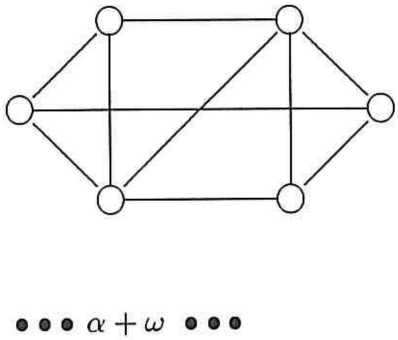
Uždaviniai

Steigiame dar vieną uždavinių skyrelį. Jame skelbsime loginius uždavinius, matematines mįsles, sąmojo uždavinius. Skyrelio simbolis – raidelė ε (epsilon) – reiškia, kad jiems išspręsti pakaks labai nedaug matematinių žinių. Yra dar ir kitas prasmės atspalvis. Įžymusis matematikas P. Erdiošas „epsilonais" vadino moksleivius, tik pradedančius savo matematinį kelią. Kas studijavo matematinę analizę, tas žino: nors epsilonai yra labai maži dydžiai, tačiau labai labai svarbūs!

ε.1 Vienoje dvigubo lapo pusėje atspausdintas 6–asis ir 19–asis laikraščio puslapiai. Kiek iš viso puslapių turi tas laikraštis?

ε.2 Kvadratinio kambario grindys išklotos vienodomis kvadratinėmis plytelėmis. Pagal abi įstrižaines kartu paėmus paklotos 125 plytelės. Kiek plytelių sunaudota visoms grindims?

ε.3 Į skrituliukus įrašykite skaičius $1, 2, 3, 4, 5, 6$ taip, kad jokia pora $j, j+1$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ nebūtų sujungta viena atkarpa.

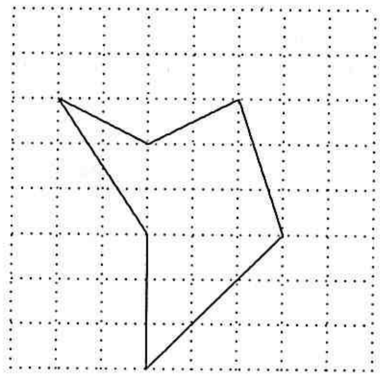


$\varepsilon.4$

Vienas septintokas du trijų dienų savaitgalio vakarus paeiliui norėtų praleisti pas draugus. Pagal šeimoje galiojančią taisyklę septintokas prašo mamos arba tėvo leidimo išeiti vakare, ir jos (jo) žodis yra galutinis. Paprastai tėvas dažniau leidžia negu mama. Kita vertus, nei mama, nei tėvas neduoda leidimo dviems vakarams iš eilės. Kurio iš tėvų septintokas turėtų prašyti leidimo pirmiausia, kad jo norui du vakarus paeiliui praleisti pas draugus būtų daugiausia galimybių išsipildyti?

$\varepsilon.5$

Julius ir Paulius gavo nuskusti po vienodą skaičių bulvių. Kiekvienas nuskuta vieną bulvę per minutę. Tačiau Paulius, nuskutęs bulvę, pasiima iš savo krūvos dvi bulves: vieną pradeda skusti, o kitą nemačiomis permeta į Juliaus krūvą. Po tam tikro laiko Juliaus krūva pasidarė dvigubai didesnė už Pauliaus. Dar po penkių minučių bulvių santykis Juliaus ir Pauliaus krūvose pasidarė 7 : 3. Kada santykis pasidarys 3 : 1 ir Julius pagaliau pastebės apgavystę? Po kiek bulvių jie buvo gavę skusti?



Ar galite greitai surasti šios figūros plotą?

Piko teorema. *Jeigu uždaros laužtės viršūnės yra kvadratinės gardelės taškuose, tai laužtės ribojamos figūros plotas lygus*

$$n + \frac{m}{2} - 1,$$

čia n yra gardelės taškų, esančių figūros viduje, o m – gardelės taškų, esančių ant laužtės, skaičius.

$\bullet\bullet\bullet\ \alpha + \omega\ \bullet\bullet\bullet$

• • • ○ • • •

Skyrelį tvarko **Giedrius Alkauskas**

Uždavinius, kuriuos šįkart skelbiame, sprendė 47-osios Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados dalyviai Druskininkuose. α.54 – α.58 uždavinius sprendė dešimtųjų, α.59 – α.63 bei α.64 – α.68 - vienuoliktųjų ir dvyliktųjų klasių mokiniai. Primename, kad galite mums siųsti tiek naujus uždavinius, tiek jau paskelbtų uždavinių sprendimus. Teisingus ir gražius sprendimus spausdinsime.

• • • ○ • • •

α.54 Ar galima kvadratą 5×5 visiškai uždengti trimis kvadratais 4×4 ? Ar galima jį visiškai uždengti trimis kvadratais $3,5 \times 3,5$?

α.55 Įrodykite, kad jei a, b, c yra teigiamieji skaičiai ir

$$ab + bc + ca > a + b + c,$$

tai $a + b + c > 3$.

α.56 Iš taisyklingojo penkiakampio viršūnių kaip iš centrų nubrėžti 5 apskritimai, kurių spinduliai lygūs pusei kraštinės. Po to nubrėžtas stačiakampis, kurio viena kraštinė liečia du apskritimus, o kitos – po vieną. Kuri stačiakampio kraštinė ilgesnė?

α.57 Raskite visų natūraliųjų skaičių trejetus $(a, b, c), a < b < c$, tenkinančius lygybę

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2.$$

α.58 Natūralųjį skaičių x padauginus iš 2^{11}, gautas vienualikaženklis skaičius, kurio kiekvienas skaitmuo yra arba 1, arba 2. Raskite skaičių x.

