Rimvydas Krasauskas

Klasikinė geometrija ir Bezje kreivės

Centrinė geometrinio dizaino tema – Bezje (Bézier) kreivės. Jų teorija per 30 metų buvo nušlifuota iki blizgesio. Čia svarbų vaidmenį suvaidino atrasti nauji ryšiai su klasikine afinine ir projektyvine geometrija, kuriuos mes trumpai apžvelgsime. Tikimės atkreipti skaitytojo dėmesį ir į pačią Geometriją, kuri, deja, dabar yra gerokai primiršta.

Iš pradžių naudodami afininės geometrijos elementus įsitikinsime, kad kvadratinė Bezje kreivė yra parabolė. Polinės formos bus reikalingos de Kastelžo algoritmui. Parodę, kad apskritimas nėra polinominė kreivė, susipažinsime su projektyvine geometrija, kuri pravers nagrinėjant antrosios eilės kreives kaip racionalias Bezje kreives. Apžvalgą baigsime radę apskritimo lanko kontrolinius taškus ir svorius.

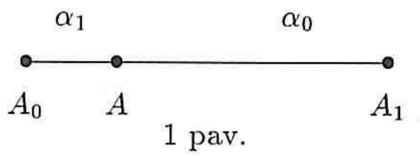
Afininė geometrija

Afininės geometrijos tyrimų objektas yra afininės erdvės. Nesigilindami į detales, įsivaizduosime afininę erdvę kaip tiesę, plokštumą ar įprastinę trimatę Euklido erdvę. Afininės erdvės taškams $A_0, A_1, \ldots, A_n$ yra apibrėžtas taškas

$$A = \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n, \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1,$$

kurio koordinatės randamos sudedant atitinkamas taškų A_i koordinates su koeficientais α_i, kurių suma yra 1.

Paprasčiausiu atveju, kai $n = 1$, taškas $A = \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1$ dalija atkarpą $A_0 A_1$ santykiu $\alpha_1 : \alpha_0$.



1 pav.

Iš tikrųjų:

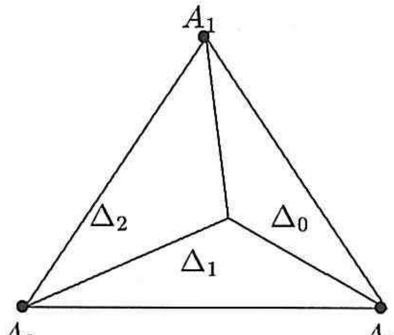
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_0A} &= A - A_0 = (\alpha_0 - 1)A_0 + \alpha_1 A_1 = \alpha_1(A_1 - A_0) = \alpha_1 \overrightarrow{A_0A_1},\\ \overrightarrow{AA_1} &= A_1 - A = -\alpha_0 A_0 + (1 - \alpha_1)A_1 = \alpha_0(A_1 - A_0) = \alpha_0 \overrightarrow{A_0A_1}.\end{aligned}$$

Taigi atkarpų A_0A ir AA_1 ilgiai sudaro atitinkamai α_1 ir α_0 dalį visos atkarpos A_0A_1 ilgio.

Santykis α_1/α_0 dar vadinamas *paprastuoju* trijų kolinearių taškų A_0, A, A_1 *santykiu* ir žymimas $\mathrm{r}(A_0, A, A_1)$.

Atveju, kai $n = 2$, taškas $A = \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ dalija trikampį $A_0A_1A_2$ į tris trikampius, kurių plotai atitinkamai proporcingi koeficientams α_i :

$$\Delta_0 : \Delta_1 : \Delta_2 = \alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2.$$



2 pav.

Faktiškai, jeigu taškai A_0, A_1, A_2 nėra vienoje tiesėje, tai bet koks plokštumos taškas A gali būti vieninteliu būdu užrašytas kaip jų afininis darinys. Tada koeficientai α_i vadinami taško A *baricentrinėmis koordinatėmis*, kurios turi paprastą mechaninę interpretaciją. Baricentrines koordinates 1827 m. įvedė A. Miobiusas (*August Ferdinand Möbius, 1790–1868*), atsakydamas į klausimą, kokias mases reikia suteikti trikampio viršūnėms, kad jų svorio centras sutaptų su tam tikru tašku.

Kai afininio darinio koeficientai yra neneigiami, jis vadinamas *iškiluoju dariniu* (žr. 1 ir 2 pav.). Iškilieji taškų dariniai yra visada šių taškų „viduje“: dviejų taškų atveju – tai visi juos jungiančios tiesės atkarpos taškai, trijų taškų atveju – tai visi trikampio vidiniai taškai, įskaitant ir kraštines. Taškų $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *iškilusis apvalkas* – tai visų jo iškilųjų darinių aibė. Intuityviai plokštumos taškų aibės iškiląjį apvalką galima rasti taip: įsivaizduokime siūlą, juosiantį sukaltus pasirinktuose taškuose vinis. Belieka tik užveržti siūlą – tada jis taps ieškomo iškilo apvalko kraštu. Dabar nesunku patikrinti, kad bet koks Bezje kreivės $P(t)$ taškas

$$P(t) = \sum_{i=0}^{d} B_i^d(t) P_i, \quad B_i^d(t) = \binom{d}{i}(1-t)^{d-i} t^i,$$

yra kontrolinių taškų P_i iškilas darinys. Tikrai

$$\sum_{i=0}^{d} B_i^d(t) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i}(1-t)^{d-i} t^i = ((1-t)+t)^d = 1,$$

o $B_i^d(t) \geq 0$, kai tik $0 \leq t \leq 1$. Išvada: visa Bezje kreivė $P(t)$ priklauso kontrolinių taškų iškilam apvalkui.

