurkiai $Mf(\xi)$, $Mg(\eta)$ ir dispersijos $Df(\xi)$, $Dg(\eta)$. $S(\xi,\eta)$ yra vadinama atsitiktinių dydžių ξ ir η maksimalia koreliacija.

Apibrėžimas. *Atsitiktinių dydžių seka $\{\xi_m\}$ yra vadinama silpnai priklausoma su priklausomumo koeficientu C, jei su bet kuria realių skaičių seka $\{x_m\}$,*

$$\sum_{m=1}^{\infty} x_m^2 < \infty,$$

yra teisinga nelygybė

$$\Big| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} S(\xi_m, \xi_k) x_m x_k \Big| \leqslant C \sum_{m=1}^{\infty} x_m^2.$$

2 teorema. *Tegu* $\{\xi_m\}$ *– silpnai priklausoma atsitiktinių dydžių seka, o* η *– atsitiktinis dydis su baigtiniu antruoju momentu* $M\eta^2$. *Tuomet*

$$\sum_{m=1}^{\infty} M\big(M(\eta|\xi_m) - M\eta\big)^2 \leqslant CD\eta.$$

1 teoremai įrodyti yra konstruojama baigtinė tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ su

$$\Omega = \{1, 2, \dots, n\}, \qquad \mathbb{P}(A)) = \frac{1}{n}\#\{m \leqslant n, m \in A\},$$

įvedami atsitiktiniai dydžiai

$$\xi_p(m) = \begin{cases} r, & \text{jei } m \equiv r(\operatorname{mod} p),\ r = 1, \dots, p-1, \\ 0 & \text{priešingu atveju,} \end{cases}$$

$\eta = a(m)$ ir pritaikoma 2 teorema.

Pastebėsime, kad 1 teoremos nelygybė yra duali žinomai Kubiliaus nelygybei. Tokią P. D. T. A. Elliott [8] atrado tik po kelių metų. Taigi Mindaugas žinomą matematiką aplenkė net 6 metais.

Vėlesnėje savo mokslinėje veikloje Mindaugas tikimybiniais metodais nebesinaudojo, tačiau nemažai gražių rezultatų gavo patobulintu didžiojo rėčio metodu. Lietuvoje Mindaugas Maknys buvo bene vienintelis matematikas, gerai žinojęs didžiojo rėčio galimybes ir mokėjęs išradingai jomis pasinaudoti. Jo visi atlikti tyrimai yra susiję su kvadratiniu skaičių kūnu, dažniausiai menamuoju. Primename, kad kvadratinis skaičių kūnas yra racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$ antro laipsnio algebrinis plėtinys, gaunamas prie $\mathbb{Q}$ prijungiant skaičių $\sqrt{d}$ (d yra bekvadratis ir nelygus 1). Kai $d > 0$, tai gauname realų kvadratinį kūną, o kai $d < 0$ – menamąjį.

Paprastai dėl kanoninio skaidinio vienareikšmiškumo yra nagrinėjamas kvadratinis kūnas $K(\sqrt{d})$, žinomu būdu praplėstas iki idealiųjų skaičių sistemos. Žymėsime: mažosiomis graikiškomis raidėmis $\alpha, \beta, \dots$ – kūno idealiuosius skaičius, α' – skaičiui α jungtinį, $N\alpha$ – idealaus skaičiaus normą, χ – grupinį charakterį $\operatorname{mod} q$ (q – sveikas kūno idealas), g – kūno vienetų skaičių, h – kūno idealų klasių skaičių, $\eta > 1$ – kūno pagrindinį vienetą, m – sveikąjį racionalųjį skaičių. Tuomet funkcija

$$\xi^m(\alpha) = \begin{cases} e^{igm \arg \alpha}, & \text{jei } d < 0, \\ \exp\left\{\frac{i\pi\eta}{\log \eta} \log\left|\frac{\alpha}{\alpha'}\right|\right\}, & \text{jei } d > 0, \end{cases}$$

yra vadinamas kūno $K(\sqrt{d})$ pirmos rūšies Hecke charakteriu su rodikliu m.

Tarkime, kad

$$\chi(\varepsilon)\xi^m(\varepsilon) = 1$$

su visais kūno vienetais ε. Tuomet funkcija

$$\Xi^m(\alpha) = \chi(\alpha)e^{igm \arg \alpha}$$

yra vadinama antros rūšies Hecke charakteriu su rodikliu m. Tegu dar

$$\kappa = \min_{\substack{0<\arg \alpha_1, \arg \alpha_2 \leqslant 2\pi \\ \arg \alpha_1 \neq \arg \alpha_2 \\ P \leqslant N\alpha_1, N\alpha_2 \leqslant P+N}} |\arg \alpha_1 - \arg \alpha_2|.$$

1979 m. M. Maknys gavo tokias didžiojo rėčio nelygybes menamajam kvadratiniam kūnui [9]:

