Geniaus Strazdo akmenėliai iš begalybės pajūrio

Geometrijos teoremose kalbama apie bendrąsias kreivių, figūrų ir kūnų savybes. Dailininko paveikslas irgi yra teiginys apie sąryšius ir savybes, kurias turi šios ir tik šios kreivės ir figūros. Žiūrėdami į paveislą išgyvename jo geometrinių formų individualumą.

Panašiai galime žvelgti ir į skaičių santykius. Prisiminkime, kad S. Ramanudžanui kiekvienas natūralusis skaičius buvo ne beveidis begalinės aibės elementas, o „asmeninis draugas“, su tik jam būdingomis ypatybėmis. Tačiau skaičių lygybių gali prirašyti kiekvienas, mokantis skaičiuoti ir turintis kantrybės....

Dažnas iš Neringos pajūrio parsiveža atminčiai akmenėlių. Jų ten gyva galybė. Kas gi mus patraukia, kad pakėlę kartais akmenėlį nuo smėlio, jo nenumetame, bet pasiimame su savimi? Keistas geometrinis raštas, forma, simetrija, pasikartojantys motyvai....

Tas pats ir skaičių pasaulyje. Sunku atsispirti skaičių sąryšio, kuriame įžvelgiame savotišką geometrinę darną, žavesiui. Kad ir nebūdamas teorinio statinio dalimi, toks sąryšis yra žavus, lyg tas pajūrio akmenėlis.

Genius Strazdas surado daug tokių sąryšių. Įsižiūrėkime į juos. Patikrinkime. Tai nesunku. Tačiau juos reikėjo rasti, taigi leistis į kelionę begalybės pamariu.

Vilius Stakėnas

Genius Strazdas

Skaičiai ir skaitmenys

○• Reiškinys

$$1344^2 + 2023^2 + 5665^2 + 3202^2 + 4431^2$$

yra palindrominis, t. y. skaitydami jo skaitmenis tiek iš kairės į dešinę, tiek iš dešinės į kairę gauname tą pačią skaitmenų seką. Įdomu, kad šis reiškinys lygus kitam palindrominiam reiškiniui

$$1344^2+2023^2+5665^2+3202^2+4431^2 = 2235^2+3464^2+1001^2+4643^2+5322^2.$$

○• Ar yra skaitmuo A ir skaičiai a, b, kad galiotų $\overline{AAA} = a^2+b^2$, $A^3 = a^2-b^2$? Pavyzdys:

$$666 = 21^2 + 15^2, \quad 6^3 = 21^2 - 15^2.$$

○• Štai tikrai žavi aritmetinės progresijos

$$101,\ 202,\ 303,\ 404,\ 505$$

savybė:

$$101^2 + 202^2 + 303^2 = 142814, \quad 404^2 + 505^2 = 418241.$$

○• Dar viena simetriška lygybė su skaičių kvadratais

$$18^2 + 26^2 + 45^2 + 53^2 + 71^2 + 73^2 = 37^2 + 17^2 + 35^2 + 54^2 + 62^2 + 81^2.$$

○• Su palindrominiais reiškiniais jau susidūrėme. Palindrominiais skaičiais vadinsime tokius skaičius, kurių dešimtainės išraiškos skaitmenis skaitant tiek iš kairės į dešinę, tiek iš dešinės į kairę gaunama ta pati skaitmenų seka. Štai palindrominis skaičius lygus palindrominiam reiškiniui:

$$6116 = 7^2 + 53^2 + 3^2 + 57^2.$$

- Šios lygybės kairėje pusėje galima įžvelgti savotišką skaitmenų centrinę simetriją:

$$(2^7 + 3^6 + 4^5) + 1^8 + (5^4 + 6^3 + 7^2) = 2772 = 12 \times 11 \times 21.$$

- Dar viena lygybė su palindrominiais skaičiais. Lygybę $8P+1 = Q^2$ tenkina tokie palindrominiai skaičiai: $P = 66066, Q = 727$.
- Kubų sumavimo taisyklė, tačiau tik šiam atvejui:

$$2^3 + 3^3 + 4^3 = (3+3+3) \cdot (2+3+4).$$

- Lygtis sudėtingesnė, sprendinys paprastesnis. Ieškokime lygties $x^3+y^3 = 9$ natūraliųjų ir teigiamų racionaliųjų sprendinių. Nesunku pastebėti, kad $x = 1, y = 2$ (ir atvirkščiai) tinka šiai lygčiai. Daugiau natūraliųjų sprendinių nėra. Tačiau žinomi racionalieji sprendiniai. Pavyzdžiui,

$$x = \frac{415280564497}{348671682660}, \quad y = \frac{676702467503}{348671682660}.$$

