Vilius Stakėnas

Kreivės, nepanašios į kreives

Netikėtumai Georgo Kantoro rojuje

– Kiek tau metų?

Mažylis išdidžiai rodo du pirštus. Šiuo lakonišku būdu jis formuluoja teiginį: tarp jo metų aibės ir dviejų pirštų aibės galima nustatyti abipusiškai vienareikšmę atitiktį, taigi abi aibės yra vienodos galios.

Lyginti aibes tiriant, ar tarp jų elementų galima nustatyti abipusiškai vienareikšmę atitiktį, – kas gali būti papraščiau? Kol nagrinėjame baigtines aibes, išvados mūsų nestebina, netgi atrodo banalios. Pavyzdžiui, jei aibė $\mathcal{A}$ yra dalis baigtinės aibės $\mathcal{B}$ (kitaip sakant, jos poaibis), tačiau su ja nesutampa, neįmanoma nustatyti abipusiškai vienareikšmės atitikties tarp $\mathcal{A}$ ir $\mathcal{B}$ elementų.

Tačiau vos įžengę į begalinių aibių pasaulį matome, kad ta „sveiko proto" išvada pasiliko už vartų. Nedaug perdėsime sakydami, kad į šį pasaulį matematikus įvedė Georgas Kantoras.

Georgas Kantoras (*Georg Cantor*, 1845–1918) gimė Sankt Peterburge. Matematiką studijavo Ciuriche, o vėliau Berlyno universitete. Čia jam didelės įtakos turėjo K. Vejerštrasas, taip pat kitos to meto įžymybės – L. Kronekeris, E. Kumeris. 1869 metais G. Kantoras užėmė pareigas Halės universitete ir čia dirbo iki atsistatydinimo – 1913 metų. Savo padėtimi jis nebuvo patenkintas, tačiau gauti trokštamos vietos Berlyno universitete jam nepavyko. Revoliucingos idėjos, kuriomis jis grindė savo aibių teoriją, susilaukė tiek karšto pritarimo, tiek pasipriešinimo. Galima sakyti, kad pasipriešinimui vadovavo L. Kronekeris – G. Kantoro mokytojas. L. Kronekeris buvo konstruktyvios matematikos šalininkas. Jis nepripažino tų objektų, kurie negali būti sukonstruoti. „*Kokia nauda iš jūsų puikaus darbo apie skaičių* π*?*" – kartą L. Kronekeris paklausė K. Lindemano. – „*Juk iracionalieji skaičiai neegzistuoja*". G. Kantoras sukūrė daugelį aibių teorijos sąvokų, kuriomis matematikai kasdien naudojasi. Tarp racionaliųjų skaičių ir natūraliųjų skaičių aibių galima nustatyti abipusiškai vienareikšmę atitiktį, tačiau tarp racionaliųjų ir visų realiųjų skaičių aibių tokia atitiktis neįmanoma. Tai vis G. Kantoro rezultatai. Jo darbus didžiai vertino D. Hilbertas. „*Niekas mūsų neišvarys iš rojaus, kurį mums sukūrė Georgas Kantoras,*" – šiuos žodžius D. Hilbertas ištarė savo kalboje, pasakytoje K. Vejerštraso jubiliejaus proga.

••• $\alpha + \omega$ •••

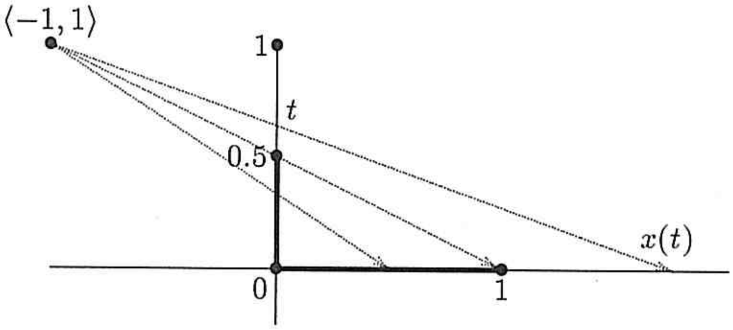
Iš tikrųjų priskyrimas

$$2n \to n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

rodo, kad tarp lyginių ir visų natūraliųjų skaičių yra abipusiškai vienareikšmė atitiktis. Taigi tenka apsiprasti su tiesa, kad begalinės aibės poaibis turi „tiek pat elementų“ kiek ir visa aibė.

Begalines aibes, kurių elementus galime sunumeruoti, t. y. nustatyti abipusiškai vienareikšmę jos elementų ir natūraliųjų skaičių atitiktį, vadinsime *skaičiomis*. G. Kantoras nustatė, kad racionaliųjų skaičių aibė yra skaiti, tačiau visų realiųjų skaičių aibė nėra skaiti.

Vaizduodami skaičius tiesės taškais, skaičių aibių atitiktis galėsime parodyti grafiškai. Ir ne kartą nustebsime.



1 brėž. Taškui t priskiriamas taškas x(t)

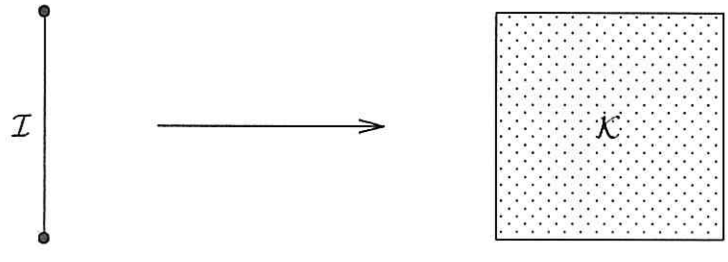
Šiame brėžinyje pavaizduota intervalo $[0,1)$ skaičių ir visų neneigiamų realiųjų skaičių atitiktis. Iš brėžinio matyti, kad, pavyzdžiui, intervalų $[0; 0,5]$ ir $[0; 1]$ skaičių aibės yra vienodos galios. Taip pat vienodos galios intervalų $[0; 1)$ ir $[0; +\infty)$ skaičių aibės.

Taigi baigtiniame pasaulyje įgytas intuityvus mažesnių ir didesnių aibių suvokimas darosi bevertis, susidūrus su begalinėmis aibėmis.

Bet vis dėlto! Net ir susitaikiusiam su minėtomis išvadomis protui vargu ar kils nuojauta, kad intervalo $\mathcal{I} = [0; 1]$ ir kvadrato

$$\mathcal{K} = \{< x, y >: 0 \le x, y \le 1\}$$

taškų aibės taip pat vienodos galios. Greičiau priešingai!



2 brėž. Abipusiškai vienareikšmė atitiktis? Nejau tai įmanoma?