Svarbų vaidmenį afininėje geometrijoje vaidina *afininiai atvaizdžiai*. Jie tik truputį bendresni už tiesinius atvaizdžius. Dviejų afininių erdvių atvaizdis $f: X \to Y$ vadinamas afininiu, jeigu su bet kuriais taškais $E_0, E_1 \in X$

$$f(\alpha_0 E_0 + \alpha_1 E_1) = \alpha_0 f(E_0) + \alpha_1 f(E_1),$$

kai tik $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$. Nesunku patikrinti, kad afininis atvaizdis taip pat „išlaiko" ir bet kokio skaičiaus taškų afininius darinius. Patikrinsime tai trijų taškų atveju:

$$\begin{aligned}
f(\alpha_0 E_0 + \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2) &= f\left(\alpha_0 E_0 + (\alpha_1+\alpha_2)\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}E_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}E_2\right)\right) = \\
&= \alpha_0 f(E_0) + (\alpha_1+\alpha_2) f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}E_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}E_2\right) = \\
&= \alpha_0 f(E_0) + (\alpha_1+\alpha_2)\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}f(E_1) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}f(E_2)\right) = \\
&= \alpha_0 f(E_0) + \alpha_1 f(E_1) + \alpha_2 f(E_2).
\end{aligned}$$

Pritaikę šią savybę Bezje kreivėms matome, kad jos yra afiniškai invariantiškos:

$$f\left(\sum_{i=0}^{d} B_i^d(t) P_i\right) = \sum_{i=0}^{d} B_i^d(t) f(P_i).$$

Tai reiškia, kad norint rasti Bezje kreivės afininį vaizdą, užtenka suskaičiuoti jos kontrolinių taškų vaizdus. Pailiustruosime šią išvadą įrodydami, kad kvadratinė Bezje kreivė yra parabolės lankas.

Pirmiausia išnagrinėsime atskirą atvejį, kai kontroliniai taškai turi koordinates $E_0 = (0,0)$, $E_1 = (1/2, 0)$, $E_2 = (1,1)$. Tada juos atitinkanti Bezje kreivė

$$\begin{aligned}
E(t) &= (1-t)^2 E_0 + 2(1-t)tE_1 + t^2 E_2 = \\
&= ((1-t)^2 \cdot 0 + 2(1-t)t \cdot 1/2 + t^2 \cdot 1, (1-t)^2 \cdot 0 + 2(1-t)t \cdot 0 + t^2 \cdot 1) \\
&= (t, t^2)
\end{aligned}$$

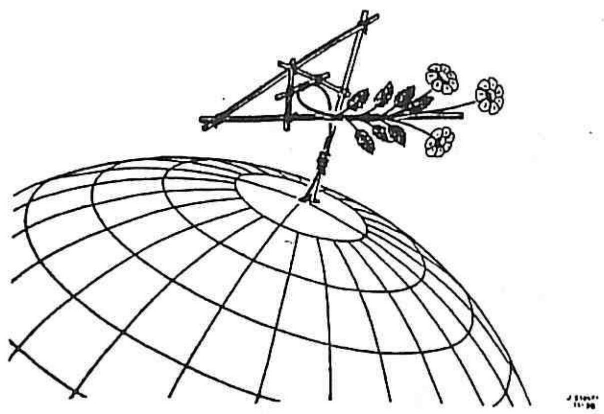
yra parabolė, nes jos grafikas sutampa su funkcijos $y = x^2$ grafiku. Pastebėsime, kad E_0E_1 ir E_1E_2 yra liestinės taškuose E_0 ir E_2. Bet kokia kvadratinė Bezje kreivė

$$Q(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2$$

yra afininis keivės $E(t)$ vaizdas. Kad tuo įsitikintume, užtenka pritaikyti vienintelį afininį atvaizdį f, kad $f(E_i) = P_i$, $i = 0, 1, 2$. Iš tikrųjų, afininės transformacijos paraboles perveda į paraboles (tai dėstoma bet kokiame analizinės geometrijos kurse). Kaip išvadą gauname, kad atkarpos P_0P_1 ir P_1P_2 yra Bezje kreivės $Q(t)$ liestinės.

Poliarinių formų žydėjimas

Pastaruoju metu tapo madinga Bezje kreivių analizei taikyti multiafininių atvaizdžių teoriją. P. de Kastelžo (*Paul de Casteljau, 1985*) ir L. Ramšou (*Lyle Ramshaw, 1987*) pirmieji nepriklausomai pradėjo naudoti šį metodą. Todėl metodas ir vadinamas dvejopai: polinės formos (*forme de pôle*) ir žydėjimas (*blossoming*). Tokia pavadinimų painiavą iliustruoja toks paveikslėlis:



3 pav.

Pradėsime nuo paprasto pastebėjimo, kad pirmo laipsnio Bezje kreivės formulė $L(t) = (1-t)P_0 + tP_1$ apibrėžia afininį atvaizdį. Tikrai apibrėžimo sritis čia yra realiųjų skaičių tiesė $\mathbf{R}$, kurioje fiksuoti du taškai 0 ir 1. Bet kuris taškas $t \in \mathbf{R}$ gali būti užrašytas naudojant baricentrines koordinates $t = (1-t) \cdot 0 + t \cdot 1$ (taškų 0 ir 1 atžvilgiu). Be to, $L(0) = P_0$ ir $L(1) = P_1$. Gauname formulę

$$L((1-t) \cdot 0 + t \cdot 1) = (1-t)L(0) + tL(1),$$

kuri įrodo atvaizdžio L afiniškumą.

