Audiatur...

• • • ○ • • •

A, niekad viskas nebūna vien tik gerai arba vien tik blogai! Reikia diskutuoti, kad atskirtum viena nuo kita.

Mūsų žurnalas mielai suteiks žodį gincininkams. Bet visad abiem pusėm! Žurnalo leidėjai norėtų, kad ir jų darbą kritikuotų. Kas kritikuoja, tam rūpi. Kam rūpi, tas ateis į talką.

Šįkart skelbiame nuomonę apie vieną mūsų žurnalo straipsnį.

• • • ○ • • •

Ar nesuglums mokiniai?

Perskaičiau A. Apynio, E. Gaigalo ir E. Stankaus straipsnį „Stojamasis matematikos egzaminas Vilniaus universitete". Žinoma, jis pravers stojančiajam informacijos požiūriu. Vis dėlto skaitydamas straipsnį mokinys (ir mokytojas) tikriausiai ne kartą suglums.

Negerovių yra uždavinių sąlygose: 9601–7 ir 9602–7 uždaviniuose lygties šaknys vadinamos sprendiniais, T–4 uždavinyje kalbama ne apie skersmenį, o apie apskritimo diametrą, 9602–7 uždavinyje siūloma skaičių intervale $[0, \pi/2]$ ieškoti ... laipsnių. 9602–1 uždavinyje mokinys gali suabejoti, kaip skaičiuojamos palūkanos: ar nuo visos paskolos sumos, ar nuo negrąžintos paskolos dalies, ar dar ir nuo palūkanų. Be to, kai firma grąžins skolą baigiantis terminui (kol palūkanos dar nepriskaičiuotos!), reikės jai ar nereikės mokėti palūkanas už trečius metus? O užtektų sąlygą „apsukti": firma pasideda pinigus, gauna palūkanas, ir jokių neaiškumų nekiltų (žinoma, rašyti reikia ne baigiantis terminui, o pasibaigus). Situacija su šiuo uždaviniu primena situaciją su garsiuoju brandos atestato egzaminų tapetų uždaviniu, tik ten visi atsakymai buvo pripažinti teisingais, o čia kompiuteris „žino" tik vieną. Egzaminui sąlyga turi būti padaryta kuo aiškesnė, kad mokinys nespėliotų, kas turima galvoje. Jei to nepavyksta padaryti – tokio uždavinio verčiau atsisakyti.

Be reikalo nepateikti uždavinių atsakymai – mokinys praranda galimybę pasitikrinti. Daug abejonių kelia patarimai, kaip spręsti uždavinius: jie tiesiog pernelyg kategoriški, kartais visai nereikalingi.

• • • $\alpha + \omega$ • • •

- *Trigonometrinės lygties sprendimas iš esmės remiasi papildomo kampo panaudojimu.*

Visų pirma, čia supainiotos *pagalbinio* ir *papildomojo* kampo sąvokos. Antra, dažnas mokinys net nežino tokio pavadinimo – pagalbinis kampas. Trečia, ką reiškia iš esmės naudoti pagalbinį kampą, kai lygtį 9601–7 sprendžiame taip:

$$\sqrt{2}\cos(8x+15^\circ)=\sin(4x-60^\circ)-\cos(4x-60^\circ),$$
$$\sqrt{2}\cos(8x+15^\circ)=\sin(4x-60^\circ)-\sin(150^\circ-4x),$$

$$\sqrt{2}\cos(8x+15^\circ)=2\sin(4x-105^\circ)\cos 45^\circ,$$
$$\cos(8x+15^\circ)=\sin(4x-105^\circ)?$$