$\bullet\bullet\bullet\ \alpha + \omega\ \bullet\bullet\bullet$

Tačiau ir čia baigtinio pasaulio intuicijai lemta patirti triuškinantį pralaimėjimą. Pasinaudokime tuo, kad bet kuris vienetinio intervalo skaičius gali būti išreikštas begaline q-aine trupmena:

$$x = \frac{\alpha_1}{q} + \frac{\alpha_2}{q^2} + \ldots, \quad \alpha_i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}.$$

Rašysime: $x = 0_{(q)}, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$. Galime imti $q = 2$, tada skaitmenys α_i įgys tik dvi reikšmes: 0 ir 1. Tiesa, racionalieji skaičiai, kurių vardikliai yra dvejeto laipsniai, reiškiami dviem būdais, pavyzdžiui,

$$\frac{1}{2} = 0_{(2)}, 1, \quad \frac{1}{2} = 0_{(2)}, 0111\ldots.$$

Tokiu atveju susitarsime naudoti išraišką su baigtiniu vienetų skaičiumi.

Dabar apibrėšime abipusiškai vienareikšmę kvadrato taškų ir intervalo taškų atitiktį $\varphi : \mathcal{K} \to \mathcal{I}$. Tegu $< x, y > \in \mathcal{K}$ ir $x = 0_{(2)}, \alpha_1\alpha_2\ldots, y = 0_{(2)}, \beta_1\beta_2\ldots$. Sudarykime schemą

$$\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_1 & & \alpha_2 & \rightarrow & \alpha_3 & & \alpha_4 & \ldots & \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \rightarrow \alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_2\alpha_3\ldots \\
\beta_1 & \rightarrow & \beta_2 & & \beta_3 & \rightarrow & \beta_4 & \ldots &
\end{array}$$

ir apibrėžkime

$$\varphi(< x, y >) = 0_{(2)}, \alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_2\alpha_3\ldots$$

Šiek tiek pagalvoję, sutiksite, kad apibrėžta atitiktis yra abipusiškai vienareikšmė.

Vienas atradimas gimdo kitą. Kodėl turėtume apsiriboti kvadratu, t. y. plokštumos aibe. Tarkime,

$$\mathcal{K}_n = \{< x_1, x_2, \ldots, x_n >: x_i \in \mathcal{I}\}$$

yra n-matis kubas. Jo ir intervalo $\mathcal{I}$ taškų aibės – taip pat vienodos galios. Štai vienareikšmės atitinkamybės tarp trimačio kubo $\mathcal{K}_3$ ir intervalo $\mathcal{I}$ taškų nustatymo schema:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_1 & & \alpha_2 & \rightarrow & \alpha_3 & & \alpha_4 & \ldots & \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \\
\beta_1 & & \beta_2 & & \beta_3 & & \beta_4 & \ldots & \rightarrow \alpha_1\beta_1\gamma_1\gamma_2\beta_2\alpha_2\alpha_3\ldots \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \\
\gamma_1 & \rightarrow & \gamma_2 & & \gamma_3 & \rightarrow & \gamma_4 & \ldots &
\end{array}$$

Tačiau ir n-mačiais kubais nepasibaigia mūsų vienareikšmę atitiktį nustatančios schemos jėga.

Tegu

$$\mathcal{K}_\infty = \{< x_1, x_2, \ldots >: x_i \in \mathcal{I}\}$$

yra sekų, sudarytų iš $\mathcal{I}$ intervalo skaičių, aibė. Žymėkime

$$x_i = 0_{(2)}, \alpha_{1i}\alpha_{2i}\alpha_{3i}\ldots.$$

Nesunku modifikuoti mūsų schemą, kad ji nustatytų abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp $\mathcal{K}_\infty$ ir $\mathcal{I}$ taškų:

$$\begin{array}{cccccccc}
\alpha_{11} & & \alpha_{21} & \rightarrow & \alpha_{31} & & \alpha_{41} & \ldots \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & \ldots \\
\alpha_{12} & \rightarrow & \alpha_{22} & & \alpha_{32} & & \alpha_{42} & \ldots \\
 & & & & \downarrow & & \uparrow & \ldots \\
\alpha_{13} & \leftarrow & \alpha_{23} & \leftarrow & \alpha_{33} & & \alpha_{43} & \ldots \\
\downarrow & & & & & & \uparrow & \ldots \\
\alpha_{14} & \rightarrow & \alpha_{24} & \rightarrow & \alpha_{34} & \rightarrow & \alpha_{44} & \ldots \\
\multicolumn{8}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array} \rightarrow \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{22}\alpha_{21}\ldots$$

Taigi $\mathcal{K}_n(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ ir intervalas $\mathcal{I} = \mathcal{K}_1$ yra vienodos galios aibės. Tačiau grįškime prie nagrinėtos poros: intervalo $\mathcal{I}$ ir kvadrato $\mathcal{K}$. Intervalą $\mathcal{I}$ galime suvokti kaip geometrinę atkarpą. Ar galime interpretuoti kvadratą kaip niekur nenutrūkstančią (tolydžią) kreivę? Kitaip tariant, ar galima visus kvadrato taškus sujungti niekur nenutrūkstančia kreive?

Protas, intuicijos nekart apgautas, tyli.

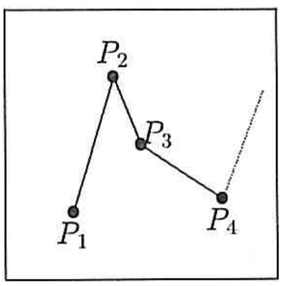
Apgaulingas pavyzdys

Gali pasirodyti, kad teigiamą atsakymą visai nesunku gauti. Jau žinome, kad racionaliuosius intervalo $\mathcal{I}$ skaičius galime sunumeruoti. Tada kvadrato $\mathcal{K}$ taškų $< x, y >$ taškų su racionaliomis koordinatėmis aibė taip pat skaiti. Kokiu nors būdu sunumeruokime juos:

$$Q = \{< x, y >: x, y \in \mathcal{I}\} = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}.$$

Aibė Q yra tiršta kvadrate $\mathcal{K}$, t. y. kokį tašką $z \in \mathcal{K}$ beparinktume, visada atsiras taškų P_m, kurie bus kiek norima arti z.

Sujungę taškų poras P_i, P_{i+1}, $i \geq 1$, atkarpomis, gausime tolydžią kreivę, „aplankančią" visus kvadrato taškus su racionaliomis koordinatėmis. Galbūt ji eina ir per visus kitus kvadrato taškus?



3 brėž. Kreivė, kiek norima arti priartėjanti prie bet kurio kvadrato taško, tačiau ne visus juos aplankanti.

