Aleksandras Baltrūnas

Beieškant absoliuto

Šis straipsnis yra ištrauka iš autoriaus parašytos knygos „Begalybės biografija“. Autorius ieško rėmėjų, galinčių padėti išleisti šią knygą.

Kas yra matematika?

Atsakyti į šį klausimą nėra taip paprasta, kaip gali atrodyti iš pirmo žvilgsnio. Tiesa, galima pasakyti, kad matematika – tai aritmetika, geometrija, analizė ir t.t. Deja, šis kelias nėra patikimas – jis tik nuves mus į šalį, savotiškai paklaidindamas matematinių disciplinų „miške“. Juk taip ir lieka neaišku, kodėl, pavyzdžiui, aritmetika ar geometrija yra matematika. Tad klausimas, kas yra matematika, nėra toks jau paprastas. Ir jei net mes prie apvaliojo stalo sukviestumėme žymiausius visų laikų pasaulio matematikus, nedaug ką laimėtumėme. Pitagoras sugėdintų mus, kodėl nežinome, iš kur kilęs žodis „matematika“. Juk graikiškai *„mathematike“*, *„mathema“*, *„mathesis“* reiškia „žinojimas, pažinimas“. O Platonui matematika tilpo į geometrijos rėmus. Ar ne todėl jis virš savo Akademijos durų ir pakabino reikalavimą: „Teneįžengie čionai tas, kas nemoka geometrijos.“ Su juo nesutiktų ankstyvųjų viduramžių arabų mokslininkas, kuriam matematika – tai *„al-gabr“*, t.y. algebra. O matematinės analizės kūrėjas G. Leibnicas matematiką apibūdino kaip mokslą apie funkcijas.

Tad kad ir kaip būtų keista, pats tiksliausias mokslas neturi tikslaus apibrėžimo. O gal tai ir gerai? Juk kiekvienas šis apibrėžimas nusako tą matematikos turinio dalį, kuri tuomet buvo aktualiausia ir labiausiai nagrinėjama. Laikui bėgant, matematikos turinys keitėsi, tad ir turėtas apibrėžimas pasirodydavo esąs per siauras. Pateikti galutinį matematikos apibrėžimą, vadinasi, apgenėti šio amžinai žaliuojančio ir kerojančio mokslo medžio šakas, iš anksto pasmerkiant jį vienpusiškai augti. Bet vis dėlto turi būti kažkas bendra, kas jungia aritmetiką, geometriją, analizę. Kas šis pamatas, ant kurio statomas matematikos rūmas?

Nuo seno išsiskyrė dvi matematikos atšakos – aritmetika ir geometrija. Pirmoji nagrinėjo skaičius, antroji – figūras. Skirtingai čia pasireikšdavo ir begalybės idėja. Aritmetikoje ji buvo įkūnyta natūraliųjų skaičių sekos begalybėje, o geometrijoje – erdvės begalybėje ir, be to, galimybėje neaprėžtai dalyti figūrą į dalis. Pirmasis, kuris nepanoro taikstytis, kad matematika susidėtų iš dviejų skirtingų dalių, buvo Pitagoras. Paskelbęs, kad „skaičius yra visa ko esmė“, jis manė sujungsiąs aritmetiką ir geometriją skaičiaus pagrindu. Deja, kaip žinome, šios pastangos buvo bevaisės. Jos tik atvėrė duris pirmajai matematikos pagrindų krizei ir jos išdavai – matematikos geometrizavimui. Nenuostabu – nors diskretųjį dydį kur kas lengviau logiškai analizuoti, tolydumas geriau aprėpiamas mūsų intuicija. Tad Pitagoras pasiekė visai priešingų rezultatų, negu tikėjosi. Kaip išdavą iš tų laikų mes turime tokius pasakymus: skaičiaus kvadratas, skaičiaus kubas ir pan. Po antikos civilizacijų žlugimo matematikos centras persikėlė į arabų šalis. Tačiau žemės matavimas (toks pažodinis „geometrijos" vertimas iš graikų kalbos) nelabai jaudino klajoklius arabus. Ar bereikia stebėtis, kad kaip tik ten suklestėjo algebra? Žaidimą su figūromis užmiršti taip pat skatino iš indų perimta pozicinė skaičiavimo sistema, atvėrusi neribotas galimybes skaičiavimams. O po kelių šimtmečių skaičiavimas su raidėmis įsigali ir Europoje. Trečiojo bei ketvirtojo laipsnio lygčių išsprendimas suteikė galimybę algebrai jaustis pilnaverte su aritmetika ir geometrija. Taip vietoje dviejų matematikos šakų atsiranda trys. Atrodo, sujungti jas jau beveik nebelieka vilčių. Ir štai tuomet R. Dekartas tarsi skęstantis griebiasi šiaudo – jis pasiūlo tokį matematikos apibrėžimą: „Kiekvienas, geriau pagalvojęs, supras, kad matematikai priskiriami tik tie mokslai, kurie nagrinėja arba tvarką, arba matą, ir visiškai nesvarbu, ar šis matas bus ieškomas skaičiams, figūroms, žvaigždėms, garsams ar kokiam nors kitam dalykui". [1] Deja, ir R. Dekarto pastangos susilaukė priešingų rezultatų – jo darbų dėka naujų jėgų įgavo matematinė analizė. Matematikos šakų dar pagausėjo.

