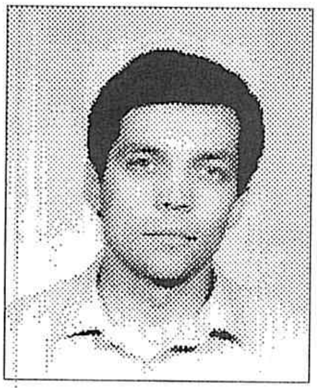
Rimvydas Krasauskas

Geometrinis dizainas – nauja matematikos taikymų sritis



Šiuolaikinė informacinių technologijų revoliucija atveria naujas matematikos taikymų galimybes. Čia mes trumpai pristatysime kompiuterinį geometrinį dizainą (modeliavimą, projektavimą). Plačiai vartojamas angliškas pavadinimas – *Computer Aided Geometric Design (CAGD)*. Tai nauja, sparčiai plėtojama informatikos ir geometrijos paribio sritis. Geometrinis dizainas kompiuterinėmis priemonėmis tiria kreivių ir paviršių aproksimacijas ir reprezentacijas. Naujausi rezultatai įgyvendinami greitai tobulėjančiais programų paketais. Taikymų spektras platus – nuo automobilių ir lėktuvų projektavimo iki fizinės geografijos žemėlapių.

Istorija ir pagrindinės koncepcijos

Prieš kompiuterių erą projektavimo uždaviniai buvo sprendžiami pasitelkus braižomąją geometriją ir gipsinius (ar medinius) modelius. 50-aisiais metais paplito programuojamos staklės, kurios frezavimo instrukcijas automatiškai vykdo pagal komandas, surašytas kompiuterinėje programoje. Visiškai naujoms galimybėms panaudoti, reikia turėti modeliuojamo paviršiaus aprašymą kompiuterine forma. Iškilo poreikis rasti kuo paprastesnį matematinį modelį „laisvos formos" kreivėms ir paviršiams. Daugeliu atvejų klasikinės geometrijos metodų nepakako. Atsirado naujos kreivių ir paviršių konstrukcijos specialiai skirtos tam, kad jomis galima būtų kuo lengviau manipuliuoti.

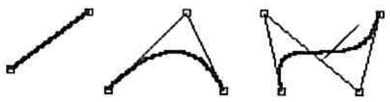
Geometrinio dizaino pradžia galima laikyti tą momentą, kai nuo tiesinių (ir dalimis tiesinių) konstrukcijų buvo pereita prie polinominių ir splaininių struktūrų. Bezje kreives pirmasis pradėjo vartoti P. de Kastelžo (*P. de Casteljau*) „*Citroën*" firmoje apie 1959 m. Deja, jo darbai buvo įslaptinti, vėliau 1962 m. firmoje „*Renault*" P. Bezje (*P. Bézier*) sukurta projektavimo sistema UNISURF buvo plačiai aprašyta įvairiose publikacijose. Dėl to šioms kreivėms, taip pat ir panašios konstrukcijos paviršiams prigijo Bezje vardas.

Bezje kreivė – tai polinomiškai parametrizuotos kreivės lankas, užrašytas Bernšteino polinomų $B_i^n(t)$ bazėje:

$$x(t) = b_0 B_0^n(t) + b_1 B_1^n(t) + \cdots + b_n B_n^n(t),$$

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i;$$

čia: $t \in [0,1]$ yra lokalus parametras, o $b_0, b_1, \ldots, b_n$ – vadinamieji kontroliniai taškai plokštumoje arba erdvėje. Kai $n = 1$, gauname paprasčiausią tiesės atkarpą; kai $n = 2$ – tai parabolės lankas; kai $n = 3$ – tai kubinė Bezje kreivė, dažniausiai pasitaikanti praktikoje.

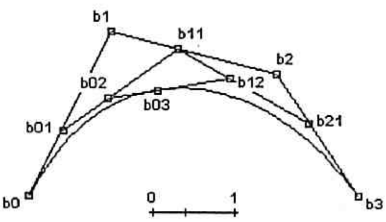


1 pav.

Kaip matome, laužtė, jungianti kontrolinius taškus, apytiksliai parodo kreivės formą. Nesunku patikrinti, kad:

- b_0 ir b_n yra galiniai kreivės taškai;
- liestinės galiniuose taškuose b_0 ir b_n turi atkarpų $\overline{b_0b_1}$ ir $\overline{b_{n-1}b_n}$ kryptis;
- visa kreivė guli kontrolinių taškų $b_0, b_1, \ldots, b_n$ iškilame apvalke.