••• $\alpha + \omega$ •••

Ne. Štai trumpas šio tvirtinimo įrodymas. Tegu λ yra koks nors intervalo $\mathcal{I}$ skaičius, kuris nėra jokios kvadratinės lygties su racionaliaisiais koeficientais šaknis. Pavyzdžiui, galime imti $\lambda = \pi/4$, tačiau tada teks patikėti, kad šio skaičiaus negalima gauti sprendžiant kvadratines lygtis su racionaliaisiais koeficientais. Tačiau galima pasirinkti ir paprastesnį skaičių. Pavyzdžiui, nesudėtinga įrodyti, kad skaičius $\lambda = 0.5\sqrt[3]{2}$ irgi tinka.

Pasirinkę skaičių λ, dar raskime mažą racionalųjį skaičių q, kad taškas $\Lambda =< \lambda, q/\lambda >$ gulėtų kvadrate. Įrodykime, kad laužtė, jungianti taškų poras P_i, P_{i+1}, neina per tašką Λ.

Tarkime, taip nėra. Tada taškas Λ guli kokioje nors atkarpoje

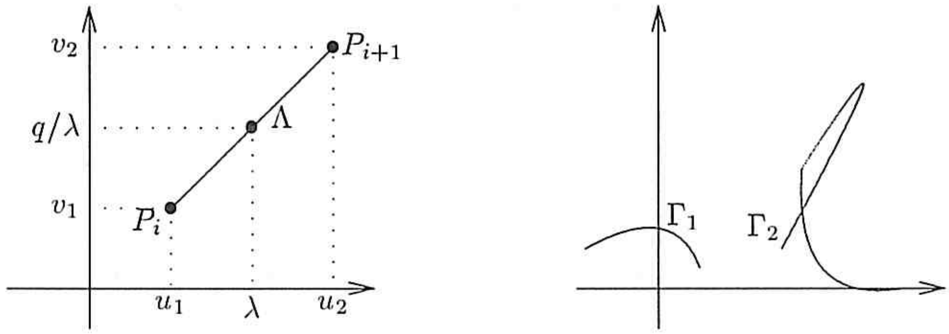
$$P_iP_{i+1}, \quad P_i =< u_1, v_1 >, \quad P_{i+1} =< u_2, v_2 > .$$

Matome, kad $u_1 \neq u_2, v_1 \neq v_2$, nes priešingu atveju skaičius λ būtų racionalusis. Tačiau tada skaičius λ turi tenkinti lygybę

$$\frac{q/\lambda - v_1}{v_2 - v_1} = \frac{\lambda - u_1}{u_2 - u_1}$$

(žr. 4 brėž.). Tačiau ši lygybė reiškia, kad skaičius λ yra kvadratinės lygties su racionaliaisiais koeficientais šaknis.

Tad viltis greitai atsakyti į iškeltą klausimą neišsipildė. Pabandykime tiksliau suformuluoti, ko gi mes iš tiesų norime.



4 brėž.

Kreives plokštumoje paprastai įsivaizduojame kaip nesutrūkusias (tolydžias) linijas. Kartais kreivę galima nagrinėti kaip tam tikros vieno kintamojo funkcijos grafiką (kreivė Γ_1 4 brėž.). Tačiau taip yra ne visada (kreivė Γ_2). Tad norėdami susieti kreives su funkcijomis, turime parinkti po funkciją abiems koordinatėms.

Apibrėžimas. *Plokštumos kreive vadinsime taškų aibę*

$$\Gamma = \{< x(t), y(t) >: t \in \mathcal{I}\};$$

čia $x(t), y(t)$ yra tolydžios funkcijos, apibrėžtos intervale $\mathcal{I}$ ir įgyjančios realias reikšmes.

Galėtume nagrinėti kreives, kurių funkcijos $x(t), y(t)$ apibrėžtos ne intervale $\mathcal{I}$, bet kokiame kitame intervale $[a, b]$. Tačiau šitaip pakeitę apibrėžimą naujų kreivių negauname. Iš tiesų taškų aibės

$$\Gamma = \{< x(t), y(t) >: t \in [a, b]\}, \quad \Gamma_1 = \{< x_1(t), y_1(t) >: t \in \mathcal{I}\},$$

jei $x_1(t) = x(a + t(b - a))$, $y_1(t) = y(a + t(b - a))$, sutampa.

Dabar naujai suformuluokime klausimą, į kurį norime atsakyti.

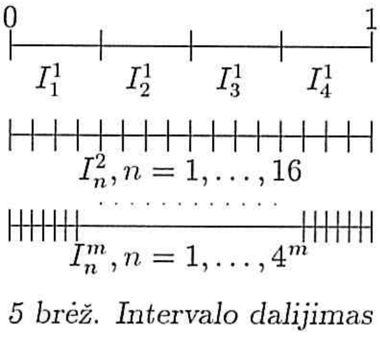
$$\boxed{\text{Ar kvadratas yra kreivė?}}$$

Teigiamas D. Hilberto atsakymas

Taip, kvadratas yra kreivė. Pirmasis tai įrodė G. Peano. Tačiau jo analitinį įrodymą nelengva suprasti. D. Hilbertas savo konstrukcijoje naudojosi geometrine interpretacija. Tad nuo Hilberto kreivės geriausia ir pradėti.

Davidas Hilbertas (*David Hilbert*, 1862–1943) gimė Rytų Prūsijoje, Karaliaučiuje (*Königsberg*). Baigęs Karaliaučiaus universitetą, kur jo mokytojai buvo K. Lindemanas (*C. Lindemann*) bei A. Hurvicas (*A. Hurwitz*), jis čia ir dirbo iki 1895 metų. Nuo 1895 metų iki akademinės veiklos pabaigos – 1930 metų dirbo Getingeno universitete. D. Hilbertas – vienas didžiausių visų laikų matematikų. Beveik visose matematikos srityse jis gavo svarbių rezultatų. 1900 metais Paryžiuje vyko pirmasis pasaulio matematikų kongresas. D. Hilbertas skaitė pranešimą ir suformulavo 23 matematikos problemas, kurių sprendimas, jo nuomone, būtų itin svarbus matematikos raidai. Tai iš tiesų pasitvirtino. Dvidešimtojo amžiaus matematikai padėjo daug pastangų spręsdami D. Hilberto suformuluotus uždavinius. Pats D. Hilbertas savo matematinės karjeros pabaigoje daugiausia dėmesio skyrė matematikos pagrindų tyrimui. Tačiau net ir jis nenujautė, kad neprieštaringos ir pilnos sistemos, apie kokią jis svajojo, iš tiesų sukurti neįmanoma. Tai vėliau įrodė K Giodelis (*K. Gödel*). D. Hilberto optimizmą pažinimo srityje geriausiai rodo žodžiai, kuriuos jis ištarė savo kalboje Karaliaučiuje, kur 1930 metais jam buvo suteiktas Garbės piliečio vardas: „*Wir müssen wissen. Wir werden wissen*“ (Mes privalome žinoti. Ir mes žinosime).