Todėl galima įsivaizduoti matematikų džiaugsmą, kai XIX a. matematinė analizė buvo pagrįsta. Šis džiaugsmas dar labiau sustiprėjo, kai loginis pagrindas buvo sukurtas ir realiųjų skaičių teorijai. Galbūt tuomet kai kurių matematikų širdyse ir suspurdėjo viltis – o ką, jei mes visą matematiką imsime ir aritmetizuosime. B. Paskaliui priklauso tokie žodžiai: *Tout ce qui passe la Geometrie nous passe* (Visa, kas atsiduria už geometrijos ribų, atsiduria už mūsų supratimo ribų). XIX a. matematikai šį posakį perfrazavo taip: *Tout ce qui passe l'Arithmetique nous passe* (Visa, kas atsiduria už aritmetikos ribų, atsiduria už mūsų supratimo ribų). Kad šis posakis tikrai būtų teisingas, atrodė, reikėjo visai nedaug – tik aritmetizuoti geometriją. Juk geometrija nuo seno matematikams nekėlė pasitikėjimo. Dar B. Bolcanas rašė: „Nepakenčiamas gero metodo pažeidimas yra tai, kad grynosios (arba bendrosios) matematikos (t.y. aritmetikos, algebros arba analizės) tiesas norima išvesti iš samprotavimų, kurie priklauso tik taikomajai (arba dalinei) jos šakai, būtent – geometrijai". [2] Ir štai tuomet, kai matematikams atrodė, kad iki jų išsvajoto tikslo tik ranką paduok, atsitiko nenumatyta – buvo sukurtos neeuklidinės geometrijos. Ilgus amžius matematikai stengėsi įrodyti V Euklido postulatą. Tačiau tik N. Lobačevskiui, J. Bojajui ir K.F. Gausui šį postulatą pakeitus jam priešingu teiginiu, pavyko atrasti kažkokios naujos geometrijos savybes. Geometrijos, kurios teiginiai nors ir nesutapo su euklidinės geometrijos teiginiais, buvo patikimi, nes jų įrodymai

[1] *Dekartas R.* Rinktiniai raštai. Vilnius: Mintis. 1978. P. 35.