Taškas $x(t_0)$ ant Bezje kreivės gali būti apskaičiuotas naudojant de Kastelžo algoritmą, kuris susiveda į rekurentinį tiesinį interpoliavimą. Kubinės kreivės atvejis pavaizduotas 2 pav.



2 pav.

Čia kiekvieną atkarpą $\overline{b_{i,k-1}b_{i+1,k-1}}$ taškas b_{ik} dalija santykiu $t_0 : (1 - t_0)$, o paskutinis taškas b_{03} – tai ieškomoji reikšmė $x(t_0)$. Pasirodo, kad tarpiniuose skaičiavimuose gauti taškai turi svarbią informaciją. Pavyzdžiui, taškai b_0, b_{01}, b_{02} ir b_{03} yra Bezje kreivės lanko, atitinkančio parametrą $t, 0 \le t \le t_0$, kontroliniai taškai. Tokiu būdu galima paprastai ir greitai rasti bet kokią kreivės dalį.

Norint gauti pakankamai sudėtingas formas, kurias po to galima būtų lokaliai keisti, polinominių konstrukcijų neužtenka. Čia buvo rasta išeitis naudojant splainus – dalimis polinomines pakankamai glodžias funkcijas. I. Šionbergas (*I. J. Schoenberg*) jau apie 1946 m. atrado patogią splainų erdvės bazę vadinamuosius B-splainus. C. de Būras (*C. de Boor*) dirbdamas „*General Motors*“ kompanijoje, 1972 m. pritaikė splainus kreivėms modeliuoti. Gordonas ir Riesenfeldas 1974 m. parodė, kad Bezje kreivės yra tik atskiras naujos teorijos atvejis.

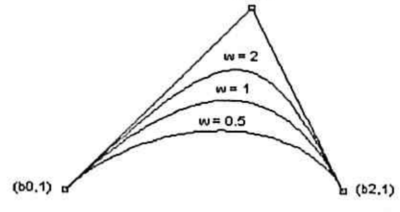
Normalizuoti B-splainai $N_i^n(u)$ yra n-ojo laipsnio polinomai kiekviename intervale (u_i, u_{i+1}), o „mazgų" taškuose $\cdots \leq u_0 \leq u_1 \leq u_2 \cdots$ – tai $(n-1)$ kartų tolydžiai diferencijuojamos funkcijos. B-splaininės kreivės formulę gausime, jeigu Bezje kreivės formulėje pakeisime Bernšteino polinomus normalizuotais B-splainais $N_i^n(u)$:

$$s(u) = \sum_i d_i N_i^n(u).$$

Kontroliniai taškai d_i čia vadinami de Būro taškais. Faktiškai gauname teoriją, kuri labai panaši į Bezje kreivių teoriją. Yra tik vienas esminis skirtumas: lokalios kontrolės savybė. Keičiant vieną de Būro tašką, keivė keičiasi tik lokaliai (lanke nuo $s(u_i)$ iki $s(u_{i+n+1})$).

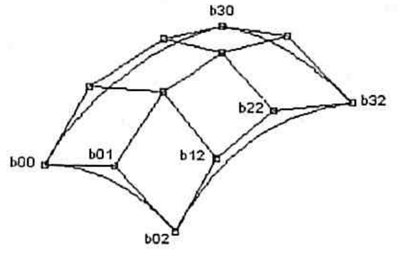
B-splainų pritaikymas sukėlė tikrą kreivių ir paviršių modeliavimo revoliuciją. Tai leido matematiškai aprašyti paviršius, kurių aprašymas senoviškais metodais yra praktiškai neįmanomas. Pavyzdžiui, 30–50 tūkst. taškų apimties geometriniai duomenys pasidarė įprasti. R. Saraga iš „*General Motors*" tyrimų grupės tvirtina, kad B-splainų vaidmuo geometriniame dizaine analogiškas vidaus degimo variklių reikšmei automobiliams.

Svarbų geometrinio dizaino istorijos etapą gerai iliustruoja „*Boeing*" firmos projektavimo sistemų evoliucija. Nuo 1945 m. lėktuvų fiuzeliažams modeliuoti buvo naudojamos konikės (2-osios eilės kreivės). Po to, 60-aisiais metais vadovaujant J. Fergiusonui (*J. C. Ferguson*) buvo pradėtos įsisavinti splaininės technologijos. Deja, šie du metodai pasirodė sunkiai suderinami. Iš visų konikių tik parabolės turi polinomines parametrizacijas, o jau apskritimas gali būti parametrizuotas tik racionaliomis funkcijomis (t.y. polinomų santykiais). Atsiradus užsakovams S. Kunsas (*S. A. Coons*) (iš MIT) 1967 m. „racionalizavo" Bezje kreivių, o vėliau ir B-splainų teoriją. Naujieji splainai buvo pavadinti NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*). Išoriškai visa teorija mažai pakito: tik kontroliniai taškai b_i buvo pakeisti taškais su svoriais (b_i, w_i), $w_i > 0$. Iš 3 pav. matome, kaip keičiasi 2-ojo laipsnio Bezje kreivė keičiant vidurinio taško (b_1, w) svorį w: kai $w = 1$, turime parabolę, kai $w > 1$ – hiperbolę, kai $w < 1$ – elipsę.



3 pav.

Visa tai, kas pasakyta apie kreives, turi savo analogus paviršių atveju. Daugelį šių konstrukcijų galima sutikti jau de Kastelžo darbuose. Pavaizduotą $(2, 3)$ laipsnio tenzorinės sandaugos paviršių matome 4 pav.



4 pav.

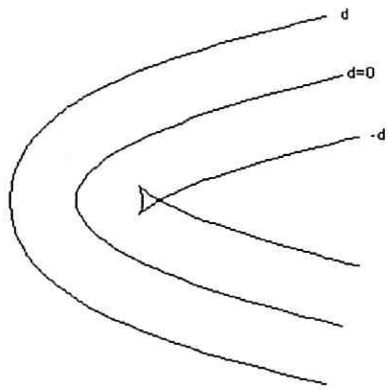
Čia taškai $\{b_{ij}\}$, $i = 0, \ldots, 3$, $j = 0, 1, 2$, sudaro tinklą, kuris visiškai kontroliuoja paviršių. Paviršiaus kraštas susideda iš Bezje kreivių. Pavyzdžiui, dvi artimiausios kraštinės kreivės turi kontrolinius taškus atitinkamai b_{00}, b_{01}, b_{02} ir b_{02}, b_{12}, b_{22}, b_{32}. Analogiškai konstruojami paviršiniai B-splainai. Suteikdami de Būro taškams svorius gausime paviršinius NURBS, kuriais galima tiksliai reprezentuoti visus racionaliuosius paviršius.

Geometrinio dizaino arsenale NURBS užima vieną iš centrinių vietų. Jų vertingos savybės (lokali kontrolė, rekursyvus reikšmių skaičiavimas ir smulkinimas, unifikuojanti reikšmė) gerokai persveria jų įgimtą sudėtingumą. Nors dabartiniu metu NURBS *de facto* įsigalėjo daugelyje programinių sistemų (AutoCAD, PHIGS++, grafikos standarte OpenGL ir t.t.), teorinis NURBS tyrinėjimas faktiškai dar tik prasidėjo. Randami ne tik nauji ryšiai su klasikine geometrija, bet gaunami ir visai netikėti geometriniai rezultatai.

Nauji atradimai

Kaip pavyzdį panagrinėsime ofsetų racionalumo problemą, kuri atsiranda sprendžiant uždavinį, kaip frezuoti tam tikrą paviršių programuojamomis staklėms.

Tegu plokštumoje yra glodi keivė. Iš kiekvieno jos taško iškelkime fiksuoto ilgio statmenį. Gausime naują kreivę, kuri yra vadinama pirmosios kreivės *ofsetu* (žr. 5 pav.).



5 pav.

Jeigu ši kreivė turi polinominę (arba racionalią) parametrizaciją $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), c_2(t))$, tai galima apskaičiuoti jos ofsetą (atstumu d)

$$\mathbf{c}_d(t) = \mathbf{c}(t) + d \cdot \mathbf{n}(t), \quad \mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{c}_1(t)^2 + \dot{c}_2(t)^2}}(-\dot{c}_2(t), \dot{c}_1(t)).$$

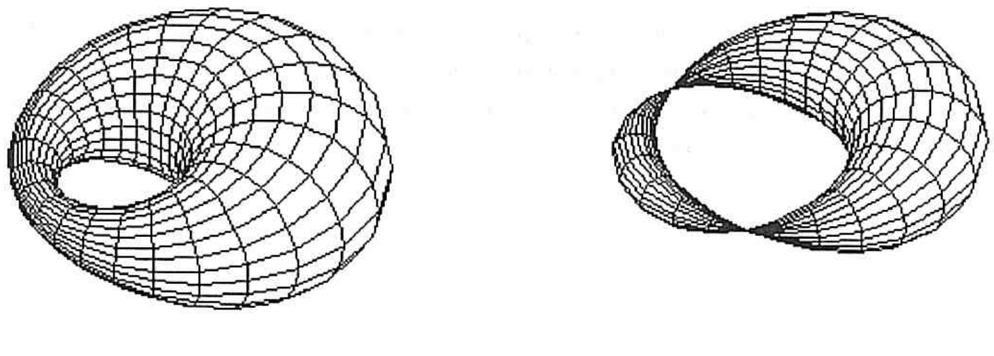
Kadangi normalė $\mathbf{n}(t)$ retai yra racionali funkcija, tai ir parametrizacija $\mathbf{c}_d(t)$ dažniausiai yra neracionali. Tie atvejai, kai ofsetai yra racionalūs, yra ypač svarbūs. Juk tada ofsetas reprezentuojamas Bezje racionaliomis kreivėmis. Tiesės ofsetas yra su ja lygiagreti tiesė, apskritimo – koncentrinis apskritimas. Bet čia paprasti pavyzdžiai baigiasi. Jau elipsės ofsetas yra neracionali kreivė. Kelerius metus buvo tyrinėjamos 3-ojo, 4-ojo ir 5-ojo laipsnio polinominės kreivės su racionaliais ofsetais. Staiga – sensacija: **parabolės ofsetai yra racionalūs!**

Kinas Vei Liu (*Wei Lü*) 1993 m. atrado tokią 6-ojo laipsnio parabolės racionalią parametrizaciją $\mathbf{c}(t)$, kurios ofsetas $\mathbf{c}_d(t)$ yra racionalus. Pateikiame formules, kad skaitytojas pats galėtų tuo įsitikinti:

$$c_1(t) = \frac{t^4 + 16dt^3 - 256dt - 256}{16(t^2+16)t},$$
$$c_2(t) = \frac{t^6 - 16t^4 - 2048dt^3 - 256t^2 + 4096}{256(t^2+16)t^2}.$$

Tiesa, vėliau paaiškėjo, kad tai senas V. Blaškės (*W. Blaschke*) 1910 m. rezultatas.

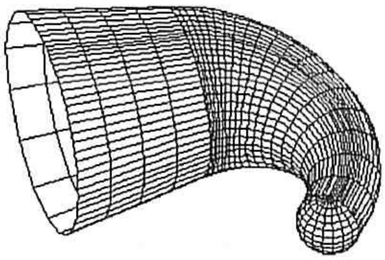
Dabar pereisime prie paviršių. Jų ofsetai apibrėžiami analogiškai: iš kiekvieno paviršiaus taško iškeliamas fiksuoto ilgio statmuo šiam paviršiui. Plokštumos, cilindro, kūgio, sferos ir toro ofsetai yra to paties tipo racionalūs paviršiai. Dar yra visa klasė racionalių trečiojo ir ketvirtojo laipsnio paviršių, vadinamų Dupino ciklidėmis. Dvi jų rūšys (žiedinė ir dviragė) parodytos 6 pav.



6 pav.

Ciklidės sudarytos iš apskritimų, ir jų ofsetai yra taip pat ciklidės. Jos naudojamos modeliuojant glodžius įvairių rūšių natūralių kvadrikių, t.y. cilindrų, kūgių ir sferų, jungimus.

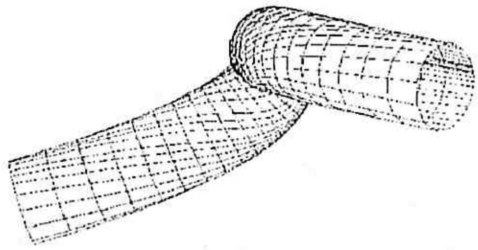
$\bullet\bullet\bullet\ \alpha + \omega\ \bullet\bullet\bullet$



7 pav.

Ir štai 1995 m. Vei Liu vėl nustebino publiką: **antrojo laipsnio paviršiai – hiperboloidai, paraboloidai ir elipsoidai – turi racionalius ofsetus!** Šį kartą (1996 m. duomenimis) tai tikrai naujas ir netikėtas rezultatas. Juk elipsių ir hiperbolių ofsetai nėra racionalios kreivės.

Baigdami paminėsime dar vieną nuostabų rezultatą. Kiekviename erdvinės kreivės taške nubrėžkime jai statmeną plokštumą, o joje – fiksuoto spindulio apskritimą su centru tame taške. Visi šie apskritimai sudaro paviršių, kuris vadinamas tos kreivės **vamzdiniu paviršiumi** (*pipe surface*). 1995 m. Vei Liu ir H. Potmanas (*H. Pottmann*) įrodė, kad bet kokios racionalios kreivės vamzdinis paviršius yra racionalus (žr. 8 pav.).



8 pav.

Čia kyla naujas klausimas. Koks mažiausias konkrečios n-ojo laipsnio Bezje kreivės vamzdinio paviršiaus parametrizacijos laipsnis?

Matyt, dar negreit išseks neatsakytų klausimų sąrašas. Gal prie jų sprendimo prisidėtų ir gerbiamas skaitytojas?