Suprantama, lygtį 9607–7 geriausia spręsti įsivedant „pagalbinį" kampą,

$$\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-2\sin x=0,$$
$$1/2\cdot\cos 2x+\sqrt{3}/2\cdot\sin 2x-\sin x=0,$$
$$\sin(30^\circ+2x)-\sin x=0$$

ir t. t., bet tai visai nereiškia, kad neįmanoma jos išspręsti kitaip. Pavyzdžiui, galima kampus $2x$ ir x pakeisti kampais $3x/2$ ir $x/2$

$$\cos(3x/2+x/2)+\sqrt{3}\sin(3x/2+x/2)-2\sin(3x/2-x/2)=0,$$

po to kairę pusę išskleisti ir išskaidyti

$$[\cos 3x/2-(2-\sqrt{3})\sin 3x/2][\cos x/2+(2+\sqrt{3})\sin x/2]=0$$

ir gauti lygtis

$$\mathrm{tg}3x/2=2+\sqrt{3}\ (=\mathrm{tg}75^\circ),\quad \mathrm{tg}x/2=\sqrt{3}-2\ (=\mathrm{tg}(-15^\circ)).$$

Čia, beje, iškyla ir toks klausimas; kaip bus įvertintas mokinys, nurodęs (absoliučiai teisingą) atsakymą $x=2/3\cdot\mathrm{arctg}(2+\sqrt{3})$.

- *Kalbant apie 9601–8 uždavinį sakoma, kad lygčių*

$$x^2+(a+1)x=a+2,\quad \text{ir}\quad (a+1)(x-1)^2+3(x-1)=0,$$

turinčių bendrą šaknį $x=1$, „antrosios šaknys turi būti lygios:

$$(a-2)/(a+1)=-a-2.$$

Iš čia gauname $a = 0, a = -4$.“

Deja, jei truputį pakeistume pirmąją lygtį ir nagrinėtume lygtis

$$x^2 + (a-1)x = a, \quad \text{ir} \quad (a+1)(x-1)^2 + 3(x-1) = 0,$$

turinčias bendrą šaknį $x = 1$, tai receptas „antrosios šaknys turi būti lygios“ vestų į pražūtį: lygties $(a-2)/(a+1) = -a$ šaknys yra $a = -1 \pm \sqrt{3}$, o iš tikrųjų pakeistojo uždavinio atsakymas yra $-1-\sqrt{3}, -1, -1+\sqrt{3}$.

Spręsti egzamino uždavinį paprasčiausia taip:

Kadangi $x = 1$ yra antros lygties šaknis, tai tikriname, ar ji tenkina pirmą lygtį. Pasirodo, kad taip yra su visomis parametro reikšmėmis. Bet tada pagal Vijeto teoremą pirma lygtis turi šaknį $-2-a$ (tik nedera jos vadinti antrąja – šaknys gali sutapti!). Kadangi $-2-a$ turi tenkinti antrą lygtį, tai

$$(a+1)(-3-a)^2 + 3(-3-a) = 0.$$

Iš čia $a = -3, a = 0$ ir $a = -4$ (tai tik būtina sąlyga). Kai $a = -3$, tai antros lygties šaknis $2,5$ netinka pirmai lygčiai ir lygtys neekvivalenčios. Kai $a = 0$ ar $a = -4$, tai lygčių šaknys tos pačios (beje, ir pačios lygtys suprastinus sutampa). Taigi lygtys ekvivalenčios, kai $a = 0$ ir $a = 4$.

- *Sprendžiant 9601–9 uždavinį, reikia remtis teiginiu: jei trapecijos įstrižainės lygios, tai trapecija lygiašonė. Stojantieji turėjo pateikti šio teiginio įrodymą.*

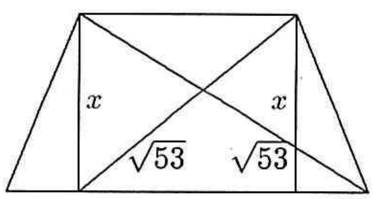
Tai netiesa – mokinys gali spręsti, kaip tik nori. Ir iš tikrųjų dar lengviau uždavinį išspręsti nesiremiant tuo teiginiu. Jei jau stojantysis nesiremia minėtu teiginiu, tai juo labiau neprivalo jo įrodinėti.