[2] *Кольман Э.* Бернард Больцано. М.: Изд. АН СССР, 1955. С. 171.

buvo nepriekaištingi ir niekuomet nekildavo prieštaravimų. Šią geometriją imta vadinti neeuklidine. Taip vietoje vienos teisinga laikytos geometrijos atsirado daug ne ką mažiau teisingų geometrijų. Tačiau kaip suprasti šį teisingumą? Juk tas pats objektas įvairiose geometrijose gali būti apibūdinamas skirtingomis savybėmis. Ir čia žodį tarė žymus vokiečių matematikas B. Rymanas (1826–1866): savo paskaitoje 1854 m., išspausdintoje 1868 m., jis įtikina daugumą matematikų, kad neeuklidinė geometrija gali būti fizikinio pasaulio geometrija ir bet kokie aprioriniai teiginiai apie tai, kokia geometrija yra teisinga, neturi pagrindo. Kartu buvo sugriautas įsitikinimas, kad euklidinė geometrija – tai realaus pasaulio geometrija. O dar vėliau buvo įrodyta, kad jei euklidinė geometrija yra neprieštaringa (t.y. joje negalima išvesti vienas kitam prieštaraujančių teiginių), tai ir neeuklidinė geometrija yra neprieštaringa. Atsiradus neeuklidinėms geometrijoms, pakito matematinės tiesos samprata. Jei anksčiau teisingu buvo laikomas toks teiginys, kuris neprieštaraudavo mūsų patyrimui, tai dabar teisingu imta laikyti tokį teiginį, kuris buvo neprieštaringas. Tad 1904 m. žymus matematikas A. Prinsheimas (1850–1914) turėjo teisę pasakyti, kad tiesa, kurios paieškomis užsiima matematika, – tai tik neprieštaringumas. Pakito ir visos matematikos pobūdis. Tapo aišku, kad matematiką tarsi du Atlantai laiko aksiomos ir logika. Ir visa matematinė teorija yra hierarchinė sistema, kuri baigiasi pirminiais teiginiais – aksiomomis, kurių įrodinėti jau nereikia. Aksioma – tai teorema, turinti *alibi*. Aksiomos yra cementas, kuris sujungia į vieną visumą pagrindinius matematikos objektus, sudarydamas tą pagrindą, ant kurio iš teoremų kuriama matematinė teorija. Negana to, aksiomos ir apibrėžia tuos pagrindinius matematikos objektus.

Matematika tarsi suskilo į daugelį autonominių matematinių teorijų su savomis aksiomų sistemomis. Jas vienijo logika – tie įrodinėjimo metodai, kuriais būdavo gaunami rezultatai. Todėl daugelio besistengiančių surasti matematikos pamatą akys nukrypo į logiką. Juoba kad 1854 m. atsitiko įvykis, kuris jiems sukėlė daug vilčių. Tais metais pasirodė Dž. Bulio veikalas „Mąstymo dėsnių tyrimas“, kuriame savamokslis matematikas provincialaus Kvinz koledžo Korke (Airija) profesorius Dž. Bulis (1815–1864) pabandė formalizuoti logiką. Tiesa, Dž. Bulis nebuvo pirmas, kuris norėjo įsprausti mūsų mąstymą į matematinio skaičiavimo rėmus. Prieš jį buvo R. Dekartas, siekęs išplėsti logiką iki universalaus mokslo apie mąstymą, bei G. Leibnicas, svajojęs surasti universalią mokslo kalbą (*characteristica universalis*). Tačiau tik Dž. Buliui pasisekė algebrizuoti silogistiką ir sukurti teiginių skaičiavimą – vieną iš pagrindinių matematinės logikos šakų. Jei anksčiau logika buvo kaip ir virš matematikos, tai Dž. Bulio, A. de Morgano, Č.S. Pirso, G. Fregės darbų dėka logika pasidarė kaip ir matematikos dalis – ji tapo formalizuota bei aksiomatizuota. Gal todėl 1903 m. B. Raselas savo „Matematikos principuose“ ir pastebi, kad „tas faktas, jog visa matematika yra ne kas kita kaip simbolinė logika, – didžiausias mūsų amžiaus atradimas“. Matematikos pamato imta ieškoti logikoje. Ir jis buvo rastas – tai aibės sąvoka.

••• $\alpha + \omega$ •••

Kiek yra begalybių?