Pirmas netrivialus atvejis – tai kvadratinė Bezje kreivė

$$Q(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2.$$

Apibrėžkime dviejų kintamųjų t_1 ir t_2 funkciją q:

$$q(t_1, t_2) = (1-t_1)(1-t_2)P_0 + \big((1-t_1)t_2 + t_1(1-t_2)\big)P_1 + t_1t_2P_2.$$

Matome, kad:

1) q yra simetriška: $q(t_1, t_2) = q(t_2, t_1)$;

2) q yra biafininė: kai $\alpha + \beta = 1$,

$$q(\alpha u + \beta v, t_2) = \alpha q(u, t_2) + \beta q(v, t_2),$$
$$q(t_1, \alpha u + \beta v) = \alpha q(t_1, u) + \beta q(t_1, v);$$

3) q sutampa su Q ant įstrižainės: $q(t, t) = Q(t)$;

4) $q(0,0) = P_0$, $q(0,1) = q(1,0) = P_1$, $q(1,1) = P_2$.

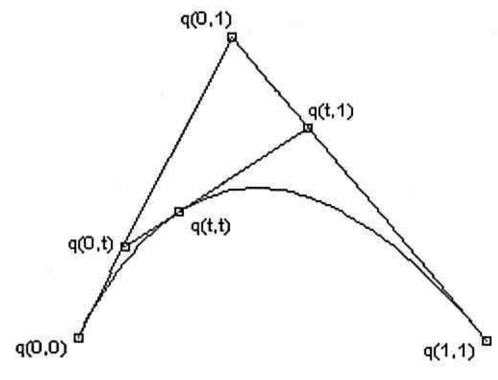
Simetrinis biafininis atvaizdis q yra vadinamas kreivės Q *poline forma* (arba poliarizacija). Dirbti su q yra patogiau, nes galime naudotis afiniškumu keisdami tik po vieną argumentą. Pavyzdžiui:

$$\begin{aligned} q(t,0) &= q((1-t)\cdot 0 + t\cdot 1, 0) = \\ &= (1-t)\cdot q(0,0) + t\cdot q(1,0). \end{aligned}$$

Kaip matome iš 4 pav., $q(t, 0)$ dalija atkarpą, kurios galai yra $q(0,0)$ ir $q(1,0)$ santykiu $t : 1-t$. Analogiškai $q(t,1)$ dalija atkarpą tarp $q(0,1)$ ir $q(1,1)$ tuo pačiu santykiu. Dabar turėdami $q(t,0)$ ir $q(t,1)$ galime rasti

$$\begin{aligned} q(t,t) &= q\big(t, (1-t)\cdot 0 + t\cdot 1\big) = \\ &= (1-t)\cdot q(t,0) + t\cdot q(t,1). \end{aligned}$$

Iš 3) savybės išplaukia $q(t,t) = Q(t)$. Taigi po pakartotinio atkarpų dalijimo santykiu $t : 1-t$ paskutiniame žingsnyje gauname Bezje kreivės tašką $Q(t)$. Tai ir yra garsusis de Kastelžo algoritmas.



4 pav.

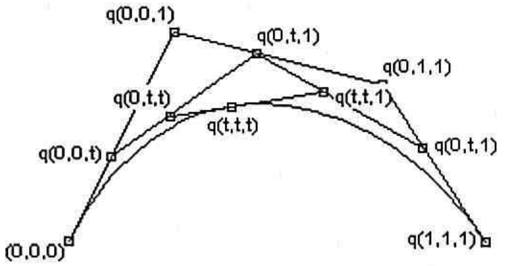
Gauti nauji taškai $q(0,t)$ $q(t,t)$, $q(t,1)$ taip pat vertingi: jie naudojami kreivės lanko dalijimo procedūroje. Čia vėl pravers polinės formos.

Pirmo laipsnio Bezje kreivės $L(t) = (1-t)L(0) + tL(1)$ taškas $L(t_0)$ dalija ją į dvi dalis. Kontroliniai taškai $L(0)$ ir $L(t_0)$ apibrėžia pirmąją jos dalį

$L'(u) = (1-u)L(0) + uL(t_0)$. Ryšys tarp afininių atvaizdžių L ir L' labai paprastas: $L'(u) = L(t)$; čia $t = ut_0 = (1-u)\cdot 0 + u \cdot t_0$ yra afininis parametro t keitinys. Kai t kinta tarp 0 ir t_0, u kinta tarp 0 ir 1.

Analogiškai kvadratinės Bezje kreivės atveju lanką nuo $Q(0)$ iki $Q(t)$ apibrėš kontroliniai taškai $q(0,0)$, $q(0,t)$, $q(t,t)$. Antroji dalis nuo $Q(t)$ iki $Q(1)$ turės kontrolinius taškus $q(t,t)$, $q(t,1)$, $q(1,1)$. Dar viena papildoma išvada: atkarpa $q(0,t)q(t,1)$ yra parabolės liestinė.

Kubinės Bezje kreivės atveju polinė forma turės jau tris kintamuosius, bet visos minėtos konstrukcijos bus visiškai analogiškos (žr. 5 pav.).



5 pav.

Apskritimas nėra polinominė kreivė

Pirmiausia užrašysime spindulio R apskritimo lygtį patogiu pavidalu. Parinkime Dekarto koordinates taip, kad apskritimo centras sutaptų su koordinačių pradžia. Tada jo lygtis bus visai paprasta

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Jeigu apskritimą galima polinomiškai parametrizuoti, tai atsiras tokie polinomai

$$p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n, \quad q(t) = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \cdots + q_k t^k,$$

kad

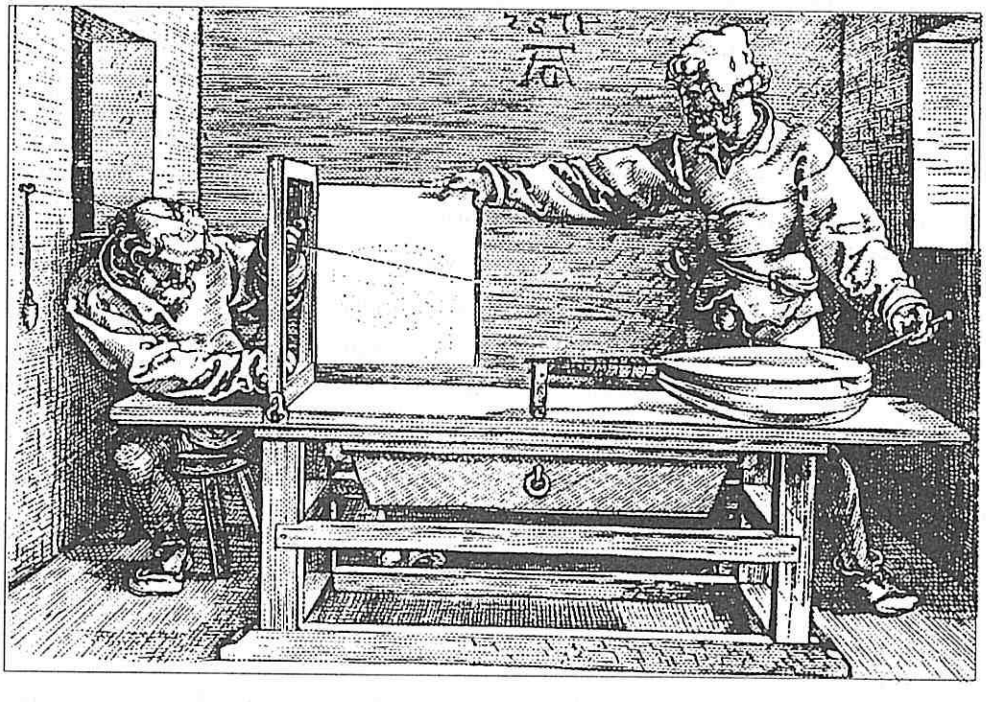
$$p^2(t) + q^2(t) = R^2 \tag{$*$}$$

su visais t. Jeigu prirašysime trūkstamus narius su nuliniais koeficientais, galėsime tarti, kad $n = k$. Polinomai lygūs tada ir tik tada, kai jų atitinkami koeficientai lygūs. Sulyginę polinomų koeficientus prie t^{2n} kairėje ir dešinėje (*) lygties pusėse, gausime $p_n^2 + q_n^2 = 0$, t.y. $p_n = q_n = 0$. Kartodami šią procedūrą vis mažesniems laipsniams, gausime $p_i = q_i = 0$ su visais $i > 0$. Vadinasi, mūsų polinomai yra konstantos $p(t) = p_0$, $q(t) = q_0$. Todėl apskritimas nėra polinominė kreivė.

Matydami, kad polinomų nepakanka, pasinaudosime racionaliosiomis funkcijomis. Čia mums pravers elementarios projektyvinės geometrijos žinios.

Projektyvinė geometrija

Renesanso epochoje antikinio mokslo laimėjimai buvo pradėti plačiai taikyti praktikoje. Italų dailininkai, panaudodami sukauptą ilgametę patirtį ir graikų geometrijos žinias, stengėsi pavaizduoti erdvines figūras plokštumoje taip, kaip jas mato žmogaus akis. XV a. pradžioje jau buvo aiškiai suformuluotos tiesinės perspektyvos taisyklės dailėje.



6 pav.

Naudojant perspektyvinį metodą, paveikslas laikomas „skaidriu" langu, pro kurį žvilgsnis tyrinėja pasaulį. Paveikslo plokštuma kerta kūgį, sudarytą iš tiesių spindulių, einančių iš akies (kūgio viršūnės). Matematiškai tai reiškia centrinę projekciją iš taško O (centro) į tam tikrą plokštumą Π (projekcijos plokštumą), kai erdvės taškui M yra priskiriamas tiesės OM ir plokštumos Π susikirtimo taškas M'. Kai OM lygiagreti su plokštuma Π, tada centrinė taško M projekcija neapibrėžta.

Pirmojo darbo iš projektyvinės geometrijos autorius Lijono architektas Ž. Dezargas (*Girard Desargues, 1591–1661*) iškėlė klausimą, kokios plokščių figūrų savybės išlieka centriniame projektavime.

Nesunku įsitikinti, kad projektuojant vieną plokštumą į kitą centrinės projekcijos būdu lygiagrečios tiesės gali pereiti į susikertančias, kampai pasikeisti, dalis taškų dingti, vaizdas nesutapti su visa plokštuma... Kokios savybės išlieka?

Norėdami atsakyti į šį klausimą, pasitelksime projektyvinės plokštumos sąvoką. Tieses, einančias per fiksuotą erdvės $\mathbf{R}^3$ tašką O, pavadinkime projektyviniais taškais. Visi projektyviniai taškai, kuriuos atitinkančios tiesės guli vienoje plokštumoje, sudaro projektyvinę tiesę. Projektyvinę plokštumą $\mathbf{P}^2$ apibrėšime kaip visų projektyvinių taškų aibę. Nesunkiai patikrinsime dvi svarbiausias projektyvinės plokštumos $\mathbf{P}^2$ savybes:

1) Per du skirtingus projektyvinius taškus eina vienintelė projektyvinė tiesė.
2) Dvi projektyvinės tiesės kertasi.

Iš tikrųjų per dvi tieses, einančias per O, galima išvesti vienintelę plokštumą (tai įrodo 1)). Dvi plokštumos, einančios per tašką O, visada kertasi tiese arba sutampa (tai įrodo 2)).

Koks ryšys su centriniu projektavimu? Kiekvienai erdvės $\mathbf{R}^3$ plokštumai Π, kuriai nepriklauso taškas O, galima surasti jos „vietą“ projektyvinėje plokštumoje $\mathbf{P}^2$: užtenka taškui $X \in \Pi$ priskirti tiesę (OX). Aišku, kad taip mes negausime tik tų tiesių, kurios lygiagrečios su plokštuma Π. Jas atitinkantys projektyviniai taškai sudaro projektyvinę tiesę.

Projektyvinėje plokštumoje mums labai pravers koordinatės. Naudojant Dekarto koordinates, afininę plokštumą galima sutapatinti su realių skaičių porų aibe $\mathbf{R}^2$. Projektyvinės plokštumos atveju situacija sudėtingesnė. Erdvėje $\mathbf{R}^3$ fiksuokime koordinačių pradžią $O = (0, 0, 0)$. Tada bet kokia tiesė, einanti per O, visiškai apibrėžiama dar vienu savo tašku $(x_0, x_1, x_2) \neq (0, 0, 0)$, bet nevienareikšmiškai. Bet kokie du proporcingi trejetai

$$(x_0, x_1, x_2) \quad \text{ir} \quad (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$$

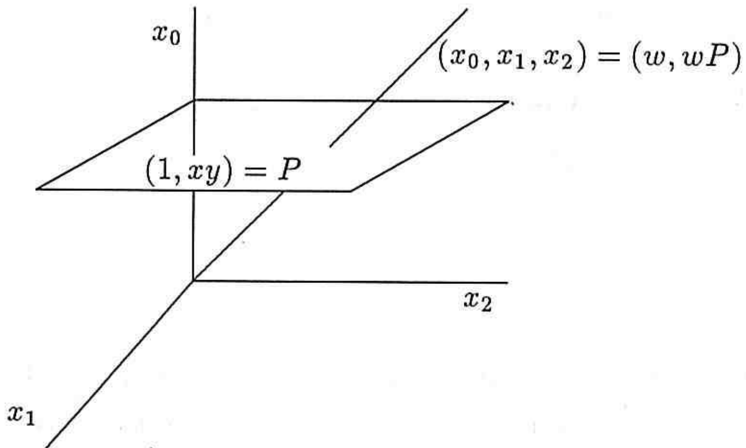
reikš vieną ir tą pačią tiesę, t.y. tą patį projektyvinį tašką, kurį žymėsime simboliu $[x_0, x_1, x_2]$. Vadinasi, projektyvinę plokštumą tapatiname su aibe realiųjų skaičių trejetų, kurių ne visi lygūs nuliui. Be to, tariame, kad du trejetai lygūs, jeigu jie yra proporcingi.

Bet kokia afininė plokštuma $\mathbf{R}^2$ natūraliai „įsideda“ į projektyvinę plokštumą $\mathbf{P}^2$: iš pradžių ją sutapatiname su horizontalia plokštuma $x_0 = 1$, po to pritaikome anksčiau minėtą konstrukciją. Tokiu būdu gauname atvaizdį

$$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{P}^2, \quad (x, y) \mapsto [1, x, y],$$

kurio vaizdas – tai visi projektyviniai taškai $[x_0, x_1, x_2]$, $x_0 \neq 0$.

••• $\alpha + \omega$ •••



7 pav

Atvirkštinis atvaizdis $[x_0, x_1, x_2] \mapsto (x_1/x_0, x_2/x_0)$ yra neapibrėžtas visuose projektyviniuose taškuose, kuriems $x_0 = 0$. Jie vadinami begaliniais (be galo nutolusiais) taškais ir sudaro begalinę projektyvinę tiesę. Faktiškai gavome dar vieną projektyvinės plokštumos apibrėžimo būdą: $\mathbf{P}^2$ susideda iš afininės plokštumos su prijungta begalinių taškų projektyvine tiese.

Panagrinėkime, kokiais begaliniais taškais yra papildomos tiesės. Tegu plokštumoje $\mathbf{R}^2$ yra tiesė, apibrėžta lygtimi $ax + by + c = 0$. Kintamuosius x, y užrašę homogeninėse koordinatėse $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$ ir padauginę iš x_0, gausime lygtį homogeninėse koordinatėse $ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0$. Pastaroji lygtis erdvėje $\mathbf{R}^3$ reiškia plokštumą, einančią per tašką $O = (0, 0, 0)$. Vadinasi, tai yra projektyvinės tiesės lygtis. Visi jos taškai yra baigtiniai, išskyrus vienintelį begalinį tašką $[0, b, -a]$, kuris yra susikirtimo su begaline tiese $x_0 = 0$ taškas. Jeigu dabar keisime koeficientą c, tai gausime tieses, kurios yra lygiagrečios su pasirinktąja plokštumoje $\mathbf{R}^2$. Tuo tarpu jų begaliniai taškai bus tie patys. Taigi lygiagrečios tiesės kertasi begaliniame taške.

Pereisime dabar prie antros eilės kreivių. Tinkamai parinkę koordinates galime apsiriboti jų kanoninėmis lygtimis. Pradėsime nuo parabolės. Jos kanoninė lygtis yra $x^2 = 2py$. Išreiškę x ir y homogeniniais kintamaisiais $x = x_1/x_0$ ir $y = x_2/x_0$, gauname parabolės lygtį projektyvinėje plokštumoje $x_1^2 = 2px_0x_2$. Begalinius taškus rasime iš sąlygos $x_0 = 0$. Kadangi $x_1^2 = 0$, darome išvadą, kad parabolė turi vienintelį begalinį tašką $[0, 0, 1]$.

Elipsės kanoninė lygtis yra

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0,\ b > 0.$$

Pakeitę kintamuosius x ir y homogeniniais, gauname

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = x_0.$$

Ieškodami begalinių taškų, tariame, kad $x_0 = 0$, ir gauname $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 0$. Vadinasi, $x_1 = x_2 = 0$, t.y. begalinių taškų nėra.

Analogiškai pertvarkę hiperbolės kanoninę lygtį

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0,\ b > 0,$$

gauname

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = x_0.$$

Du begaliniai taškai $[0, a, b]$ ir $[0, a, -b]$ randami iš lygties $x_1^2/a^2 - x_2^2/b^2 = 0$. Tai begaliniai taškai atitinkantys hiperbolės asimptočių $y = \pm(b/a)x$ kryptis.

Racionalios kvadratinės Bezje kreivės – tai konikės

Antros eilės kreivės žmonijai žinomos nuo seniausių laikų. Apolonijaus ($A\pi o\lambda\lambda\omega\nu\iota o\varsigma$ 260–170 m. pr. Kr.) veikalas „Kūgio pjūviai" apibendrino visus ankstesnius senovės graikų šios srities laimėjimus. Čia pirmą sykį pasirodė dabar įprasti šių kreivių pavadinimai: parabolė, hiperbolė ir elipsė.

Apolonijus nagrinėjo antros eilės kreives kaip kūgio plokščiuosius pjūvius, todėl jos dažnai vadinamos konikėmis. Iš tikrųjų tai reiškia, kad jis visas konikes gavo projektuodamas (centrinės projekcijos būdu) apskritimą į plokštumą. Tuo tarpu geometriniame dizaine visos kitos konikės yra gaunamos centrinės projekcijos būdu iš parabolės, kaip pačios paprasčiausios konikės, nes ji yra polinominė.

Tegu yra duota Bezje kvadratinė kreivė (t.y. parabolės lankas) erdvėje $\mathbf{R}^3$

$$Q(t) = Q_0 B_0^2(t) + Q_1 B_1^2(t) + Q_2 B_2^2(t). \tag{$*$}$$

Jos kontrolinius taškus Q_i užrašysime patogia forma $Q_i = (w_i, w_i P_i)$; čia w_i – nulinė koordinatė, o P_i – taško Q_i projekcija plokštumoje $x_0 = 1$ (žr. 8 pav.). Taškas Q_i visiškai apibrėžiamas jo projekcija P_i ir koeficientu w_i, kuris vadinamas *svoriu*. Perrašysime (*) formulę naujais terminais

$$Q(t) = \big(w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t), w_0 P_0 B_0^2(t) + w_1 P_1 B_1^2(t) + w_2 P_2 B_2^2(t)\big)$$

ir projektuodami į plokštumą $x_0 = 1$ gausime *racionalią* kvadratinę Bezje kreivę

$$\widehat{Q}(t) = \frac{w_0 P_0 B_0^2(t) + w_1 P_1 B_1^2(t) + w_2 P_2 B_2^2(t)}{w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)}. \tag{$**$}$$

Čia vardiklis yra skaliarinis dydis, kurį pažymėkime $w(t)$. Matome, kad

$$\widehat{Q}(t) = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2;$$

čia $\lambda_i = w_i B_i^2(t)/w(t)$. Kadangi $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, tai λ_i yra baricentrinės koordinatės taškų P_i atžvilgiu. Vadinasi, $C(t)$ išraiška yra afiniškai invariantiška, kaip ir polinominių Bezje kreivių atveju.

Kad kreivės $\widehat{Q}(t)$ lankas, atitinkantis parametro t kitimo sritį $[0,1]$, „nepabėgtų" iš trikampio $\Delta P_0P_1P_2$, visi λ_i turi būti neneigiami. Tam tikslui yra vartojami tik teigiami svoriai w_i.

Teorema. *Racionali kvadratinė Bezje kreivė (**) yra konikė (t.y. antrosios eilės kreivė). Ji yra:*

(i) parabolė, kai $w_1^2 - w_0w_2 = 0$*;*

(ii) hiperbolė, kai $w_1^2 - w_0w_2 > 0$*;*

(iii) elipsė, kai $w_1^2 - w_0w_2 < 0$*.*

Įrodymas. Pirmiausia pastebime, kad kreivės $\widehat{Q}(t)$ taškai tenkina kvadratinę lygtį $4w_1^2\lambda_0\lambda_2 = w_0w_2\lambda_1^2$ baricentrinėse koordinatėse. Pastarąsias išreiškę Dekarto koordinatėmis tiesiškai (paliekame tai skaitytojui), gausime antro laipsnio lygtį, t.y. $\widehat{Q}(t)$ yra antros eilės kreivė. Norėdami nustatyti jos tipą, suskaičiuosime begalinius taškus, kurie atitinka vardiklio $w(t)$ virtimą nuliu. Kadangi $t = 0$ tikrai nėra lygties $w(t) = 0$ šaknis, tai padaliję iš t^2 gausime

$$w_0\Big(\frac{1-t}{t}\Big)^2 + 2w_1\Big(\frac{1-t}{t}\Big) + w_2 = 0.$$

Šios kvadratinės lygties diskriminantas (tiksliau jo ketvirtis) yra $D = w_1^2 - w_0w_2$. Kai $D = 0$, turime vieną šaknį (t.y. vieną begalinį tašką), o tai reiškia parabolę. Kai $D > 0$, turime dvi šaknis - tai hiperbolė. Kai $D < 0$, šaknų nėra - tai elipsė.

Farino taškai

Manipuliuoti su svoriais yra ne taip patogu kaip su taškais. Pavyzdžiui, norint nurodyti tašką kompiuterio ekrane, užtenka vieno pelės spragtelėjimo, tuo tarpu skaičiui įvesti reikia klaviatūros. G. Farinas (*Gerald Farin*) sugalvojo, kaip svorius pakeisti taškais.

Išnagrinėkime pirmo laipsnio Bezje kreivės atvejį. Turime du taškus su svoriais P_0, w_0 ir P_1, w_1, kurie apibrėžia tiesės atkarpą $L(t)$ erdvėje $\mathbf{R}^3$. Projektuodami plokštumoje $x_0 = 1$, gauname racionaliai parametrizuotą atkarpą P_0P_1:

$$\widehat{L}(t) = \frac{w_0(1-t)P_0 + w_1tP_1}{w_0(1-t) + w_1t}.$$

Atkarpos taškas $F_0 = \widehat{L}(1/2)$ vadinamas Farino tašku. Iš formulės

$$F_0 = \frac{w_0P_0 + w_1P_1}{w_0 + w_1}$$

matome, kad F_0 dalina atkarpą P_0P_1 santykiu $w_1 : w_0$. Jeigu yra pasirinktas Farino taškas F_0, tai svorių santykį randame naudodamiesi trijų taškų paprastuoju santykiu $w_1/w_0 = \mathrm{r}(P_0, F_0, P_1)$. Faktiškai svorių tikrieji dydžiai mums nėra svarbūs, nes parametrizacija $\widehat{L}(t)$ priklauso tik nuo jų santykio. Čia ir yra Farino atradimas: keisdami taško F_0 padėtį atkarpoje, mes automatiškai manipuliuojame atkarpos galų svoriais.

Racionalios kvadratinės Bezje kreivės atveju turime du Farino taškus F_0, F_1, priklausančius atitinkamai atkarpoms P_0P_1, P_1P_2. Jie visiškai apibrėžia svorių santykį $w_0 : w_1 : w_2$ ir atvirkščiai.

Norėdami suprasti, kaip Farino taškai naudojami de Kastelžo algoritme racionalių Bezje kreivių atveju, susipažinsime su labai svarbia projektyvinės geometrijos konstrukcija.

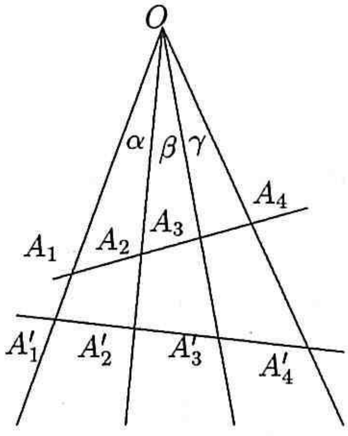
Dvigubasis santykis

Afininėje geometrijoje pagrindinis nekintantis dydis (invariantas) yra trijų kolinearių taškų paprastasis santykis $\mathrm{r}(A, B, C)$. Projektyvinėje geometrijoje analogišką vaidmenį vaidina keturių kolinearių taškų *dvigubasis santykis*

$$\mathrm{cr}(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{\mathrm{r}(A_1, A_2, A_4)}{\mathrm{r}(A_1, A_3, A_4)}.$$

Atvaizdis, nekeičiantis dvigubojo santykio, vadinamas *projektyviniu*. Paprasčiausias pavyzdys – tai centrinė projekcija.

Teorema. *Centrinė projekcija nekeičia dvigubojo santykio.*



8 pav.

Įrodymas. Iš 8 pav. matome, kad paprastieji santykiai išsireiškiami trikampių plotais

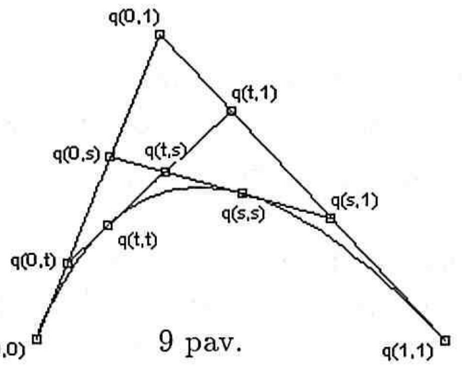
$$\mathrm{r}(A_1, A_2, A_3) = \Delta(A_1, A_2, O)/\Delta(A_2, A_3, O).$$

Tada pažymėję atkarpos A_iO ilgį l_i, $i = 1, 2, 3, 4$, gauname

$$\begin{aligned}
\operatorname{cr}(A_1, A_2, A_3, A_4) &= \frac{\Delta(A_1, A_2, O)/\Delta(A_2, A_4, O)}{\Delta(A_1, A_3, O)/\Delta(A_3, A_4, O)} = \\
&= \frac{(l_1 \cdot l_2 \cdot \sin\alpha)/(l_2 \cdot l_4 \cdot \sin(\beta+\gamma))}{(l_1 \cdot l_3 \cdot \sin(\alpha+\beta))/(l_3 \cdot l_4 \cdot \sin\gamma)} = \\
&= \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}.
\end{aligned}$$

Vadinasi, dvigubasis santykis priklauso tik nuo kampų tarp keturių tiesių, besikertančių taške O. Taigi $\operatorname{cr}(A_1, A_2, A_3, A_4) = \operatorname{cr}(A'_1, A'_2, A'_3, A'_4)$.

Keturių liestinių teorema. *Keturios konikės liestinės kerta viena kitą tuo pačiu dvigubuoju santykiu.*



9 pav.

Įrodymas. Iš pradžių teoremą patikriname parabolei $Q(t)$ pasinaudodami jos poliarizacija $q(t_1, t_2)$; t. y. kad visi keturi dvigubieji santykiai (kai $u = 0, t, s, 1$) yra lygūs

$$\operatorname{cr}\big(q(u,0), q(u,t), q(u,s), q(u,1)\big) = \frac{t}{1-t} \cdot \frac{1-s}{s}.$$

Bet kokia kita konikė yra parabolės centrinė projekcija $\widehat{Q}(t)$. Vadinasi, dvigubieji santykiai išlieka.

Kaip išvadą iš šios teoremos (kai $s = 1/2$) gauname de Kastelžo algoritmą racionalios kvadratinės Bezje kreivės atveju. Turėdami du Farino taškus $F_0 = \widehat{q}(0, 1/2)$, $F_1 = \widehat{q}(1, 1/2)$, papildomai randame atkarpos F_0F_1 Farino tašką

$$F_0^1 = \widehat{q}(1/2, 1/2) = \widehat{Q}(1/2) = \frac{w_0^1 F_0 + w_1^1 F_1}{w_0^1 + w_1^1}, \quad w_i^1 = \frac{w_i + w_{i+1}}{2}.$$

Po to atkarpas $P_0P_1 = \widehat{q}(0,0)\widehat{q}(0,1)$ ir $P_1P_2 = \widehat{q}(0,1)\widehat{q}(1,1)$ dalydami fiksuotu dvigubuoju santykiu $t : 1-t$ Farino taškų F_0, F_1 atžvilgiu, gausime $P_0^1 = \widehat{q}(0,t)$ ir $P_1^1 = \widehat{q}(1,t)$. Pagaliau konikės tašką $\widehat{Q}(t)$ gausime tokiu pat būdu dalydami atkarpą $P_0^1P_1^1$ taško F_0^1 atžvilgiu.

$\bullet\bullet\bullet\ \alpha + \omega\ \bullet\bullet\bullet$

Racionalus parametro keitimas

Racionalios Bezje kreivės atveju atsiranda papildoma galimybė keisti parametrą nekeičiant pačios kreivės. Afininė tiesės transformacija yra visiškai apibrėžta dviem taškais. Tuo tarpu projektyvinė – jau trimis taškais. Pavyzdžiui, jeigu 0 ir 1 yra fiksuoti, tai dar turime galimybę pasirinkti, kur atvaizduoti 1/2. Priminsime, kad projektyvinė transformacija nekeičia keturių taškų dvigubojo santykio. Žinodami, kur atvaizduojami trys taškai, galime rasti bet kokio ketvirto taško vaizdą, t.y. rekonstruoti visą atvaizdį. Pasirinkę du ketvertus 0, 1/2, t, 1 ir 0, b, t', 1, iš lygybės $\mathrm{cr}(0,1/2,t,1) = \mathrm{cr}(0,b,t',1)$ gauname

$$\frac{\frac{1}{2}/(1-\frac{1}{2})}{t/(1-t)} = \frac{b/(1-b)}{t'/(1-t')}, \quad \text{t.y.} \quad t' = \frac{\rho t}{(1-t)+\rho t}, \quad \rho = \frac{b}{1-b}.$$

Įstatę t' reikšmę į (**) formulę gausime tą pačią kreivę, tik su pakeista parametrizacija

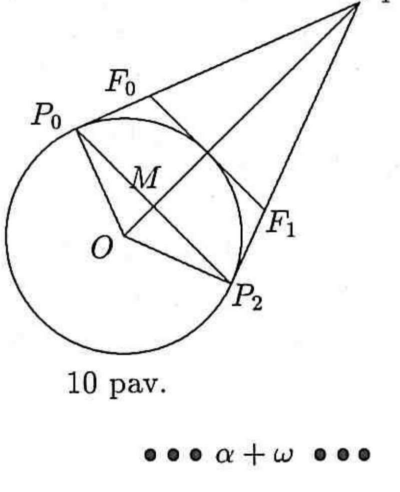
$$\widehat{Q}(t') = \frac{(w_0)P_0B_0^2(t) + (\rho w_1)P_1B_1^2(t) + (\rho^2 w_2)P_2B_2^2(t)}{(w_0)B_0^2(t) + (\rho w_1)B_1^2(t) + (\rho^2 w_2)B_2^2(t)}.$$

Kaip matome, kontroliniai taškai liko tie patys, tik svoriai w_0, w_1, w_2 perėjo į w_0, ρw_1, $\rho^2 w_2$.

Bet kokios kvadratinės Bezje kreivės atveju visų pirma galime tarti, kad $w_0 = 1$ (jei ne, tai padalijame (**) išraiškos skaitiklį ir vardiklį iš w_0). Po to keisdami parametrą pagal išvestą formulę su $\rho = 1/\sqrt{w_2}$, gausime vadinamąjį normalinį pavidalą, kai abu galiniai svoriai lygūs 1.

Apskritimo Bezje pavidalas

Dabar mes visiškai pasirengę rasti apskritimo lanko kontrolinius taškus P_i ir svorius w_i. Kadangi tiesės (P_0P_1) ir (P_1P_2) yra apskritimo liestinės, tai būtina sąlyga yra $|P_0P_1| = |P_1P_2|$. Tegu ieškomoji kreivė yra normalinio pavidalo, t.y. $w_0 = w_2 = 1$. Tada belieka rasti vienintelį svorį w_1.

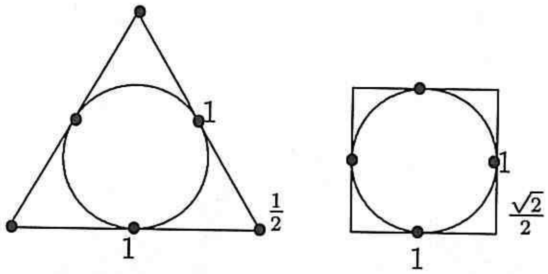


10 pav.

Farino taškai F_0 ir F_1 dalija atkarpas P_0P_1 ir P_2P_1 vienodu santykiu $w_1 : 1$. Be to, F_0F_1 liečia apskritimą taške $C = \widehat{Q}(1/2)$. Vadinasi, $|F_0F_1| = |F_0C|$, $\angle P_1P_0P_2 = \angle P_1F_0F_1$ ir

$$w_1 = \frac{|P_0F_0|}{|F_0P_1|} = \frac{|CF_0|}{|F_0P_1|} = \frac{|P_0M|}{|P_0P_1|} = \cos\phi;$$

čia $\phi = \angle P_1P_0P_2$. Dažniausiai vartojami kampai $\phi = 60^o$ ir $\phi = 45^o$, tada apskritimas atitinkamai sudaromas iš 3 ir 4 dalių (žr. 11 pav.).



11 pav