Pradėkime nuo intervalo $\mathcal{I}$ dalijimo. Iš pradžių dalykime jį į keturias vienodas dalis, kiekvieną šių dalių – dar į keturias ir taip toliau – *ad infinitum*.



5 brėž. Intervalo dalijimas

••• $\alpha + \omega$ •••

Kiekvienam taškui $x \in \mathcal{I}$ galime sudaryti mažėjančių intervalų seką

$$I^1_{n_1} \supset I^2_{n_2} \supset I^3_{n_3} \supset \ldots, \tag{1}$$

kad $x \in I^m_{n_m}$ su visais m. Kita vertus, kiekviena (1) seka apibrėžia vienintelį tašką $x \in \mathcal{I}$:

$$\{x\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} I^m_{n_m}.$$

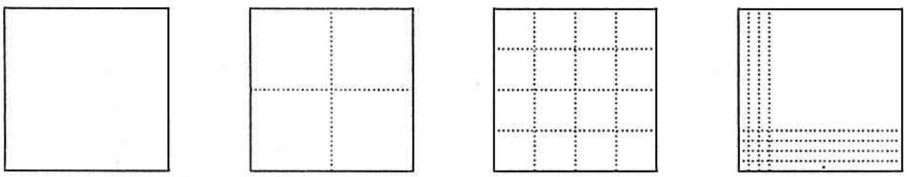
Akivaizdu, kad ne visos skirtingos (1) sekos apibrėžia skirtingus intervalo $\mathcal{I}$ taškus. Jei $x = m/4^n$ su kuriais nors natūraliaisiais m, n, tai egzistuoja dvi sekos, apibrėžiančios x.

Pirmoji užgaida. *Vietoje intervalo $\mathcal{I}$ taškų nagrinėsime visas įmanomas intervalų sekas:*

$$\langle I^1_{n_1}, I^2_{n_2}, I^3_{n_3}, \ldots \rangle, \quad I^1_{n_1} \supset I^2_{n_2} \supset I^3_{n_3} \supset \ldots$$

Žinoma, visada atsiminsime, kad tokias sekas atitinka intervalo $\mathcal{I}$ taškai.

O dabar smulkinkime vienetinį kvadratą $\mathcal{K}$. Jį dalykime į keturias lygias dalis, o po to – kiekvieną dalį toliau ketvirčiuokime.



$\mathcal{K}$ $\quad K^1_1, K^1_2, K^1_3, K^1_4$ $\quad K^2_1, \ldots, K^2_{16}$ $\quad K^m_n, n = 1, \ldots, 4^m$

6 brėž. Kvadrato dalijimas

Kiekvienam kvadrato taškui $x \in \mathcal{K}$ galime sudaryti mažėjančių kvadratų seką

$$K^1_{n_1} \supset K^2_{n_2} \supset K^3_{n_3} \supset \ldots, \tag{2}$$

kad $x \in K^m_{n_m}$ su visais m. Kiekviena (2) seka apibrėžia vienintelį tašką $x \in \mathcal{I}$:

$$\{x\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} K^m_{n_m}.$$

Antroji užgaida. *Vietoje kvadrato $\mathcal{K}$ taškų nagrinėsime visas įmanomas kvadratų sekas:*

$$\langle K^1_{n_1}, K^2_{n_2}, K^3_{n_3}, \ldots \rangle, \quad K^1_{n_1} \supset K^2_{n_2} \supset K^3_{n_3} \supset \ldots$$

••• $\alpha + \omega$ •••

Gali pasirodyti, kad pakeitus intervalo taškus (1) intervalų sekomis, o kvadrato taškus – kvadratų sekomis, atitiktį $\mathcal{I} \to \mathcal{K}$ nustatyti jau nebesunku. Pakanka kaip nors nustatyti atitiktį tarp intervalų ir kvadratų šeimų

$$\{I_1^m, I_2^m, \dots, I_{4^m}^m\} \to \{K_1^m, K_2^m, \dots, K_{4^m}^m\} \tag{3}$$

ir po to apibrėžti ją tarp (1) ir (2) sekų

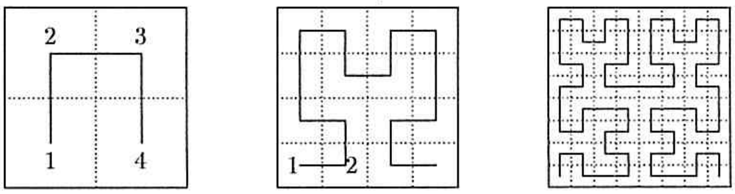
$$\langle I_{n_1}^1, I_{n_2}^2, I_{n_3}^3, \dots \rangle \to \langle K_{n_1}^1, K_{n_2}^2, K_{n_3}^3, \dots \rangle.$$

Tačiau kaip tik (3) atitikčiai nustatyti ir reikia meistro rankos! Kad (3) atitiktis reikštų atitiktį tarp intevalo $\mathcal{I}$ ir kvadrato $\mathcal{K}$ taškų, visų pirma būtina, kad mažėjančių intervalų seką atitiktų mažėjanti kvadratų seka. Be to, skirtingoms, tačiau tą patį $\mathcal{I}$ tašką atitinkančioms intervalų sekoms turi būti priskiriamos tą patį $\mathcal{K}$ tašką atitinkančios kvadratų sekos. Taip bus, jeigu pasirūpinsime, kad (3) bet kurį intervalą I_l^m smulkinant gautiems intervalams I_i^{m+1} būtų priskiriami I_l^m atitinkančio kvadrato K_l^m ketvirčiai be to, gretimiems intervalams I_l^m, I_{l+1}^m priskiriami kvadratai taip pat turi būtų gretimi.

D. Hilbertas parodė, kad tokie kvadratų priskyrimai intervalams yra įmanomi. Savo idėja jis išreiškė vienu sakiniu:

*Die für solche Abbildung erforderlichen Funktionen lassen sich in übersichtlichen Weise herstellen, wenn man sich der folgenden geometrischen Anschauung bedient.**

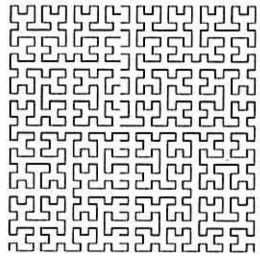
Ir pridėjo brėžinį:



7 brėž. Hilberto kreivės konstravimas

Ką gi reiškia šis brėžinys? Pirmoji jo dalis nurodo, kuriuos kvadratus reikia priskirti intervalams $I_1^1, I_2^1, I_3^1, I_4^1$, antroji – intervalams $I_1^2, I_2^2, \dots, I_{16}^2$ (čia intervalai imami vienas po kito). Intervalui I_m^2 priskiriamas kvadratas pažymėtas m-uoju numeriu. Trečiosios brėžinio dalies prasmė analogiška. D. Hilbertas apsiribojo trimis žingsniais. Matyt, todėl, kad juose yra viskas, ko reikia, kad truputį pagalvoję įsitikintume, minėtas savybes turinčių atitikčių (3) įmanomumu. Tačiau dar žvilgtelėkime, kaip atrodo 5-ojo dalijimo kvadratų priskyrimas (žr. 8 brėž.).