Apie daug ką ginčydavosi tarpusavyje Pitagoras ir Zenonas, Platonas ir Aristotelis. Tačiau vienu klausimu jie sutardavo – skaičių apibrėždavo kaip „kiekybę, susidedančią iš vienetų“, t.y. tam tikrą vienetų visumą (vienetas antikos graikų nebuvo laikomas skaičiumi). Bet kodėl tuomet aibė pasidaro madinga tik XIX a.? Kodėl iki to laiko matematikai išsiversdavo be šios sąvokos? Surasti atsakymą nėra labai sunku: tie, kurie anksčiau nežinojo aibių, buvo panašūs į poną Žurdeną iš Moljero pjesės, kuris nugyveno visą amžių nežinodamas, kad kalba proza. Matematikai ne kartą iki tol pasitelkdavo aibes, vis užmiršdami pavadinti jas vardu.

Kas yra aibė? Gal ir nuvilsiu jus sakydamas, kad nepateiksiu tikslaus ir griežto aibės apibrėžimo. O ar galima kitaip? Juk žodžiu „aibė“ pažymimas bet koks rinkinys daiktų, simbolių, sąvokų ar žodžių, kurie yra kažkokiu būdu iš visos daiktų sankaupos išvardijami ar apibrėžiami. Ir mūsų visai nedomina šių aibės elementų prigimtis. Gal todėl V. Ostvaldas, kadaise buvęs ir Rygos politechnikos instituto profesoriumi, knygoje „Gamtos filosofija“, pavartojęs žodį „aibė“, skuba paaiškinti: „Prašau su šiuo žodžiu nesieti nieko ypatingo. Jeigu jūs kada nors dalyvavote motinai kraustant savo dešimtmečio sūnaus kišenes, tikriausiai suprasite, ką aš turėjau omenyje“. Rašytojo Marko Tveno knygos herojus Tomas Sojeris „turėjo dvylika marmurinių rutuliukų, švilpynę, mėlyną butelio šukę, pro kurią įdomu žiūrėti, patranką, padirbtą iš siūlų ritės, raktą, kuris nieko nerakino, gabalėlį kreidos, stiklinį butelio kamštį, švininį kareivėlį, keletą buožgalvių, šešias kapsules, vienaakį kačiuką, varinę durų rankeną, šuns antkaklį (tik šuns nebuvo), peilio kriaunas, keturias apelsino žieveles ir senus sulūžusius lango rėmus“. Šie įvairūs daiktai, sudarantys Tomo Sojerio daiktų aibę, ir yra šios aibės elementai. Štai kodėl vokiečių matematikas G. Kantoras (1845–1918) rašė: „Daugdarą, arba aibę, aš suprantu kaip kažkokią daugybę, kurią galima mąstyti kaip visumą“. Kaip matyti, aibės sąvoka yra talpi. Gal todėl ji ir buvo pasirinkta matematikos pamatu. Bet kad ji taptų tuo pamatu, dar reikėjo sukurti aibių teoriją. Šio uždavinio ir ėmėsi G. Kantoras.

Iš apibrėžimo matyti, kad aibė gali būti sudaryta iš įvairiausių elementų, kurie susijungdami ir apibrėžia visumą, išsiskiriančia konkrečiomis savybėmis. Kokios tos savybės, galime suprasti, išvardiję (kaip Tomo Sojerio atveju) visus aibės elementus. Tačiau šią visumą galime nusakyti ir apibrėždami aibę. Kitaip tariant, aibę nusakysime, jei bus žinoma savybė, pagal kurią įeinantys į ją elementai skirsis nuo neįeinančių. Juoba kad G. Kantoras, pratęsdamas savo aibės apibrėžimą, pažymi, kad tai „bet koks apibrėžtų elementų kiekis, kuris gali būti sujungtas į vieną visumą kažkokiu dėsniu“. Pavyzdžiui, sakydami, kad A yra pirminių skaičių aibė, tvirtiname, kad kiekvienas A elementas yra toks natūralusis skaičius, kuris turi tik du daliklius: vienetą ir patį save.