Dabar panagrinėkime lygtį $x^3 + y^3 = 8001$. Šią lygtį irgi tenkina natūraliųjų skaičių pora: $x = 1, y = 20$. Šiek tiek netikėta, kad lygtis turi dar vieną paprastą sprendinį

$$x = 7\frac{1}{3}, \quad y = 19\frac{2}{3}.$$

- Po tris senovės Lietuvos istorines datas kiekvienoje lygybės pusėje:

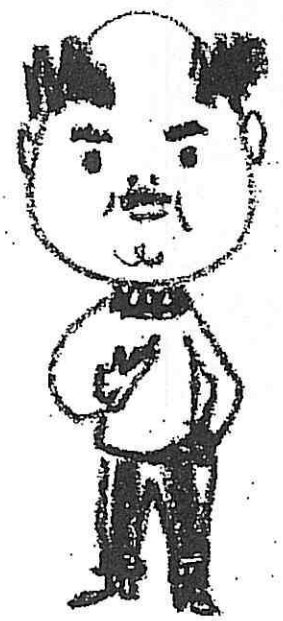
$$1236^2 + 1347^2 + 1386^2 = 1260^2 + 1299^2 + 1400^2.$$

Po Alfa × omega Skliautais

Dabar madinga steigti užeigas ir kavines. Steigiame kavinę ir mes. Tai matematikų kavinė, kviečiame užsukti. Įėjimas nemokamas, aptarnavimas malonus. Tik viena sąlygėlė: atsineškite savo istoriją. Ji gali būti be pradžios ir be pabaigos, netgi be moralo. Tačiau nors su trupučiu matematikos. Kad visi lankytojai šią mūsų sąlygą žinotų, pakabinome užrašą:

Papasakok matematinę istoriją!

• • ○ • •



Daktaras Matas

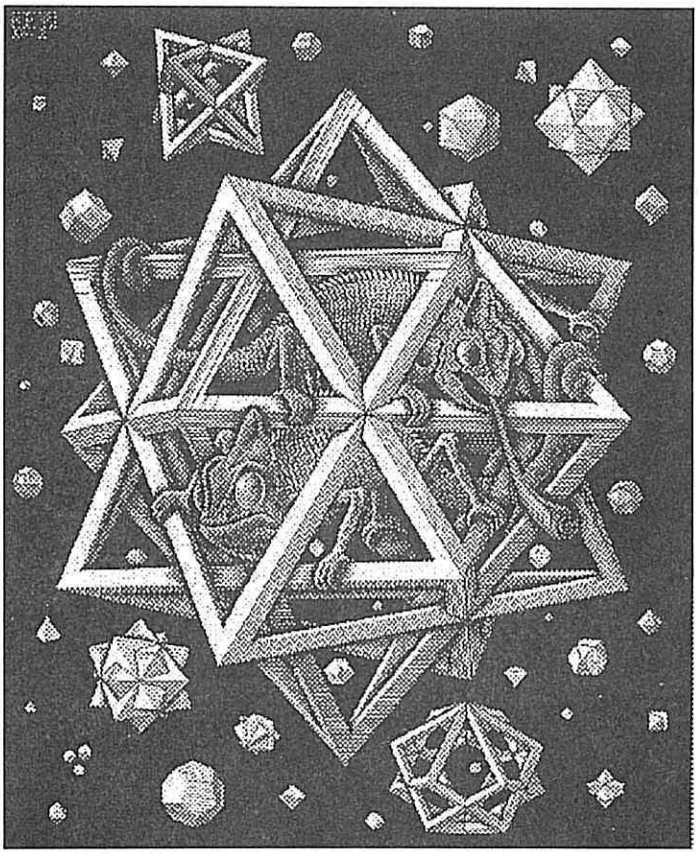
Doktorantas Darius

Čia mūsų kavinės šeimininkas. Jis ne tik šeimininkas, jis yra tikras matematikas. Vadinsime jį tiesiog daktaru Matu. Štai ir pirmasis lankytojas. Jį vadinsime doktorantu Darium. Įeina, žvalgosi. Patalpa dar ne visai sutvarkyta. Pasisiūlo padėti pakabinti paveikslą.

Štai ir antrasis lankytojas. Tai profesorius Antanas. Stebi paveikslo kabinimo sceną. Ji jam primena plačiai spaudoje komentuotą paveikslo kabinimo istoriją Arvydo Sabonio namuose Portlende. Pagaliau paveikslas pakabintas. Reikia dar įsukti elektros lemputę. Profesorius Antanas pasisiūlo padėti.

– Ne, ne ir dar kartą ne!, – energingai pareiškia trečioji lankytoja docentė Odeta.