* Šiam atvaizdžiui (t. y. tolydžiam intervalo atvaizdžiui į kvadratą) reikalingos funkcijos gali būti akivaizdžiai sukonstruotos naudojantis šiuo geometriniu paveikslu.



8 brėž. Penktos eilės dalijimo kvadratų priskyrimas

Taigi atitiktis tarp intervalo $\mathcal{I}$ ir kvadrato $\mathcal{K}$ taškų apibrėžta, žymėkime ją $\Gamma_H : \mathcal{I} \to \mathcal{K}$. Kiekvienas kvadrato taškas priskirtas bent vienam intervalo taškui. Tačiau ar ši atitiktis tolydi?

Reikia įsitikinti, kad artimiems intervalo $\mathcal{I}$ taškams priskiriami artimi kvadrato taškai. Tarkime, $t_1, t_2 \in \mathcal{I}$ ir $|t_1 - t_2| < 4^{-m}$. Jei t_1, t_2 yra tame pačiame dalijimo intervale I_k^m, tai $\Gamma_H(t_1), \Gamma_H(t_2)$ priklausys tam pačiam dalijimo kvadratui K_k^m ir atstumas tarp taškų $\Gamma_H(t_1), \Gamma_H(t_2)$ nebus didesnis už kvadrato įstrižainę, kuri savo ruožtu nėra didesnė už dvi kvadrato kraštines, t. y. $2 \cdot 2^{-m}$. Jei t_1, t_2 yra gretimuose dalijimo intervaluose I_k^m, I_{k+1}^m, tai kreivės taškai $\Gamma_H(t_1), \Gamma_H(t_2)$ bus gretimuose dalijimo kvadratuose, o atstumas tarp jų nebus didesnis už keturias kvadrato kraštines, t. y. $4 \cdot 2^{-m}$.

Hilberto kreivės tolydumą įrodėme. Pats D. Hilbertas pastebėjo, kad ši kreivė nė viename taške neturi liestinės, t. y. niekur nediferencijuojama.

Skyrelis mėgstantiems skaičiuoti

Hilberto kreivės $\Gamma_H : \mathcal{I} \to \mathcal{K}$ taškai užpildo visą kvadratą, kreivė tolydi, tačiau niekur nediferencijuojama. Turbūt norėtume ją padaryti labiau apčiuopiamą, pavyzdžiui, išmokti skaičiuoti jos taškų koordinates

$$\Gamma_H(t) = \langle h_1(t), h_2(t) \rangle, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Nors beveik 100 metų po Hilberto kreivės „gimimo" niekam nepavyko rasti paprasto būdo, tą padaryti, iš tikrųjų nėra taip sudėtinga, kaip buvo manoma.

Hilberto kreivės konstrukcija remiasi intervalo bei kvadrato dalijimu į keturias dalis. Tad nenuostabu, kad koordinačių $h_1(t), h_2(t)$ skaičiavimui paranku naudoti skaičiaus $t \in \mathcal{I}$ išraišką ketvirtainėje skaičiavimo sistemoje:

$$t = \frac{q_1}{4} + \frac{q_2}{4^2} + \frac{q_3}{4^3} + \ldots = 0_{(4)}, q_1 q_2 \ldots, \quad q_i \in \{0, 1, 2, 3\}. \tag{4}$$

Iš tiesų (1) reiškia, kad skaičius t yra intervalo $\mathcal{I}$ pirmojo dalijimo q_1-ajame intervale I_{q_1}, šio intervalo dalijimo q_2-ajame intervale I_{q_1,q_2} ir taip toliau. Tada taškas $\Gamma_H(t)$ yra kvadrato $\mathcal{K}$ pirmojo dalijimo q_1-ajame kvadrate K_{q_1}, šio kvadrato dalijimo q_2-ajame kvadrate K_{q_1,q_2} ir taip toliau, kvadratus skaičiuojant Hilberto nurodyta tvarka. Taškas $\Gamma_H(t)$ yra kvadratų $K_{q_1,\ldots,q_2}$ kairiųjų apatinių viršūnių riba, kai $n \to \infty$. Todėl pakanka pagal (4) išraišką išmokti skaičiuoti šių viršūnių koordinates. Tai galima padaryti remiantis tam tikra Hilberto kreivės „panašumo į save pačią“ savybe: $\Gamma_H(t)$ dalys, atitinkančios intervalus $0 \le t \le 0,25$, $0,25 \le t \le 0,5$, $0,5 \le t \le 0,75$, $0,75 \le t \le 1$ yra sumažintos visos kreivės kopijos.

Naudodami skaičiaus t išraišką (4) ketvirtainėje skaičiavimo sistemoje, užrašysime Hilberto kreivės taškų koordinačių formules. Tegu n_{0j} yra skaitmenų $q_i = 0$ kiekis su $i < j$ išraiškoje $t = 0_{(4)}, q_1 q_2 \ldots$, o n_{3j} – skaitmenų $q_i = 3$ kiekis, $i < j$. Apibrėžkime

$$e_{0j} = \begin{cases} 0, & \text{jei } n_{0j} \text{ lyginis}, \\ 1, & \text{jei } n_{0j} \text{ nelyginis}, \end{cases} \quad e_{3j} = \begin{cases} 0, & \text{jei } n_{3j} \text{ lyginis}, \\ 1, & \text{jei } n_{3j} \text{ nelyginis}, \end{cases}$$

$$d_j \equiv e_{0j} + e_{3j} (\text{mod } 2), \quad \text{t.y. } d_j = \begin{cases} 0, & \text{jei } e_{0j} + e_{3j} = 0, 2 \\ 1, & \text{jei } e_{0j} + e_{3j} = 1. \end{cases}$$

Tada Hilberto kreivės $\Gamma_H(t) = \langle h_1(t), h_2(t) \rangle$ taškų koordinatės užrašomos taip:

$$h_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{e_{0j}}}{2^j} \text{sgn}(q_j)((1 - d_j)q_j - 1),$$

$$h_2(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{e_{0j}}}{2^j} \text{sgn}(q_j)(1 - d_j q_j);$$

čia: $\text{sgn}(0) = 0; \text{sgn}(u) = 1, u > 0$. Pavyzdžiui, tašką $t = 3/15 = 0_{(4)}, 0333\ldots$ Hilberto kreivė atvaizduoja į tašką su koordinatėmis

$$h_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^j} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

$$h_2(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^j} = \frac{1}{3}.$$

Peano kreivė

Jau minėjome, kad D. Peano pirmasis įrodė, kad egzistuoja tolydi kreivė, einanti per visus kvadrato taškus.