3 teorema. *Tegu* $P > 0$, $N > 1$, $M > 1$, *o* a_m *yra kompleksiniai skaičiai. Tuomet*

$$\sum_{P \leqslant N\alpha \leqslant P+N}^{*} \left| \sum_{|m| \leqslant M} a_m \xi^m(\alpha) \right|^2 \leqslant c(K) \max(\kappa^{-1}, M) \sum_{|m| \leqslant M} |a_m|^2.$$

Ženklelis „ * “ čia ir toliau rodo, kad yra sumuojama pagal neasocijuotus idealiuosius skaičius. Konstanta $c(K)$ yra efektyvi, ji lengvai išreiškiama kūno K parametrais.

Antros rūšies Hecke's charakteriams [9] darbe įrodyta tokia teorema:

4 teorema. *Tegu skaičiai* P, N, M *ir* a_m *apibrėžti 3 teoremoje,* $Q > 1$, *o* $b(\alpha)$ *yra kompleksiniai skaičiai. Tuomet*

$$\sum_{Nq \leqslant Q} \sum_{\chi}{}' \left| \sum_{P \leqslant N\alpha \leqslant P+N}^{*} \sum_{|m| \leqslant M} a_m b(\alpha) \Xi^m(\alpha) \right|^2 =$$

$$= B_K(Q^2 + Q \log Q) \max(\kappa^{-1}, M) \sum_{|m| \leqslant M} |a_m|^2 \sum_{P \leqslant N\alpha \leqslant P+N} |b(\alpha)|^2.$$

Panašūs rezultatai aukštesniems algebriniams kūnams gauti matematikų A. G. Samandrov (1967), E. K. Fogels (1969), M. N. Huxley (1968-1971), W. Schaal (1970), R. J. Wilson (1969), tačiau jie nagrinėjo tik grupinio charakterio atvejį. Taigi Mindaugo rezultatai gerokai pranoko minėtų autorių didžiojo rėčio nelygybes, juose vidurkis imamas pagal visus charakterio Ξ parametrus. Tai leido įrodyti gražias teoremas apie menamojo kvadratinio kūno pirminių skaičių pasiskirstymą sektoriuose.

Tegu $\pi(x, \varphi_1, \varphi_2)$ – kūno $K(\sqrt{d})$, $d > 0$, pirminių idealiųjų skaičių $\mathfrak{p}$, kurių norma neviršija x, $\arg \mathfrak{p} \in (\varphi_1, \varphi_2)$ ir kurie nėra vienoje tiesėje, einančioje per koordinačių pradžią, skaičius.

5 teorema [9]. *Tegu* $0 < \varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi$. *Tuomet*

$$\pi(x;\, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{g}{2\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)\int_2^x \frac{du}{\log u} + B_K x \exp\left\{ - c(K)\,\frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}} \right\}.$$

Aišku, teoremos įvertis nėra trivialus sektoriams, kuriems

$$\varphi_2 - \varphi_1 > \exp\left\{ - \tilde{c}(K)\,\frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}} \right\}. \tag{4}$$

Taigi visada yra bent vienas pirminis idealusis skaičius $\mathfrak{p}$, priklausantis sektoriui su viršūne koordinačių pradžioje, spinduliu $\sqrt{x}$ ir (4) kampo skėtra.

Antroji Mindaugo teorema yra vidurkinis pirminių idealiųjų skaičių pasiskirstymo dėsnio analogas aritmetinėse progresijose menamojo kvadratinio kūno sektoriuose. Tegu

$$\psi(x;\, \beta, q, \varphi_1, \varphi_2) = \sideset{}{^*}\sum_{\substack{N\alpha \leqslant x \\ \alpha \equiv \beta (\mathrm{mod}\, q) \\ \varphi_1 < \arg \alpha \leqslant \varphi_2}} \Lambda(\alpha).$$

6 teorema [9]. *Tegu* x *– pakankamai didelis skaičius, o* $0 < \varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi$. *Tuomet egzistuoja absoliuti konstanta* a *tokia, kad*

$$\sum_{Nq \leqslant Q}\ \sum_{\substack{\beta (\mathrm{mod}\, q) \\ (\beta, q) = 1}} \left(\psi(x;\, \beta, q, \varphi_1, \varphi_2) - \frac{x(\varphi_2 - \varphi_1)}{h\varphi(q)} \right)^2 = B_K x^2 (\log x)^{2-a}$$

su visais

$$1 < Q \leqslant \exp\left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)}\right)\log x - \left(\frac{3ak - 5k - \varphi}{4(k+1)}\right)\log\log x \right\};$$

čia $k > 1$ *yra fiksuotas natūralusis skaičius.*

Pastarojoje teoremoje Q yra šiek tiek mažesnis negu E. K. Fogelso, M. N. Huxley bei W. Schaalo darbuose, tačiau juose pirminiai idealieji skaičiai yra nagrinėjami ne sektoriuose. Apskritai didįjį rėtį taikyti kūno pirminių idealiųjų skaičių pasiskirstymui sektoriuose tirti yra gana sudėtinga, nes antros rūšies Hecke charakteriai neturi ortogonalumo savybės. Tačiau Mindaugas sugebėjo išradingai apeiti tuos sunkumus.

3–6 teoremos sudaro vieną M. Maknio daktaro disertacijos „Menamojo kvadratinio kūno pirminių skaičių pasiskirstymas“ (mokslinis vadovas profesorius – J. Kubilius) skyrių. Disertacija buvo sėkmingai apginta 1975 m., oficialūs oponentai A. V. Malyšev ir K. Bulota aukštai ją įvertino.

●●● $\alpha+\omega$ ●●●

1979–1980 m. Mindaugas ėmė nagrinėti realų kvadratinį kūną ir gavo rezultatus, analogiškus 3–6 teoremoms [10], [11], [12].

Prie didžiojo rėčio nelygybių Mindaugas dar sugrįžo 1984 m. Tegu

$$S(s,\Xi)=\sum_{0<N\alpha\leqslant N}^{*} a(\alpha)\Xi(\alpha)N\alpha^{-s}.$$

Jis gavo [13] vidurkių

$$\sum_{|m|\leqslant M}\sum_{\chi}\int_{T_0}^{T_0+T}\left|S(\sigma+it),\Xi)\right|^2 dt$$

ir

$$\sum_{|m|\leqslant M}\sum_{\chi}\sum_{r=1}^{R_\Xi}\left|S(s_r,\Xi_r)\right|^2$$

įverčius iš viršaus. Jie gana sudėtingi, todėl tiksliau jų neformuluosime. Tokie įverčiai yra labai naudingi, naudojami Hecke'e Z-funkcijų nulių tankio teoremoms įrodyti. Minėtus rezultatus Mindaugas patikslino ir paskelbė su įrodymais 1985 m. [14] ir 1992 m. [15]. Deja, tai buvo paskutiniai darbai. Liko nebaigti sumanymai apie aukštesnių algebrinių kūnų tyrimus taikant didįjį rėtį...

Literatūra

1. Ю. В. Линник, Большое решето, *ДАН СССР*, 1941, **30**, 290–292.
2. Ю. В. Линник, Замечание о наименьшем квадратичном невычете, *ДАН СССР*, 1942, **36**, 131–132.
3. A. Rényi, On the large sieve of Ju. V. Linnik, *Compositio Mathematica*, 1950, **8**, 68–75.
4. A. Rényi, Об одной общей теореме теории вероятностей и ее применении в теории чисел, *Zpravy o společnem 3 sjezda matematika čekoslovenskych o 7 sjezda matematika Polskych*, Praha, 1950, 167–174.
5. R. F. Roth, On the large sieve of Linnik and Rényi, *Mathematika*, 1965, **12**, 1–9.
6. E. Bombieri, On the large sieve, *Mathematika*, 1965, **12**, 201–225.
7. J. B. Friedlander, A. Granville, A. Hildebrand and H. Maier, Oscillation theorems for primes in arithmetic progressions and for sifting functions, *J. Amer. Math. Soc.*, 1991, **4**, 25–86.
8. P. D. T. A. Elliott, On the position of a theorem of Kubilius in probabilistic number theory, *Math. Ann.*, 1974, **209**, 201–209.

9. М. Макнис, Неравенства типа "большого решета" в мнимом квадратическом поле, *Тез. докл. всесоюз. конф. "Проблемы аналитической теории чисел и её применения"*, Вильнюс, 1974, 164–167.

10. М. Макнис, Неравенства типа "большого решета" в квадратичных полях, *Liet. matem. rink.*, 1979, **19**(3), 111–113.

11. М. Макнис, "Большое решето" в квадратичных полях, *Liet. matem. rink.*, 1980, **20**(2), 79–86.

12. М. Макнис, Распреление простых чисел вещественного квадратического поля, *Liet. matem. rink.*, **20**(3) 1980, **20**(3), 140–141.

13. М. Макнис, Неравенства "большого решета" в мнимом квадратичном поле, *XXV* конф., *Шяуляй, 14–15 июня 1984 г.: Тез. докл.*, Вильнюс, 1984, 171–172.

14. M. Maknys, On the "large value" estimate of Hecke polynomials, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös. Sect Math.*, 1985, **27**, 21–29.

15. M. Maknys, Large value estimates for Hecke polynomials. In: *New Trends in Probability and Statistics*. V. 2: Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory. *Proceedings of the Intern. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 24–28 September 1991.* Eds. F. Schweiger and E. Manstavičius, Vilnius: TEV, Utrecht: VSP, 1992, 355–365.