– Iš pradžių problemą reikia išspręsti teoriškai. Visi praktiniai taikymai tik vėliau! **Keli matematikai gali įsukti vieną elektros lemputę?**



`M. C. Ešeris. Žvaigždės.`
Šis paveikslas buvo pakabintas ant kavinės sienos.

Visi susimąsto.

– Panagrinėkime iš pradžių atskirus atvejus, – sako doktorantas Darius.

– Bendruoju atveju uždavinys per sunkus.

– Dviejų skaičių teorijos specialistų turėtų užtekti, – pareiškia daktaras Matas. – Jie galėtų tai atlikti matematinės indukcijos metodu. Vienas patikrintų indukcijos bazę, kitas atliktų indukcijos žingsnį.

••• $\alpha + \omega$ •••

Profesorius Antanas

Docentė Odeta

– Ir lemputė niekada nebūtų įsukta, – prieštarauja docentė Odeta. – Nes indukcijos bazė niekada nebūtų patikrinta, kadangi „*tai trivialu*".

Profesorius Antanas pareiškia, kad tuo labiau su šiuo darbu nesusidorotų logikai. Tačiau jie galėtų pateikti formalų įrodymą, kad sprendinys egzistuoja.

Doktarantas Darius pastebi, kad nuo to pradėtų ir matematinės analizės specialistai. Jų reikėtų trijų: vienas įrodytų, kad sprendinys egzistuoja, kitas – kad jis yra vienintelis, o trečiasis sukonstruotų nekonstruktyvų algoritmą.

– Ar norite išgirsti, kaip sprendimą formuluotų N. Burbaki šalininkai? – sako daktaras Matas.

– Jų sprendimas skambėtų maždaug taip: *Lemputės įsukimas yra elektros instaliacijos sistemos priežiūros atskirasis atvejis. Ieškodami reikiamų asmenų skaičiaus apatinio ir viršutinio rėžių, turime patikrinti, ar patenkintos 2.1 lemos bei 3.11.25 išvados sąlygos. Jeigu jos patenkintos, tai rezultatą gausime pritaikę 3.112.3 skyriaus teoremas. Viršutinis rėžis galioja abstrakčioje mačioje erdvėje, kurioje įvesta silpna w^*-topologija.*

– Vienas matematikos studentas galėtų įsukti lemputę, – pastebėjo docentė Odeta. – Tačiau jis negalėtų paaiškinti, ką padaręs.

– Vienas profesorius taip pat galėtų, – tarė profesorius Antanas. – Tačiau tik kartu su bendradarbiais, doktarantais ir tik gavęs grantą.

– To niekada nepadarytų klasikinės geometrijos specialistas, – pareiškė daktaras Matas. Kadangi to neįmanoma padaryti naudojant tik skriestuvą ir liniuotę.

••• $\alpha + \omega$ •••

Mokytoja Liucija

– Man atrodo, – kukliai įsiterpė ketvirtoji lankytoja, matematikos mokytoja Liucija, – uždavinys suformuluotas pernelyg abstrakčiai. Pabandykime jam suteikti sąlyginio uždavinio formą: jeigu vienas matematikas gali įsukti lemputę per a valandų, o kitas per b, tai per kiek valandų jie įsuks lemputę dirbdami drauge?

Visi nutilo ir susimąstė. Tuo metu į kavinę įėjo Mindaugas Bloznelis ir perskaitęs mūsų užrašą papasakojo tokią istoriją:

– Maskvos Fizikos ir technikos instituto studentų bendrabučiai stovi Pamaskvėje. Kadangi studentai gyvena vietinio jaunimo interesų zonoje, natūralu, kad tarp jų ir vietinių jaunuolių nuolat kyla konfliktų. Kartą vienas studentas grįžo į bendrabutį apdovanotas mėlynėmis. Jo draugai nutarė reaguoti į incidentą ir suformavo smogiamąjį būrį. Tačiau kaip atskirti studentus nuo vietinių, juk studentų Pamaskvėje daug? Buvo nutarta visų sutiktųjų klausti: „*Kam lygi funkcijos $y = x^2$ pirmykštė?*“ Jeigu neatsakai – esi vietinis. Dabartinis Maskvos universiteto docentas V. Senatovas prisimena, kad atsakymas „*iks kubu*“ nebuvo užskaitomas. Reikėdavę pateikti tikslų atsakymą:

$$\frac{1}{3}x^3 + C.$$

Visi lankytojai sutiko, kad elgtasi labai išmintingai.

Pokalbį užrašė atidus mūsų skaitytojas
Vytautas Gylys

Lankytojus nupiešė mūsų dailininkas
Jaroslavas Rakickis

••• $\alpha + \omega$ •••