Italų matematikas Džiuzepė Peano (*Giuseppe Peano*, 1858-1932) studijavo Turino universitete ir čia iki pat mirties profesoriavo. D. Peano darbai svarbūs įvairioms matematikos sritims. Jis išvystė simbolinės logikos idėjas, sukūrė natūraliųjų skaičių aksiomatiką, diferencialinių lygčių teorijoje įrodė svarbią teoremą apie sprendinio egzistavimą. D. Peano turėjo ne tik matematinių idėjų. Jis buvo tarptautinės mokslo kalbos *Interlingua (latine sine flexione)* kūrėjas ir propaguotojas. Tačiau ši kalba, kaip ir *Esperanto*, neprigijo.

••• $\alpha + \omega$ •••

Konstruodamas savo kreivę, jis rėmėsi realiųjų skaičių išraiškomis trejetainėje skaičiavimo sistemoje. Jei $t \in \mathcal{I}$, tai

$$t = \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \frac{t_3}{3^3} + \ldots = 0_{(3)}, t_1 t_2 \ldots, \quad t_i \in \{0, 1, 2\}. \tag{5}$$

Kaip ir kitose skaičiavimo sistemose išraiška ne visada vienintelė: racionalieji skaičiai, kurių vardikliai yra trejeto laipsniai, šioje sistemoje reiškiami dviem būdais.

Apibrėžkime funkcijas:

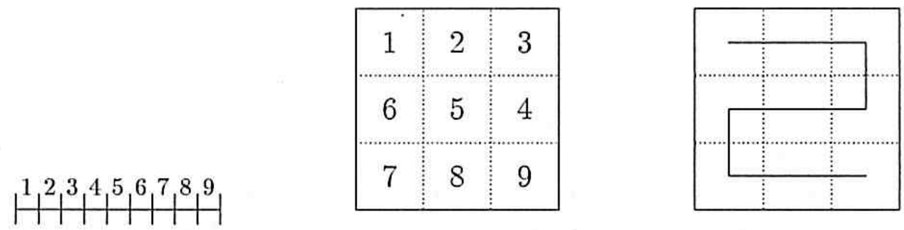
$$k_n(u) = \begin{cases} u, & \text{jei } n = 0, 2, 4, \ldots \\ 2 - u, & \text{jei } n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

Dabar jau galime apibrėžti Peano kreivę $\Gamma_P : \mathcal{I} \to \mathcal{K}$. Žymėsime $\Gamma_P(t) = \langle p_1(t), p_2(t) \rangle$. Naudodami skaičiaus t išraišką trejetainėje sistemoje (5), apibrėšime

$$\begin{aligned} p_1(t) &= 0_{(3)}, t_1 k_{t_2}(t_3) k_{t_2+t_4}(t_5) k_{t_2+t_4+t_6}(t_7) \ldots, \\ p_2(t) &= 0_{(3)}, k_{t_1}(t_2) k_{t_1+t_3}(t_4) k_{t_1+t_3+t_5}(t_8) \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Naudojantis (6) formulėmis patogu skaičiuoti koordinates $p_1(t), p_2(t)$. Tačiau kodėl turėtume patikėti, kad $\Gamma_P(t)$ yra tolydi kreivė, einanti per visus kvadrato $\mathcal{K}$ taškus? G. Peano pateikė analitinį įrodymą, t. y. $\Gamma_P(t)$ savybes nustatė tyrinėdamas (6) išraiškas. Tačiau ir Peano kreivės prigimtį galima vaizdžiai paaiškinti nagrinėjant intervalo $\mathcal{I}$ bei kvadrato $\mathcal{K}$ dalijimus, tik šįkart intervalai ir kvadratai dalijami į devynias dalis.

Kaip ir Hilberto kreivės konstrukcijoje, svarbu nustatyti atitiktis tarp intervalų ir kvadratų, kad gretimus intervalus atitiktų gretimi kvadratai ir kiekvieno intervalo dalis atitiktų atitinkamo kvadrato dalys. Pirmasis kvadratų priskyrimas intervalams atrodo taip:



9 brėž. Peano kreivės konstravimas

O štai šitaip kvadratai priskiriami 9^{-3} ir 9^{-4} ilgio intervalams:

10 brėž. Peano kreivė

Sierpinskio kreivė

Panagrinėjus geometrines Hilberto ir Peano kreivių interpretacijas, susidaro įspūdis, kad kelią joms nurodė ne tiek matematinių dėsnių būtinybė, kiek išradinga meistro ranka. Kitas meistras brėžtų dar kitaip. Panagrinėsime dar vieną visus kvadrato taškus jungiančią kreivę, kurią sukūrė V. Sierpinskis.

Lenkų matematikas Vaclovas Sierpinskis (*Wacław Sierpiński*, 1882–1969) gimė ir mirė Varšuvoje. Tai itin daug lenkų matematikos mokyklai nusipelnęs matematikas. Jis studijavo Varšuvoje, daktaro laipsnį gavo Krokuvoje, 1908–1918 metais dirbo Lvove, vėliau – Varšuvoje. V Sierpinskis parašė apie 700 straipsnių ir knygų, apie 600 iš jų skirti topologijai. Lenkų matematikos mokyklai svarbi ir jo organizacinė veikla: kartu su kitais jis įsteigė žurnalą „*Fundamenta Mathematicae*“, redagavo žurnalą „*Acta arithmetica*“, steigė Lenkijos mokslų akademijos Matematikos institutą. Jo kapo antkapyje įrašyta: „*Badacz Nieskończoności*“ (begalybės tyrinėtojas).