Tačiau daugelis nustebs – juk dar Euklidas įrodė, kad pirminių skaičių yra be galo daug. Vadinasi, aibė A yra „begalybė visumoje“, kitaip tariant, ji įkūnija aktualiąją begalybę. Aibės apibrėžimas čia niekuo dėtas – juk jame nenurodyta, kad aibė turi būti baigtinė. Tad apibrėžimas leidžia egzistuoti begalinėms aibėms. Tačiau ar tai galima – juk dar nuo matematikos atsiradimo čia buvo įsigalėjusi *horror infiniti* (begalybės baimė). Matematikai aktualiosios begalybės stengdavosi išvengti, kaip kad vengiama nemalonumų. Ir tam juk buvo priežastis – dėl jų kaltės ir kilo pirmosios dvi matematikos pagrindų krizės. Ar ne todėl 1831 m. matematikos karalius K.F. Gausas rašė: „Matematikoje begalinio dydžio niekada negalima panaudoti kaip kažko užbaigto; begalybė – tai tik *façon de parle* (išraiškos maniera – *A. B.*), reiškianti ribą, prie kurios artėja vieni dydžiai, kai kiti be galo mažėja.“ Nenuostabu, kad ilgą laiką G. Kantoras buvo nesuprastas. 1883 m. jis su kartėliu rašė: „Aš atsidūriau savotiškoje opozicijoje visų pažiūroms į matematinę begalybę.“ Todėl dažnai, norėdamas atsikirsti savo kritikams, jis buvo priverstas pasitelkti metafizinius ir net teologinius argumentus. Tačiau pagrindinis jo argumentas aktualiosios begalybės naudai buvo tai, kad potencialioji begalybė tikrovėje gali būti imama tik aktualiosios begalybės bazėje. Nebūtų aktualiosios begalybės – išnyktų ir potencialioji begalybė. Antai dėstydamas dešimtaine trupmena iracionalųjį skaičių $\sqrt{2}$, niekas neprieštaraus, kad toks skleidinys yra aktualioji begalybė, nes visi turės omenyje, kad $\sqrt{2}$ yra baigtinis. O juk, kaip rašo sovietinis filosofas A. Karminas, begalinę aibę nusakant tam tikru dėsniu „begalybė tampa jau ne kaip neaprėžtai didėjantis procesas, o kaip stabilus darinys, t.y. pagal savo būties charakterį jis nesiskiria nuo baigtinio, nors kokybiškai ir skiriasi nuo jo savo struktūra bei kitomis savybėmis.“ [3]

Be to, neužmirškime, kad XIX a. septintame dešimtmetyje, kai G. Kantoras ėmė kurti begalinių aibių teoriją, ši šaka buvo matematikos periferijoje. Tad galima įsivaizduoti daugelio matematikų sutrikimą, kai buvo sužinota, kad jis iškėlė, atrodytų, sau neįveikiamus uždavinius: pirma, apibendrinti filosofinį begalybės sąvokos turinį; antra, surasti matematinių priemonių šiai sąvokai apibrėžti. Tiesa, G. Kantoras ėjo pramintu taku – jis turėjo pirmtakų. Vienas jų buvo žymus čekų matematikas ir filosofas B. Bolcanas (1781–1848). Jau po mirties (1851 m.) pasirodžiusiame savo veikale „Begalybės paradoksai“ B. Bolcanas pastebi, kad begalybės, aibės, skaičiaus sąvokos išreiškia vidines dalyko savybes ir nepriklauso nuo mūsų pažintinių sugebėjimų. Todėl jis pažymi, kad nesugebėjimas mąstyti vienu metu begalinę aibę dar nereiškia jos negalėjimo egzistuoti. Lyg patvirtindamas šią išvadą, jis įrodo begalinės tiesų aibės egzistenciją. B. Bolcanas nesutinka su G. Hegeliu, kuriam begalybė – tai tik kokybinė begalybė. Pasak B. Bolcano, kiekybinė ir kokybinė begalybės pasireiškia vienybėje. O jei taip, galimos įvairios aktualiųjų begalybių gradacijos. Praturtindamas filosofinį aktualiosios begalybės turinį, kartu jis atvėrė duris matematiniam jų tyrimui. Todėl jį, kaip aibių teorijos pirmtaką, labai aukštai vertino G. Kantoras: „Bet ryžtingą gynėją tiesioginė begalybė [4]... rado viename protingiausių mūsų amžiaus filosofų ir matematikų – Bernarde Bolcane, kuris išplėtojo savo pažiūras puikiame ir turiningame veikale „Paradoxien des Unendlichen“, išleistame Leipzige 1851 m., turėdamas tikslą parodyti, kad prie-