9601–9 uždavinys skamba taip:

Trapecijos plotas lygus 14, o jos įstrižainės – po $\sqrt{53}$. Raskite trapecijos aukštinę, jei žinoma, kad ji ilgesnė už įstrižainę.

Uždavinį galima spręsti taip:

Iš abiejų viršutinio pagrindo galų išvedame aukštines. Pasižymėkime aukštinės ilgį x.



••• $\alpha + \omega$ •••

Aišku, kad abiejų ilgio $\sqrt{53-x^2}$ atkarpų suma lygi trapecijos pagrindų sumai, todėl trapecijos plotas

$$1/2 \cdot 2\sqrt{53-x^2} = 14, \quad x^2(53-x^2) = 14^2,$$

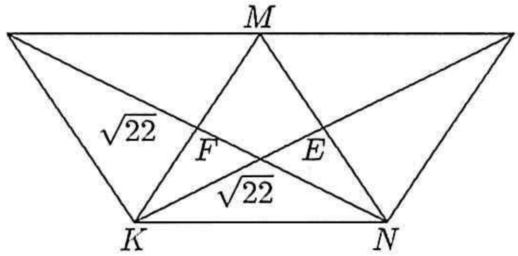
taigi $x^2 = 4$ arba $x^2 = 49$. Kadangi pagal sąlygą $53-x^2 < x^2$, tai $x^2 = 49, x = 7$. Ir nieko įrodinėti nereikia!

- *9602–9 uždavinio sprendimas remiasi teiginiu: jei trikampio pusiaukraštinės lygios, tai trikampis lygiašonis. Tą teiginį reikėjo įrodyti.*

9602–9 uždavinys yra toks:

Trikampio KMN kraštinė KM lygi 4, o pusiaukraštinės KE ir NF – po $\sqrt{22}$. Raskite kraštinės KN ilgį.

Net sprendžiant uždavinį standartiniu metodu – papildant trikampį iki lygiagretainio – nieko įrodinėti ar remtis minėtu teiginiu nereikia.



Pasižymėję ieškomąją kraštinę x, iš dešiniojo lygiagretainio randame, kad įstrižainės MN kvadratas yra $x^2 + x^2 + 4^2 + 4^2 - (2\sqrt{22})^2$. Tada iš kairiojo lygiagretainio

$$2x^2 + 2(2x^2 + 2 \cdot 16 - 88) = 4^2 + (2\sqrt{22})^2$$

ir $x = 6$.

Suprantama, minėtus straipsnio netikslumus nesunku ištaisyti. Tai reikia daryti laiku.

Juozas Mačys

... et altera pars

Pirmiausia norėtume padėkoti kolegai Juozui Mačiui už pastabas. Tenka apgailestauti, kad šiame straipsnyje autoriams nepavyko išvengti trūkumų. Iš tikrųjų vietoje „papildomas kampas" komentuojant 9601–7 uždavinio sprendimą labiau tiktų „pagalbinis kampas". Aptariant planimetrijos uždavinius (9601–9 ir 9602–9) pasakymas „reikia remtis teiginiu", aišku, per daug kategoriškas. Derėjo rašyti „galima remtis teiginiu". Čia pat pastebėkime, kad beveik visi stojantieji šiuos uždavinius sprendė remdamiesi straipsnyje minimais teiginiais. Todėl juos ir akcentavome.

Su kai kuriais kitais J. Mačio priekaištais nenorėtume sutikti. Abiturientams juk žinoma, kad lygties sprendinio sąvoka yra bendresnė už šaknies sąvoką, kad apskritimo skersmuo gali būti vadinamas ir diametru. Uždavinių sąlygas, žinoma, galima tobulinti, tačiau stojantiesiems egzamino metu dėl jų neaiškumų nebuvo.

Analizuodami lygčių ekvivalentumo uždavinius, straipsnio autoriai neturėjo tikslo pateikti bendrą tokių uždavinių sprendimo receptą, o tik apžvelgė egzamino uždavinių 9601–8 ir 9602–8 vieną sprendimo būdą.

Antanas Apynis
Edmundas Gaigalas
Eugenijus Stankus