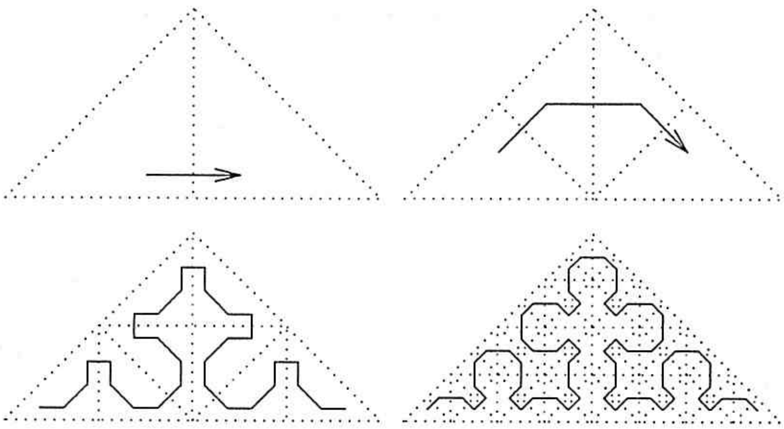
V. Sierpinskis įrodė, kad egzistuoja tolydi ir lyginė, tenkinanti lygybes

$$f(t) + f(t + 1/2) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty),$$

$$2f(t/4) + f(t + 1/8) = 1, \quad t \in [0, 1],$$

funkcija $f(t)$, kad kreivė $\Gamma_S(t) = \langle f(t), f(t - 1/4)\rangle$, kai $t \in [0, 1]$ eitų per kiekvieną kvadrato $Q = \{\langle x, y\rangle : -1 \le x, y \le 1\}$ tašką.

Sierpinskio kreivę taip pat galima apibrėžti naudojantis geometrine interpretacija. Pastebėkime, kad Hilberto bei Peano kreivės $\Gamma_H(t), \Gamma_P(t)$, kai t perbėga intervalo $[0; 0,5]$ ir $[0; 1/3]$ taškus, užpildo atitinkamai pusę bei trečdalį kvadrato (žr. 9 brėž.). Sukonstruosime kreivę $\Gamma_S(t)$, kuri eitų per visus viršutinio trikampio taškus, kai t perbėga visus intervalo $J = [0; 0,5]$ skaičius, be to, $\Gamma_S(0) = \langle 0, 0\rangle, \Gamma_S(0.5) = \langle 1, 1\rangle$. Tada taškus $\Gamma_S(t)$, kai $t \in [0.5; 1]$, apibrėžę simetriškai, gausime per visus kvadrato taškus einančią kreivę.



11 brėž. Sierpinskio kreivės konstravimas

Intervalą J dalysime pusiau, gautas dalis – vėl pusiau. Į puses ir puseles dalysime ir statųjį trikampį. Kaip ir Hilberto bei Peano kreivių geometrinėse konstrukcijose svarbu tinkamai nustatyti atitiktį tarp intervalų ir trikampių. Kaip 1–4 dalijimų intervalams priskiriami atitinkami trikampiai, parodyta 11 brėž. Mažėjančių intervalų sekoms priskyrę mažėjančių trikampių sekas, apibrėšime Sierpinskio kreivę.

Trumpas tikimybinis intermezzo

Nepriklausomi įvykiai, dydžiai – svarbiausios tikimybių teorijos sąvokos. Ką bendro jos gali turėti su mūsų tema – tolydžiomis, kvadratą užpildančiomis kreivėmis?

Ryšys kuo glaudžiausias, tačiau ...

Įspėjimas. *Neturintiems pradinių mato teorijos bei matematinės analizės žinių šio skyrelio geriau neskaityti.*

Intervalą $\mathcal{I} = [0,1]$ su jo Borelio aibių σ-algebra* bei Lebego matu λ (geometriniu ilgiu) nagrinėsime kaip tikimybinę erdvę.

Apibrėžimas. *Mačias funkcijas $f_1, f_2 : \mathcal{I} \to (-\infty, \infty)$ vadinsime nepriklausomomis, jei su bet kokiomis Borelio aibėmis B_1, B_2*

$$\lambda(f_1(\omega) \in B_1, f_2(\omega) \in B_2) = \lambda(f_1(\omega) \in B_1) \cdot \lambda(f_2(\omega) \in B_2).$$

1936 metais H. Šteinhauzas įrodė tokią teoremą.**

Teorema. *Jei $f_1, f_2 : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ yra tolydžios, nepriklausomos ir siurjektyvios funkcijos, tai kreivė*

$$\Gamma(t) = \langle f_1(t), f_2(t) \rangle, \quad t \in \mathcal{I},$$

eina per kiekvieną kvadrato $\mathcal{K}$ tašką.

---

* Aš perspėjau!

** Ši teorema buvo paskelbta *Comptes Rendus de l'Academiae des Sciences* 202 tome ir ilgai liko nežinoma. Po to ją vėl įrodė ir išpopuliarino kiti matematikai.

Įrodysime Šteinhauzo teoremą. Tegu $0 < a, b < 1$ yra du vidiniai intervalo $\mathcal{I}$ taškai. Tada galime parinkti tokį mažą $\varepsilon > 0$, kad intervalai

$$I_a = (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \quad I_b = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$$

būtų $\mathcal{I}$ poaibiai. Kadangi

$$f_1^{-1}(I_a) = \{\omega : f_1(\omega) \in I_a\}, \quad f_2^{-1}(I_b) = \{\omega : f_2(\omega) \in I_b\}$$

yra atviros aibės, tai $\lambda(\omega : f_1(\omega) \in I_a), \lambda(\omega : f_2(\omega) \in I_b) > 0$. Kadangi funkcijos f_1, f_2 yra nepriklausomos, tai

$$\lambda(\omega : f_1(\omega) \in I_a, f_2(\omega) \in I_b) = \lambda(\omega : f_1(\omega) \in I_a) \cdot \lambda(\omega : f_2(\omega) \in I_b) > 0.$$

Tačiau tai reiškia, kad atsiras toks $\omega \in \mathcal{I}$, kad $|f_1(\omega) - a| \le \varepsilon$, $|f_2(\omega) - b| \le \varepsilon$. Taigi taškų aibė $\Gamma = \{\langle f_1(t), f_2(t)\rangle : \quad t \in \mathcal{I}\}$ yra tirštas kvadrato $\mathcal{K}$ poaibis. Tačiau kita vertus, Γ yra kompaktiška aibė (f_1, f_2 tolydumas!), todėl $\Gamma = \mathcal{K}$. Teorema įrodyta.

Kokia mums nauda iš šios teoremos? Ar galima sudaryti funkcijas, apie kurias joje kalbama? Taip. Bet apie tai ne šįsyk.