••• $\alpha + \omega$ •••

α.59 Skaičių $x^2 + 32y^2$ (čia x, y yra sveikieji skaičiai) aibę pažymėkime S. Įrodykite: jei $n \in S$, tai ir $97 \cdot n \in S$.

α.60 Trikampio kraštinės lygios $5, 12, 13$. Kiek yra tiesių, dalijančių pusiau šio trikampio ir perimetrą, ir plotą?

α.61 Funkcija $f(x)$, apibrėžta realiųjų skaičių aibėje, tenkina tokias sąlygas:

1) $f(x + y) = f(x)f(y)$ su visais x ir y;

2) yra vienintelis toks skaičius x_0, kad $f(x_0) = \sqrt{2}$. Įrodykite, kad iš lygybės $f(a) = f(b)$ išplaukia $a = b$.

α.62 Išspręskite lygtį

$$x^2 - 4 = \sqrt{x + 4}.$$

α.63 Panaikinkite iracionalumą vardiklyje:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8} + 2}.$$

α.64 Plokštumoje yra trikampis ir trys stačiakampiai su lygiagrečiomis kraštinėmis. Stačiakampiai uždengia visas trikampio kraštines. Įrodykite, jog jie uždengia ir visą trikampį.

α.65 Plokštumoje yra d tiesių. Taškų, kuriuose susikerta bent trys tiesės, skaičių pažymėkime t. Įrodykite, kad

$$t \leq \frac{d(d-1)}{6}.$$

α.66 Duota 40 natūraliųjų skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_{40}$, ne didesnių už 1997. Žinoma, jog bet kurių dviejų skaičių a_i ir a_j mažiausias bendrasis kartotinis yra didesnis už 1997. Įrodykite, jog

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{40}} < 1.$$

• • • $\alpha + \omega$ • • •

$\alpha.67$ Raskite reiškinio $x + y + z - xy - xz - yz$ mažiausią ir didžiausią reikšmę, kai $0 \leq x, y, z \leq 1$, ir nurodykite visus trejetus (x, y, z), su kuriais jos įgyjamos.

$\alpha.68$ Plokštumoje yra 100 taškų, iš kurių jokie trys nėra vienoje tiesėje. Per du taškus einančią tiesę vadiname *mediana*, jei abiejose tiesės pusėse yra po lygiai taškų. Kiek mažiausiai medianų gali turėti tokia sistema? Pateikite pavyzdį, kai tas skaičius pasiekiamas.

> Matematiko kūriniai, kaip tapytojo arba poeto, turi būti gražūs; idėjos, kaip spalvos arba žodžiai, turi harmoningai jungtis. Grožis yra pirmasis išbandymas, negrabi matematika pasaulyje neišlieka.
>
> *G. H. Hardy*

Skyrelį tvarko **Artūras Dubickas**

Baigiantis tūkstantmečiui žmonės gręžia savo žvilgsnį atgal. Kas buvo prieš šimtą metų, prieš penkis šimtus, prieš tūkstantį? Ar visur esame pranašesni už pirmtakus? Nagi pažiūrėkime, ar įstengtų mūsų matematikos studentai išspręsti prieš beveik šimtą metų vykusių matematinės analizės egzaminų uždavinius. Tiesa, tuos uždavinius sprendė Oksfordo universiteto studentai... Uždaviniai paimti iš knygos:

Hardy G. H. A course of pure mathematics. Oxford, 1945.

ω.14 Tegu skaičius n dalijasi iš 3. Raskite sumą

$$\frac{x}{2!(n-2)!}+\frac{x^2}{5!(n-5)!}+\frac{x^3}{8!(n-8)!}+\ldots+\frac{x^{n/3}}{(n-1)!}.$$

(1898)

ω.15 Įrodykite, kad

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\arccos\sqrt{\frac{\cos 3\theta}{\cos^3\theta}}\right\}=\sqrt{\frac{3}{\cos\theta\cos 3\theta}}.$$

(1904)

ω.16 Kokiu keitiniu integralas

$$\int\frac{dx}{(x+a)^{3/2}+(x-a)^{3/2}}$$

suvedamas į tiesinės-trupmeninės funkcijos integralą? (1899)

••• $\alpha+\omega$ •••

ω.17

Nubrėžkite kreivę

$$2\phi = \frac{a}{\rho} + \frac{\rho}{a},$$

įrodykite, kad plotas, kurį riboja spindulys $\phi = \beta$ ir dvi kreivės šakos, besiliečiančios taške $\rho = a, \phi = 1$, lygus $(2/3)a^2(\beta^2 - 1)^{3/2}$. (Kreivės lygtis duota polinėje koordinačių sistemoje.) (1900)

ω.18

Raskite didžiausiąjį smailųjį kampą, kuriuo elipsė

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kertasi su koncentriniu apskritimu. (1900)

ω.19

Įrodykite, kad didžiausio lygiašonio trikampio, kuris eina per taškus A, B, C plotas lygus

$$2\Delta + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}},$$

čia a, b, c yra $\triangle ABC$ kraštinės, Δ – šio trikampio plotas. (1898)

ω.20

Ištirkite eilutės

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin(n\theta + \alpha)}{n}$$

konvergavimą. Čia θ, α yra realieji skaičiai. (1898)

ω.21

Žaidėjas mėto simetrišką monetą. Jeigu iškrenta herbas, jis gauna vieną tašką, jei moneta – du taškus. Žaidimas tęsiamas, kol surinktų taškų suma neviršija n. Įrodykite, kad tikimybė surinkti n taškų lygi

$$\frac{1}{3}\left\{2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right\}.$$

(1898)