[3] *Кармин А.С.* Познание бесконечного. М.: Мысль, 1981. С. 104.

[4] Tiesiogine begalybe G. Kantoras iš pradžių vadino aktualiąją begalybę.

štaravimai, kuriuos begalybėje atranda skeptikai bei visų amžių peripatetikai, yra visai ne joje...". [5]

G. Kantoro uždavinys buvo daug sunkesnis – pateikti matematinį aparatą, tinkantį nusakyti aktualiai begalines aibes. O tam prireikė surasti kriterijų kiekybiškai palyginti aktualiąsias begalybes. Kitaip tariant, surasti būdą joms „suskaičiuoti". Bet kaip tai padaryti? Juk iki begalybės mes nesuskaičiuosime. Pasirodo, kad ir nereikia skaičiuoti. Jei norime sužinoti, pavyzdžiui, kiek žmonių yra patalpoje, turime juos skaičiuoti – niekur nesidėsi. Tačiau jei norime žinoti, ko ten daugiau – vyrų ar moterų, skaičiuoti nebūtina. Pakanka jiems pasiūlyti pašokti. Jei visi šoks, vadinasi vyrų ir moterų aibės yra lygios. Jei liks nešokančių moterų, vadinasi, vyrų yra mažiau, o jei atvirkščiai, tai mažiau bus moterų. Panašiai galima pasielgti ir su begalinėmis aibėmis. Tarkime, turime palyginti natūraliųjų skaičių ir natūraliųjų skaičių kvadratų aibes. Žinome, kad natūraliųjų skaičių kvadratų aibė yra dalis natūraliųjų skaičių aibės, t.y. yra jos poaibis. Be to, pirmajame šimte natūraliųjų skaičių yra 10 jų kvadratų (t.y. dešimtadalis), pirmajame milijone natūraliųjų skaičių yra 1000 natūraliųjų skaičių kvadratų (t.y. jau tūkstantoji dalis) ir t.t. Peržiūrint natūraliųjų skaičių eilę, natūraliųjų skaičių kvadratų dalis visąlaik mažės. „Sveikas protas" siūlo padaryti išvadą, kad natūraliųjų skaičių kvadratų aibė yra nepalyginamai mažesnė už natūraliųjų skaičių aibę. Tačiau ar tikrai taip yra? Ne. Tokia buvo dar G. Galilėjaus išvada. Natūraliųjų skaičių kvadratų yra tiek pat kiek ir pačių natūraliųjų skaičių". Ir štai jo samprotavimai: „Jeigu aš paklausiu jūsų, kiek yra kvadratų, tai galima atsakyti, kad jų yra tiek, kiek egzistuoja šaknų, kadangi kiekvienas kvadratas turi savo šaknį ir kiekviena šaknis savo kvadratą... Tačiau jei aš toliau paklausiu, kiek yra šaknų, tai jūs neneigsite, kad jų yra tiek, kiek apskritai yra skaičių, nes nėra nė vieno skaičiaus, kuris negalėtų būti kažkokio kvadrato šaknimi; nustačius tai, tenka pripažinti, kad kvadratų yra tiek pat, kiek iš viso yra skaičių..." [6] Kaip matome, G. Galilėjus ima ir sutapatina šių aibių elementus taip:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$
$$1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots.$$

Aišku, kad kiekvienam natūraliųjų skaičių aibės elementui n galima priskirti vieną ir tiktai vieną natūraliųjų skaičių kvadratų aibės elementą n^2 ir atvirkščiai. Tad natūraliųjų skaičių ir natūraliųjų skaičių kvadratų aibės turės po lygiai elementų.

Šią išvadą G. Galilėjus suvokia kaip paradoksą. Ir išeitį iš jo jis suranda taręs, kad „lygybės, taip pat didesnio ir mažesnio dydžių savybės negalioja ten, kur turime begalybes, ir jos pritaikomos tik baigtinėms kiekybėms". [7] Tačiau G. Galilėjus nebuvo pirmas, atradęs tokį paradoksą. Dar T. Bradvardinas

[5] *Кантор Г.* Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. С. 77.

[6] *Галилей Г.* Избранные труды. М.: Физматгиз, 1964. Т. 2. С. 141.

[7] Ten pat. P. 143.

(1290?–1349) veikale, parašytame 1328–1335 m., kritikuodamas infinitinę–atomistinę kontinuumo sampratą, nurodo abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp dviejų nelygių atkarpų taškų. Išties begalybės sąvoka sujaukė visas anksčiau matematikoje įprastomis laikytas pažiūras. Jei ligi tol niekas ir neišdrįsdavo suabejoti, kad visuma yra daugiau už dalį, tai šie paradoksai parodė, jog begalybei netinka šios baigtinėms aibėms nustatytos savybės. Juk begalinės aibės dalis (natūraliųjų skaičių kvadratų aibė) turės tiek pat narių kaip ir buvusi aibė (t.y. natūraliųjų skaičių aibė). Tačiau tik B. Bolcanas pirmasis šiuose paradoksuose įžvelgė ne prieštaravimus, o naujo metodo begalinėms aibėms tirti užuomazgas. Kaip pastebi A. Koire: „Jis kartu parodė vadinamųjų prieštaravimų grynai iliuzinę prigimtį, įvesdamas ekvivalentumo sąvoką, kuri begalybės atveju atitinka lygybės sąvoką, galiojančią baigtiniams skaičiams ir sumoms." [8] Todėl ir G. Kantoras perėmė šią vaisingą abipusiškai vienareikšmės atitikties, arba, kaip ją vadina B. Bolcanas, ekvivalentumo idėją. Jis net begalinę aibę apibrėžė kaip tokią aibę, kuriai galima surasti abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp kažkokio jos tiesioginio (t.y. nelygaus pačiai aibei) poaibio. Tad G. Kantoras vietoje to, kad skaičiuotų begalines aibes, jas lygina su kažkokiomis etaloninėmis aibėmis. A. Koire pažymi: „Ekvivalentumas neaprėpia savyje lygybės: pirmasis santykis galioja begalybės atveju, antrasis, – atvirkščiai, tik baigtinumo atveju." [9] Juk pirmuoju atveju tiek vienas angstremas, tiek vienas šviesmetis turi po lygiai taškų, t.y. tarp šių atkarpų galima abipusiškai vienareikšmė atitiktis. Tačiau jei begalinės aibės ekvivalenčios savo poaibiui, tai ar nepasirodys, kad jos visos yra ekvivalenčios? Ir apskritai kas gali būti šiomis etaloninėmis aibėmis?

Ir čia G. Kantorui labai pasisekė. Dar prieš pradėdamas plėtoti aibių teoriją, 1874 m. jis buvo įrodęs, kad tarp realiųjų skaičių ir natūraliųjų skaičių aibių negalima nustatyti abipusiškai vienareikšmės atitikties. Kitaip tariant, kad turime dvi begalines aibes – dvi skirtingas aktualiąsias begalybes. Tad pirmosios etaloninės aibės gali būti natūraliųjų skaičių aibė, kurią G. Kantoras pavadino suskaičiuojama (nes jos elementus galima sunumeruoti natūraliaisiais skaičiais), ir realiųjų skaičių aibė, pavadinta kontinuumu. O kokia yra kita etaloninė aibė? Iš pradžių G. Kantoras, žinodamas, kad etaloninė aibė yra vienmatis kontinuumas, kita etalonine aibe laikė dvimatį kontinuumą, t.y. plokštumos taškų aibę. Ištisus trejus metus – nuo 1874 m. iki 1877 m. jis stengėsi įrodyti, kad negalima abipusiškai vienareikšmė atitiktis tarp atkarpos taškų ir kvadrato taškų aibių. Kankinamai sunkios paieškos ilgai liko bergždžios. Ir štai visai netikėtai jis gavo priešingą rezultatą: kvadrato ir atkarpos taškų aibės yra ekvivalenčios. Sukrėstas savo atradimo, 1877 m. birželio 29 d. G. Kantoras rašė R. Dedekindui: *Je le vois, mais je ne le crois pas* (Aš matau tai, bet negaliu tuo patikėti.)

Išties atradus tokį rezultatą, tikrai galima nejaukiai pasijusti. Jei tarp atkarpos ir kvadrato taškų galima abipusiškai vienareikšmė atitiktis, tai kartu pakertamas dimensijos sąvokos, užimančios matematikoje svarbią vietą, vaidmuo. Štai kodėl G. Kantoras 1877 m. birželio 25 d. laiške R. Dedekindui

[8] *Койре А.* Сарки истории философской мысли. Москва: Прогресс, 1985. С. 42.

[9] Ten pat.

parašo šiuos žodžius (beje, labai papiktinusius pastarąjį): „Skirtumo tarp dviejų skirtingų matavimų darinių tikriausiai reikia ieškoti kitoje priežastyje, negu kad nepriklausomų koordinačių, laikomų charakteristikomis, skaičiuje.“ [10] Matematikai sunerimo. Išties ši abipusiškai vienareikšmė atitiktis tarp atkarpos ir kvadrato taškų yra funkcija, taškui x priskirianti reikšmę $f(x)$. Ir, be to, tokios funkcijos kreivė eina per visus kvadrato taškus, t.y. užpildo visą kvadratą. Tiesa, daugelis skaitytojų gali nustebti – ar ne per daug drąsu pavadinti kvadratą linija. Tačiau jau 1890 m. italų matematikui Dž. Peanui (1858–1932) pasisekė sukonstruoti tokią funkciją. Bet ji nebuvo tolydi. Tiesa, Dž. Peanui pasisekė pateikti kitą pavyzdį, kur atitiktis tarp atkarpos ir kvadrato taškų tolydi, bet jau ne abipusiškai vienareikšmė – funkcijos kreivė per vieną ir tą patį kvadrato tašką ėjo kelis kartus. Pasirodė, kad atitiktis tarp atkarpos ir kvadrato taškų negali vienu metu būti abipusiškai vienareikšmė ir tolydi. Tad dimensijos sąvoka galėjo triumfuoti – jai buvo sugrąžinta ankstesnė jos reikšmė (tiesa, jos supratimas pasidarė ne toks naivus, kaip buvo anksčiau). Taip matematine forma buvo įtvirtintas toks „akivaizdus“ faktas, kad įvairių matavimo objektų taškų begalinės aibės yra kokybiškai skirtingos. O argi gali būti kitaip? Juk mūsų intuicija šnabžda, kad plokštumos taškas turi daugiau kaimyninių taškų negu atkarpos taškas. Ne veltui prancūzų logikas L. Kutiūra (1868–1914) rašė, kad „erdvė – tai ne paprastas darinys, o išdėstytas darinys...“. Tad pasirodė, kad begalinių aibių elementų išsidėstymas turi kur kas svarbesnę reikšmę negu baigtinių aibių.

---

10 *Кантор Г.* Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. С. 344.