Žvilgsnis, vienijantis Kantoro dulkes, Kocho snaigę ir Hilberto kreivę

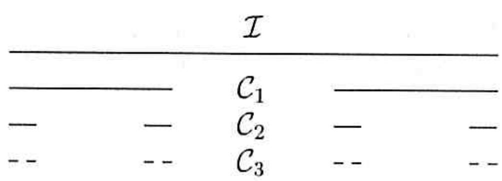
Vėl nagrinėkime vienetinį intervalą $\mathcal{I}$. Apibrėžkime du realiųjų skaičių tiesės atvaizdžius φ_1 ir φ_2 :

$$\varphi_1(\omega) = \frac{1}{3}\omega, \quad \varphi_2(\omega) = \frac{1}{3}\omega + \frac{2}{3}.$$

Pirmasis atvaizdis intervalą $\mathcal{I}$ tris kartus suspaudžia, antrasis – tris kartus suspaudžia ir pastumia į dešinę. Tegu

$$\varphi_1(\mathcal{I}) = \{\varphi_1(\omega) : \omega \in \mathcal{I}\}, \quad \varphi_2(\mathcal{I}) = \{\varphi_2(\omega) : \omega \in \mathcal{I}\},$$

$$\mathcal{C}_1 = \varphi_1(\mathcal{I}) \cup \varphi_2(\mathcal{I}).$$



12 brėž. Intervalas pavirsta į Kantoro dulkes

Tada aibę $\mathcal{C}_1$ sudaro du intervalai (žr. 12 brėž.). Pritaikykime atvaizdžius aibei $\mathcal{C}_1$:

$$\varphi_1(\mathcal{C}_1) = \{\varphi_1(\omega) : \omega \in \mathcal{C}_1\}, \ \varphi_2(\mathcal{C}_1) = \{\varphi_2(\omega) : \omega \in \mathcal{C}_1\}, \ \mathcal{C}_2 = \varphi_1(\mathcal{C}_1) \cup \varphi_2(\mathcal{C}_1).$$

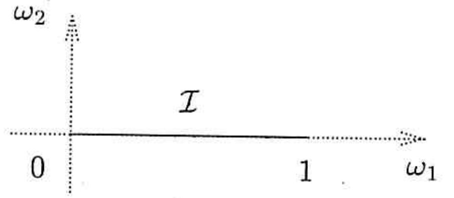
Tęskime intervalo $\mathcal{I}$ „trupinimą“ *ad infinitum*:

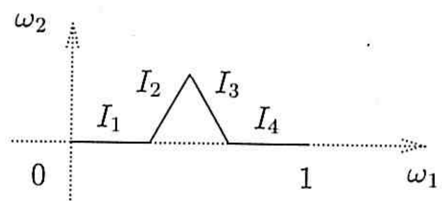
$$\varphi_1(\mathcal{C}_{n-1}) = \{\varphi_1(\omega) : \omega \in \mathcal{C}_{n-1}\}, \quad \varphi_2(\mathcal{C}_{n-1}) = \{\varphi_2(\omega) : \omega \in \mathcal{C}_{n-1}\},$$

$$\mathcal{C}_n = \varphi_1(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \varphi_2(\mathcal{C}_{n-1}).$$

Egzistuoja tam tikra aibė $\mathcal{C}$, prie kurios tam tikra prasme artėja aibės $\mathcal{C}_n$. Ši aibė ir vadinama *Kantoro dulkėmis.* Sąvokai „artėja“ galėtume suteikti tikslią matematinę prasmę. Tačiau tam prireiktų kelių gana abstrakčios matematikos puslapių! Tad pasitenkinkime nuojauta.

O dabar nagrinėkime plokštumą P , kurioje įvesta koordinačių sistema. Koordinates žymėsime ω_1, ω_2. Mūsų intervalas dabar „įsitaisęs“ abscisių ašies pradžioje (žr. 13 brėž.).





13 brėž. Kocho kreivės konstravimas

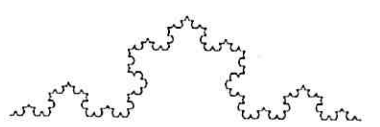
Nagrinėsime keturis plokštumos atvaizdžius: φ_1 suspaudžia plokštumą tris kartus, taigi intervalas $\mathcal{I}$ atvaizduojamas į I_1; φ_2 suspaudžią plokštumą, pasuka 60° kampu prieš laikrodžio rodyklę ir pastumia, kad $\mathcal{I}$ pereitų į I_2; panašiai veikia ir atvaizdžiai φ_1, φ_2, jie perveda intervalą atitinkamai į I_3, I_4. Sujungę vaizdus $\varphi_j(\mathcal{I}) = I_j = \{\varphi_j(\omega) : \omega \in \mathcal{I}\}$ gausime laužtę

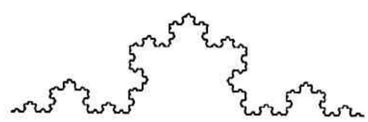
$$K_1 = \varphi_1(\mathcal{I}) \cup \varphi_2(\mathcal{I}) \cup \varphi_3(\mathcal{I}) \cup \varphi_4(\mathcal{I}),$$

sudarytą iš keturių dalių. Jungdami K_1 vaizdus, gautus pritaikius visus keturis atvaizdžius, gausime laužtę K_2 ir taip toliau:

$$K_n = \varphi_1(K_{n-1}) \cup \varphi_2(K_{n-1}) \cup \varphi_3(K_{n-1}) \cup \varphi_4(K_{n-1}).$$

14 brėžinyje pavaizduotos laužtės K_4, K_5. Didėjant n, laužtės K_n artėja prie tam tikros aibės, vadinamos *Kocho* kreive.* 4-ajame šio žurnalo puslapyje rasite iš trijų Kocho kreivės artinių sudarytą snaigę.





14 brėžinys. Kocho kreivės artiniai

* *Niels Fabian Helge von Koch,* (1870-1924) – švedų matematikas.

Atvaizdžius, naudotus Kocho kreivei sudaryti, galima užrašyti analiziškai. Taškų koordinates rašysime stulpeliu, tada taškų vaizdų koordinates galima skaičiuoti taip:

$$\varphi_1\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix},$$

$$\varphi_2\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\varphi_3\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix},$$

$$\varphi_4\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}.$$

Jeigu naudotume šitaip apibrėžtus atvaizdžius

$$\varphi_1\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix},$$

$$\varphi_2\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},$$

$$\varphi_3\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},$$

$$\varphi_4\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix},$$

tai riboje vietoje Kocho kreivės gautume Hilberto kreivę. Atvaizdžiai $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ atvaizduoja intervalą $\mathcal{I}$ į atkarpas OA, AB, BC, CD; taškų koordinatės yra tokios: $O(0;0), A(0;0,5), B(0,5;0,5), C(1;0,5), D(1;0)$.

Suprantama, kad taikant šį atvaizdžių metodą galima gauti ne tik čia aptartas, bet ir daugelį kitų kreivių ir aibių. Iš tiesų stovime prie *fraktalų* teorijos slenksčio. Bet šįsyk jo neperžengsime. Tačiau nusiskinkime ką nors atminčiai. Kad ir šitą fraktalinę šakelę: