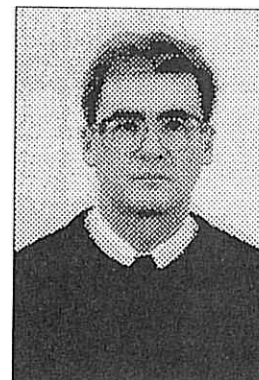


Kęstutis Karčiauskas

Geometrinio modeliavimo pradžiamokslis



Tikimės, skaitytojas jau perskaitė pirmąjį šio žurnalo straipsnį ir susipažino su trumpa, bet jaudinančia geometrinio modeliavimo istorija bei problemomis. Negniuždydami jo sudėtingomis formulėmis, bet ir nebarškėdami kaip tuščia skardinė, šiame straipsnelyje norime paaikškinti pagrindinius šios gražios ir įdomios srities matematinius principus. Tikslas, kaip matome, kilnus, tik į jį pasirinktas kelias gana rizikingas: mat tokia tarnystė dviem ponams dažniausiai baigiasi liūdnei (lengviau būti dviejų tarnų ponu). Kartu norime pademonstruoti, kaip kartais sprendžiant problemą tenka ne tiek vystyti matematinį aparatą, kiek pajauti tyrimo vaisiais besinaudosiančio nematematiko psichologiją. Dėl to dažnokai atrodo, kad tiek gautas rezultatas, tiek jo įrodymas labai jau paprasti. Vis dėlto manome, kad daugeliu tokių atvejų būdvardis „paprastas“ artimesnis būdvardžiui „suprantamas“ negu „lėkštas“. Taip pat norime parodyti, kad nagrinėjami matematiniai geometrinio modeliavimo principai tarpusavyje labai susiję. Tas sąsajas bandome išryškinti kiek patrepsėdami šios srities pionierių pramintais takais. Bet iš karto prisipažįstame, kad keliaudami gana laisvai interpretuojame tikrąją istoriją. Metodas senas kaip ir žmonija. Blogai, kai jis naudojamas užsakius tironams ar jų aplinkai, ar tuščiagarbiams politikams (sudėlioti skliaustelius, sukeisti žodžių tvarką ar papildyti sąrašą galite savo nuožiūra). Mūsų tikslas, primename, kilnus. Ir nors kelias į pragarą taip pat gerais norais grįstas, tikimės, kad kantrus skaitytojas pabaigoje nepasijus atsidūręs prie jo vartų. Galbūt kai kas pasijus prie jų priartėjęs, kai beskaitydamas apie Bezje kreives ir B-splainus aptiks kelis įrodymus. Bet minėtos dvi sąvokos - tai geometrinio modeliavimo šerdis. Todėl jas ir nuodugniau nagrinėjame. O žinodami nežalingą daugelio skaitytojų įprotį skaityti laikraštį ar žurnalą nuo galo, keletą svarbių pastabų paliekame pabaigai.

Apie interpoliacinius daugianarius ir kodėl jie mums nereikalingi

Tarkime, yra taškų seka $\mathbf{p}_i(x_i; y_i)$, $0 \leq i \leq n$. Jei $x_i \neq x_j$, kai $i \neq j$, tai nėra kliūčių ieškoti tokios funkcijos $f(x)$, kurios grafikui $y = f(x)$ priklausytų visi taškai \mathbf{p}_i , t. y. $f(x_i) = y_i$ kiekvienam i . Formuluojuant geometriškiau, tai reiškia, kad norime taškus \mathbf{p}_i sujungti kreive, kuri yra kokios nors funkcijos grafikas. Sprendinio galima ieškoti nagrinėjant įvairias funkcijas. Patyrinėkime

$$\bullet \bullet \bullet \alpha + \omega \bullet \bullet \bullet$$

Splaininės kreivės: kas ir kodėl, bet ne kaip, nes formulės dar nepasirodo

Panašios problemos buvo iškilusios ir kitose srityse. Todėl tai, ką nusprendė daryti kreivių ir paviršių tyrinėtojai, nebuvo labai nauja ar originalu – taškus jungti kreive, sudurstyta iš gabaliukų, kurių kiekvienas būtų nusakomas neaukšto laipsnio daugianariais. Tik geometriniame modeliavime ši paprasta idėja apsilvilo puošnų geometrinį rūbą, bet kartu ir nepamiršo šeimos, kurioje gimė. Be to, buvo suprasa, kad kreivių, kurios yra funkcijų grafikai, klasė yra ankštoka. Geriau yra nagrinėti parametrines kreives (teorija nėra sudėtingesnė, o galimybės kur kas platesnės). Tiems, kas su parametrinėmis kreivėmis nesusidūrė arba jas užmiršo, primename, kad parametrinės kreivės – tai kreivės plokštumoje arba erdvėje, kurias sudaro taškai $[x(t); y(t)]$ arba $[x(t); y(t); z(t)]$, kai t prabėga visas reikšmes kokiame nors intervale. Čia $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – parametro t funkcijos.

Chrestomatinis pavyzdys. Vienetinis apskritimas, kurio centras koordinatinių sistemos pradžia, yra parametrinė kreivė $[\cos t, \sin t]$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Iš karto norime pasakyti, kad sinusą ir kosinusą šiame straipsnyje minime pirmą ir paskutinį kartą. Mat trigonometrinės ir daugelis kitų jums žinomų elementariųjų funkcijų, lyginant su daugianariais kompiuteriui yra sraigės. Bet panašiai kaip prancūzai vertina specifinį sraigių skonį (turbūt kad ne greitį), taip ir specifiniams uždaviniams spręsti pravartu pasitelkti ne vien daugianarius. Bet norime pabrėžti, kad geometrinio modeliavimo stuburas – tai neaukšto laipsnio daugianariai ir racionaliosios funkcijos. Bet apie racionaliąsias funkcijas vėliau. Tada ir pamatysime, kad iš geometrinio modeliavimo apskritimo neišmetėme (ką galbūt jau pagalvojo paširpęs skaitytojas).

Dabar šiek tiek apie žymenis, kuriuos toliau vartosime. Kadangi nagrinėsime kreives, kurios parametrizuojamos daugianariais, tai jas paprastai užrašysime vektorine forma

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 t + \dots + \mathbf{P}_n t^n;$$

čia \mathbf{P}_i , $0 \leq i \leq n$, – taškai plokštumoje arba erdvėje, o daugyba iš skaliarinio reiškinių, sudėtis ar atimtis reiškia, kad visi tie aritmetiniai veiksmai atliekami su kiekviena taškų koordinate.

Standartinė atkarpos parametrizacija. Atkarpa, kurios galai yra taškai \mathbf{A} ir \mathbf{B} , – tai kreivė

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{A}(1 - t) + \mathbf{B}t, 0 \leq t \leq 1.$$

Be to,

$$\frac{|\mathbf{AP}(t_0)|}{|\mathbf{P}(t_0)\mathbf{B}|} = \frac{t_0}{1 - t_0}.$$

••• $\alpha + \omega$ •••

Nepatikliesiems patariame pasitikrinti, nes tuo naudosimės. O ir šiaip ne pro šalį apšilti prieš atšliaužiant rimtesnėms formulėms.

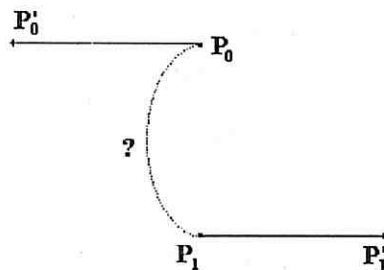
Ermitinis interpoliavimas arba kaip paprasta daryti išradimus

Kaip jau minėjome, splaininė kreivė geometriniame modeliavime – tai kreivė, sudaryta iš dalių, kurių kiekviena parametrizuojama neaukšto laipsnio daugianariais. Iš pradžių tas neaukštas laipsnis neviršijo 3. Dabar tuo neapsiribojama, nes kompiuterių galimybės didėja. Tačiau realiuose uždaviniuose laipsnio prieaugis skaičiuojamas vienetais, o ne dešimtėmis. O trečiojo laipsnio kreivės tebėra populiarios dėl pakankamo lankstumo ir paprastumo. Todėl ir mes daugelį geometrinio modeliavimo principų aiškinsime remdamiesi jomis ir vadinsime jas tiesiog kubinėmis kreivėmis.

Tarkime, \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_1 — fiksuoti kreivės galai, o \mathbf{P}'_0 , \mathbf{P}'_1 — fiksuoti liestinių vektoriai tuose galuose (žr. 3 pav.). Norime nubrėžti kubinę kreivę

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 t + \mathbf{A}_2 t^2 + \mathbf{A}_3 t^3, 0 \leq t \leq 1,$$

kuriai $\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}'(0) = \mathbf{P}'_0$, $\mathbf{P}'(1) = \mathbf{P}'_1$.



3 pav.

Skaitytojas gali nesunkiai patikrinti, kad tokia kubinė kreivė egzistuoja ir yra vienintelė, bei apskaičiuoti jos koeficientus \mathbf{A}_i . Nors koeficientų \mathbf{A}_0 ir \mathbf{A}_1 geometrinė prasmė akivaizdi, nes $\mathbf{A}_0 = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}'_0$, kitų dviejų prasmė yra neaiški. Viena iš kertinių geometrinio modeliavimo problemų yra ne tik sukonstruoti kreives, bet ir maksimaliai geometrizuoti naudojamus objektus. Tai labai svarbu interaktyviam projektavimui, kai konstruktorius, norėdamas pakeisti kreivės formą, pats savo nuožiūra keičia tam tikrus duomenis. Todėl pageidautina, kad jie turėtų pakankamai aišką geometrinę prasmę. Be to, tai palengvina ir patį teorijos vystymą.

Prie šio tikslo buvo priartėta, kai Fergusonas (*J. C. Ferguson*) kreivėms projektuoti pritaikė Hermito daugianarius. Mums rūpimu kubinių daugianarių atveju tai

$$H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \quad H_1(t) = -2t^3 + 3t^2,$$

$$\bar{H}_0(t) = t^3 - 2t^2 + t, \quad \bar{H}_1(t) = t^3 - t^2$$

Kadangi

$$\begin{aligned} H_0(0) = 1, & \quad H_0(1) = 0, & \quad H'_0(0) = 0, & \quad H'_0(1) = 0, \\ H_1(0) = 0, & \quad H_1(1) = 1, & \quad H'_1(0) = 0, & \quad H'_1(1) = 0, \\ \bar{H}_0(0) = 0, & \quad \bar{H}_0(1) = 0, & \quad \bar{H}'_0(0) = 1, & \quad \bar{H}'_0(1) = 0, \\ \bar{H}_1(0) = 0, & \quad \bar{H}_1(1) = 0, & \quad \bar{H}'_1(0) = 0, & \quad \bar{H}'_1(1) = 1, \end{aligned} \quad (\text{H})$$

ieškomąją kreivę galima užrašyti vadinamamuoju Ermito pavidalu:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 H_0(t) + \mathbf{P}_1 H_1(t) + \mathbf{P}'_0 \bar{H}_0(t) + \mathbf{P}'_1 \bar{H}_1(t).$$

Naudojant tiesinės algebros sąvokas, tai tereiškia, kad kubinių daugianarių standartinė monominė bazė $1, t, t^2, t^3$, neturinti aiškios geometrinės prasmės, pakeista Ermito baze $H_0(t), H_1(t), \bar{H}_0(t), \bar{H}_1(t)$, išsiskiriančia skaidresnėmis geometrinėmis savybėmis.

Išvada. Svarbu aktualiaame uždavinyje laiku pritaikyti paprastus, gerai žinomus dalykus. Problema tik ta, kad vieni tai sugeba padaryti, kiti — ne.

Pratimas. Kadangi dažnai tenka vartoti ne tik vienetinį intervalą $[0, 1]$, paskaičiuokite, kaip atrodys Ermito bazė intervale $[a, b]$. Reikia ieškoti tokių trečiojo laipsnio daugianarių, kuriems išvardytos savybės (H) būtų teisingos, kai daugianarių ir jų išvestinių reikšmės skaičiuosime atitinkamai intervalo galuose a ir b .

Kubiniai C^1 splainai arba kaip svarbu kiekvienam atseikėti pagal nuopelnus

Mes jau pasirengę (jeigu neužmiršote atlikti pratimą!) per bet kokią plokštumos ar erdvės taškų seką $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ nubrėžti glodžią splaininę kreivę. Atsiraitokime rankoves.

Tarkime, skaičių tiesėje fiksuota didėjanti seka t_0, t_1, \dots, t_n . Norime sukonstruoti kubinių kreivių seką $\mathbf{P}_i(t), 0 \leq i \leq n-1$, kuriai

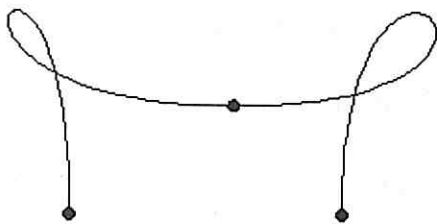
$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i(t_i) = \mathbf{p}_i, & \quad \mathbf{P}_i(t_{i+1}) = \mathbf{p}_{i+1}, & \quad 0 \leq i \leq n-1, \\ \mathbf{P}'_i(t_{i+1}) = \mathbf{P}'_{i+1}(t_{i+1}), & \quad 0 \leq i \leq n-2. \end{aligned}$$

Ką tik užrašyti reikalavimai — tai minimali programa. Pageidaujame, kad splaininė kreivė būtų glodi, o nenorėdami komplikuoti teorijos atskirų dalių

sandūros taškais parenkame fiksuotus taškus \mathbf{p}_i . Išrašytos sąlygos bus patenkintos, jei kiekviename taške fiksuosime liestinės vektorių \mathbf{p}'_i ir naudodamiesi Hermito daugianariais $H_0^i(t)$, $H_1^i(t)$, $\bar{H}_0^i(t)$, $\bar{H}_1^i(t)$ intervale $[t_i, t_{i+1}]$ užrašysime

$$\mathbf{P}_i(t) = \mathbf{p}_i H_0^i(t) + \mathbf{p}_{i+1} H_1^i(t) + \mathbf{p}'_i \bar{H}_0^i(t) + \mathbf{p}'_{i+1} \bar{H}_1^i(t).$$

Belieka pasirinkti išvestinių vektorius \mathbf{p}'_i ir uždavinys išspręstas. O kad su išvestinių vektoriais reikia pagarbiai elgtis, išpėja „gražuolė“ iš 4 pav., kuri vargu ar sulauks gerbėjų.

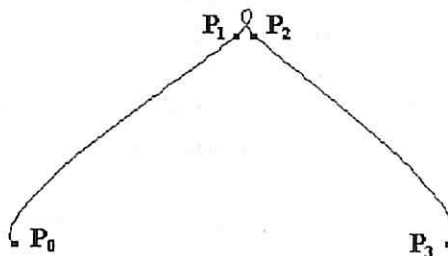


4 pav.

$\mathbf{Q}_i(t_i) = \mathbf{p}_i$, $\mathbf{Q}_i(t_{i+1}) = \mathbf{p}_{i+1}$, ir pasirenkame $\mathbf{p}'_i = \mathbf{Q}'_i(t_i)$. (Jei trys taškai yra tiesėje, tai parabolė išsigimsta į tiesę.) Tokiu būdu sandūros taškuose \mathbf{p}_i , $1 \leq i \leq n-1$, gauname liestinių vektorius \mathbf{p}'_i . Kraštiniai vektoriai \mathbf{p}'_0 ir \mathbf{p}'_n dažnai būna fiksuoti dėka kokių nors kitų samprotavimų (sąlygų), bet jei jų „etatai“ vis dėlto neužimti, galime nesivargindami pasirinkti $\mathbf{p}'_0 = \mathbf{Q}'_0(t_0)$, $\mathbf{p}'_n = \mathbf{Q}'_{n-1}(t_n)$. O jei norime brėžti uždarą kreivę, t. y. $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_0$, tai žymenimis $\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_1$, $t_{n+1} = t_n + (t_1 - t_0)$ cikliškai pratęsiame duomenis ir pasirenkame $\mathbf{p}'_0 = \mathbf{p}'_n = \mathbf{Q}'_n(t_n)$.

Kubiniai C^1 splainai dažniausia atrodo gana padoriai ir išsiskiria vertiniga lokalumo savybe. Bet atidesnis skaitytojas turbūt jaučia, kad dar negalima pakilia nuotaika keliauti toliau. Mat kubiniai C^1 , kaip ir kiti splainai, konstruojami remiantis skaičių seka t_0, t_1, \dots, t_n . Iš dangaus ji nenukrenta, o jei ją fiksuosime neatsižvelgę į taškų sekos $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ ypatumus, tai nubrėžta kreivė atrodys lyg iš pragaro iškilusi. Kubinį C^1 splainą (kreivės iš 4 pav. giminaitį), gautą fiksavus, rodos, paprasčiausią seką 0, 1, 2, 3, matome 5 pav. Bet skaičių seka, kuriai $|t_{i+1} - t_i|$ pastovus dydis, yra gera, jei atstumai tarp gretimų taškų \mathbf{p}_i daugmaž vienodi.

Mes ką tik suklydome neįvertinę pirmojo ir paskutiniojo intervalų — atstumai $|\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1|$ ir $|\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3|$ daug didesni už $|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2|$. Todėl intervaluose $[0, 1]$ ir $[2, 3]$ skubanti kreivė, neturėdama ką veikti ankštoje erdvėje tarp taškų \mathbf{p}_1 ir \mathbf{p}_2 , ėmė ir susuko kilpą. Ši skriauda



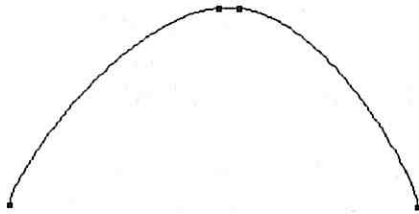
5 pav.

nesunkiai ištaisoma fiksavus vadinamąjį styginį dalijimą: intervalų $[t_i, t_{i+1}]$ ilgiai proporcingi stygų $\mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i+1}$ ilgiams $|\mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i+1}|$. (Turbūt nesunku suvokti, kad

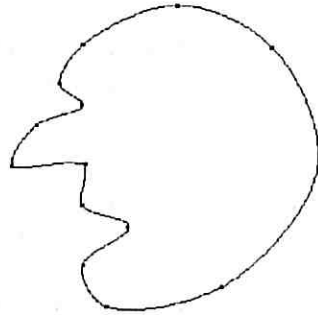
svarbu intervalų $[t_i, t_{i+1}]$ ilgių santykiai, o ne jų absoliutūs dydžiai.) Splainas įgyja gražesnę formą, jei fiksuojame dalijimą, kurio intervalų ilgiai proporcingi skaičiams $\sqrt{|P_i P_{i+1}|}$. Ir dar gražesnės kreivės brėžiamos, kai atsižvelgiama ne tik į stygų ilgius, bet ir į jų sudaromus kampus.

Verta pažymėti, kad šiuo metu sukurtos įvairios ir vis dar kuriamos naujos sekos $\{t_i\}$ parinkimo metodikos. Tai su fizika, mechanika ir empirika susijusi kryptis, kurioje jauni disertantai įgyja svarbių praktinių įgūdžių, reikalingų jiems vėliau dirbant firmų konstruktorių biuruose. Deja, turime pripažinti, kad tos firmos — tai „Opel“, „Renault“, „Ford“, o ne „Lietuviškas traktorius“.

Paskutinė gaida ne visai linksma. Ir kaip prie televizoriaus pailsėti prisėdusį skaitytoją iš ekrano užplūsta prievarta, seksas ir siaubas, taip ir čia jis išvysta ne lauktas graščias linijas ar formas, o vien tik kreives mutantes. Norėdami praskaidrinti skaitytojo nuotaiką, šį skirsnelį baigiame dviem paveikslėliais. 6 pav. pavaizduotas kubinis C^1 splainas per tuos pačius kaip ir 5 pav. taškus, kai naudojamas styginis dalijimas, o 7 pav. — uždaras kubinis C^1 splainas, kai intervalų ilgiai proporcingi $\sqrt{|P_i P_{i+1}|}$.



6 pav.



7 pav.

Apie dar glodesnius splainus arba kokie yra svarbūs yra skaitiniai metodai

Glodžius kubinius C^1 splainus sukonstruavome fiksavę liestinių vektorių. Taip pat aptarėme, kokios problemos iškyla juos pasirenkant. Tačiau liestinių vektorių galima nefiksuoti, bet reikalauti, kad kreivė sandūros taškuose būtų dar glodesnė, t. y. juose sutaptų gretimų dalių antrosios išvestinės. Taigi mes siekiame, kad būtų patenkintos sąlygos:

$$P_i(t_{i+1}) = P_{i+1}(t_{i+1}) = p_{i+1}, \quad P'_i(t_{i+1}) = P'_{i+1}(t_{i+1}),$$

$$P''_i(t_{i+1}) = P''_{i+1}(t_{i+1}), \quad 0 \leq i \leq n-2,$$

$$P_0(t_0) = p_0, \quad P_{n-1}(t_n) = p_n.$$

••• $\alpha + \omega$ •••

Norėdami išspręsti šį uždavinį, kiekvieną splaino dalį $\mathbf{P}_i(t)$, kaip ir anksčiau, užrašome Ermito pavidalu. Tik nefiksuojuame išvestinių vektorių \mathbf{p}'_i , bet skaičiuojame antrąsias išvestines ir sandūros taškuose jas lyginame. Gauname $(n-1)$ tiesinių lygčių $(n+1)$ išvestinių vektorių \mathbf{p}'_i atžvilgiu (primename, kad naudojamos vektorine kreivių užrašymo forma, todėl faktiškai turime dvi tiesinių lygčių sistemas plokštumos atveju ir tris — erdvės atveju). Fiksuodami ieškomajai kreivei dar dvi sąlygas, gauname $(n+1) \times (n+1)$ tiesinių lygčių sistemą kintamųjų \mathbf{p}'_i atžvilgiu. Ir, aišku, tikimės, kad sistema turės vienintelį sprendinį.

Tos dvi sąlygos parenkamos įvairiais būdais ir visais tais atvejais iš tikro gaunamas vienintelis sprendinys. Mes paminėsime tris dažniausiai pasitaikančius būdus.

- **Natūralieji splainai.** Natūralieji splainai gaunami fiksuojant kreivės galuose \mathbf{p}_0 ir \mathbf{p}_n nulinius antrosios išvestinės vektorius. Terminas „natūralieji splainai“ kilmę galima paaiškinti taip: jei leisime stangriai juostai pačiai pasirinkti maršrutą per taškus \mathbf{p}_i , tai prieš tašką \mathbf{p}_0 ir už tašką \mathbf{p}_n ji bus tiesi, o tiesinės parametrizacijos antroji išvestinė tapo lygi nuliui.
- Galuose \mathbf{p}_0 ir \mathbf{p}_n fiksuojami liestinių vektoriai \mathbf{p}'_0 ir \mathbf{p}'_n . Kartais tie vektoriai atkeliauja iš realios fizinės situacijos, bet dažniausiai jiems parinkti naudojami skaitytojui turbūt nesunkiai nuspėjami standartiniai matematiniai metodai.
- **Uždarieji splainai.** Kadangi uždarosios kreivės $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_0$ (papildomas sandūros taškas), tai nenuostabu, kad šiuo atveju reikalaujame $\mathbf{P}'_{n-1}(t_n) = \mathbf{P}'_0(t_0)$, $\mathbf{P}''_{n-1}(t_n) = \mathbf{P}''_0(t_0)$.

Pasižiūrėkime, kokią lygčių sistemą gauname natūraliesiems splainams. Pažymėkime $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$, $0 \leq i \leq n-1$. Tada matricine forma lygčių sistema atrodo taip:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{p};$$

čia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\Delta_0 & \Delta_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \Delta_1 & 2(\Delta_0 + \Delta_1) & \Delta_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Delta_{n-1} & 2(\Delta_{n-2} + \Delta_{n-1}) & \Delta_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \Delta_{n-1} & 2\Delta_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -3\frac{\Delta_1}{\Delta_0} & 3(\frac{\Delta_1}{\Delta_0} - \frac{\Delta_0}{\Delta_1}) & 3\frac{\Delta_0}{\Delta_1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -3\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} & 3(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} - \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}}) & 3\frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} \mathbf{p}'_0 \\ \mathbf{p}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}'_{n-1} \\ \mathbf{p}'_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n-1} \\ \mathbf{p}_n \end{pmatrix}.$$

Pirmoji $(n+1) \times (n+1)$ matrica, pravarde „trijstrižainė“, atsako už skaičiavimų stabilumą (neužmirškime, kad n nesikuklina viršyti ir tūkstantį), ir skaitinių metodų pasaulyje turi nemažą autoritetą. Mat:

- nenuliniai elementai tik teigiami;
- jie yra tik pagrindinėje įstrižainėje ir šalia jos;
- įstrižainės elementas didesnis už greta toje pačioje eilutėje esančių elementų sumą.

Tokio tipo tiesinių lygčių sistemos sprendžiamos stabiliais skaitiniais metodais.

Ką tik pateiktos sistemos lygtys, išskyrus pirmąją ir paskutinę, reiškia, kad sandūros taškuose \mathbf{p}_i , $1 \leq i \leq n-1$, antrosios išvestinės sutampa. Todėl kitais mūsų minėtais ir neminėtais atvejais lygčių sistemos skiriasi nuo pateiktosios tik pirmąją ir paskutinę lygtimis. Ir nors svarbiu uždarų kreivių atveju koeficientų prie \mathbf{p}'_i matrica neišsiskiria visomis anksčiau išvardytomis savybėmis, bet lygčių sistema sprendžiama irgi gana stabiliais skaitiniais metodais.

Šiame skirsnyje nagrinėtos kreivės vadinamos kubiniais interpoliaciniais C^2 splainais. Jie labai svarbūs, nes dažnai konkretaus techninio uždavinio atveju vien paprasto glodumo, kai sutampa tik pirmosios išvestinės, neužtenka. Ir norime pabrėžti, kad be skaitinių metodų niekaip neišsiversime. Čia ne kubiniai C^1 splainai, kur viskas skaičiuojama paprastomis formulėmis, sudarytomis tik iš kelių šalia esančių taškų koordinatų. Be to, skyrelyje apie B-splainus sužinosime, kokius dar mokesčius tenka mokėti už papildomą kreivės glodumą.

Beje kreivės arba kas nuostabaus buvo įžvelgta drovioje parabolėje

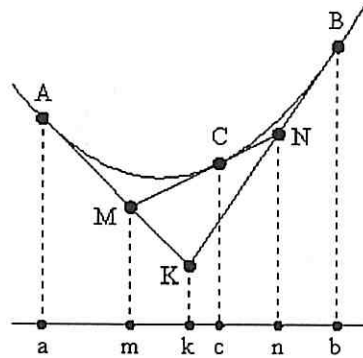
Palikime kol kas ramybėje tūkstančius taškų interpoliuojančias kreives ir panagrinėkime iš mokyklos laikų gerai pažįstamą kuklią parabolę. Ir dar sykį įsitikinsime, kad nieko neįmanomo šiame pasaulyje nėra: biaurusis ančiukas virsta puikiu oju gulbinu; sniego gniūžtė sukelia galingą laviną; vagis tampa gerbiamu bankininku. Kuriai iš ką tik paminėtų nuostabaus virsmo kategorijų derėtų priskirti parabolės sukeltą sąjūdį, nuspręsite patys. O triukšmą sukėlė, rodos, paprastas teiginys.

1 teiginys. Tegul A ir B — parabolės taškai, C — taškas, priklausantis jų ribojamam parabolės lankui. Raide K pažymėkime parabolės liestinių taškuose A ir B sankirtą, o M ir N — liestinės taške C sankirtas atitinkamai su AK ir BK . Tada

$$\frac{|AM|}{|MK|} = \frac{|KN|}{|NB|} = \frac{|MC|}{|CN|}.$$

••• $\alpha + \omega$ •••

Įrodymas. Pažymėkime atitinkamomis mažosiomis raidėmis teiginyje minimų taškų pirmąsias koordinatas (žr. 8 pav.).



8 pav.

Akivaizdu, kad pakanka įrodyti lygybę

$$\frac{m-a}{k-m} = \frac{n-k}{b-n} = \frac{c-m}{n-c}.$$

Iš pradžių raskime bet kokių dviejų parabolės liestinių taškuose $(x_0; px_0^2)$ ir $(x_1; px_1^2)$ sankirtą. Parabolės liestinės taške $(x_i; px_i^2)$ lygtį $y - px_i^2 = 2px_i(x - x_i)$ perrašome pavidalu $y = 2px_ix - px_i^2$. Sprendžiame lygčių sistemą

$$\begin{cases} y = 2px_0x - px_0^2, \\ y = 2px_1x - px_1^2 \end{cases}$$

ir gauname $x = (1/2)(x_0 + x_1)$ (y mūsų nedomina). Vadinasi,

$$k = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a+c}{2}, \quad n = \frac{b+c}{2}.$$

Dar keletas aritmetinių veiksmų ir *įrodymas baigtas*.

Naudodami standartinę atkarpos **AK** parametrizaciją, tašką **M** užrašome pavidalu $M = A(1-t) + Kt$. Tada iš teiginio ir jau minėtos standartinės atkarpos parametrizacijos savybės išplaukia, kad

$$N = K(1-t) + Bt, \quad C = M(1-t) + Nt.$$

Įstatę **M** ir **N** išraiškas į taško **C** išraišką, gauname

$$C = (1-t)^2 A + 2(1-t)tK + t^2 B.$$

Keisdami t intervale $[0, 1]$, gauname parabolės lanko parametrizaciją, kuri visiškai apibrėžiama lanko galais ir liestinių tuose galuose sankirta.

O dabar pabandykime ką tik gautą parabolės taškų generavimo rekurentinę procedūrą apibendrinti (šis maniakiškas polinkis apibendrinti išskiria matematikus iš visų kitų. Kadangi dažnai sėkmingai parinkti žymenys paryškina apibendrinimo logiką, jais iš pradžių ir pasirūpinkime.

Pažymėkime $\mathbf{P}_0 = \mathbf{A}$, $\mathbf{P}_1 = \mathbf{K}$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{B}$. Fiksavus $t \in [0, 1]$, procedūra nusakoma tokiais žodžiais: yra taškų seka $\mathbf{P}_0^0 = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1^0 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2^0 = \mathbf{P}_2$ (nulinis etapas); pirmajame etape gretimiems taškams $\mathbf{P}_i^0, \mathbf{P}_{i+1}^0, 0 \leq i \leq 1$, priskiriame jų atkarpos tašką $\mathbf{P}_i^1 = (1-t)\mathbf{P}_i^0 + t\mathbf{P}_{i+1}^0$; antrajame etape gretimiems taškams $\mathbf{P}_0^1, \mathbf{P}_1^1$ priskiriame jų atkarpos tašką $\mathbf{P}_0^2 = (1-t)\mathbf{P}_0^1 + t\mathbf{P}_1^1$. Taškas \mathbf{P}_0^2 ir yra parametrą t atitinkantis parabolės taškas $\mathbf{P}(t)$.

Tarkime, turime taškų seką $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$. Pažymėkime juos $\mathbf{P}_i^0 = \mathbf{P}_i, 0 \leq i \leq n$, ir fiksuokime $t \in [0, 1]$. Daugelis dabar turbūt parašytų tokią procedūrą:

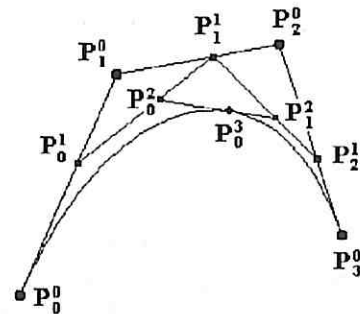
$$\mathbf{P}_i^j = \mathbf{P}_i^{j-1}(1-t) + \mathbf{P}_{i+1}^{j-1}t, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 0 \leq i \leq n-j.$$

Mes tik patarsime šią rekurentinę procedūrą išprausti į tokią kombinatorinę schemą:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbf{P}_0^0 & & & & \\ & & \mathbf{P}_1^0 & & \mathbf{P}_0^1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \ddots \\ \mathbf{P}_{n-1}^0 & & \mathbf{P}_{n-2}^1 & \dots & \mathbf{P}_0^{n-1} & & \\ \mathbf{P}_n^0 & & \mathbf{P}_{n-1}^1 & \dots & \mathbf{P}_1^{n-1} & & \mathbf{P}_0^n = \mathbf{P}(t). \end{array}$$

Kai $n = 3$, ją iliustruojame 9 pav.

Ši schema svarbi tuo, kad iš jos nesunkiai gaunamos kreivės, kurios galutinį pavidalą dar nustatysime, išvestinės. Be to, joje slypi labai svarbus dalijimo algoritmas. Pati schema vadinama šių kreivių atradėjo P. de Kastelžo (*P. de Casteljau*) algoritmu – nors tiek buvo pagerbtas išradėjas. O pačios kreivės vadinamos Bezje (*P. Bézier*) vardu. Kiek pasigraudenę dėl tokios neteisybės, pabandykime užrašyti analizinę Bezje kreivių išraišką. Taip pat ne pro šalį geriau suprasti, ką gavome, lengvabūdiškai apibendrinę parabolės generavimo procedūrą.



9 pav.

2 teiginys. Teisinga tokia lygybė

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n C_n^i (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{P}_i.$$

Įrodymas. Teiginį įrodysime matematinės indukcijos būdu. Kai $n = 1$, tai tiesiog tapatybė, o kai $n = 2$ — teiginys jau įrodytas (parabolės atvejis). Tarkime, kad teiginys teisingas, kai seką sudaro ne daugiau kaip n taškų. Parodysime teiginio teisingumą sekai $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$.

Nesunku suvokti, kad taško $\mathbf{P}(t)$ generavimo procedūroje taškas \mathbf{P}_0^{n-1} gaunamas kaip galutinis procedūros taškas, kai fiksuota seka $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{n-1}$, o taškas \mathbf{P}_1^{n-1} — kai fiksuota seka $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$. Todėl pagal indukcijos prielaidą

$$\mathbf{P}_0^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i (1-t)^{n-1-i} t^i \mathbf{P}_i,$$

$$\mathbf{P}_1^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i (1-t)^{n-1-i} t^i \mathbf{P}_{i+1}.$$

Išraiškoje

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \mathbf{P}_0^n = (1-t)\mathbf{P}_0^{n-1} + t\mathbf{P}_1^{n-1} = \\ &= (1-t) \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i (1-t)^{n-1-i} t^i \mathbf{P}_i \right) + t \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i (1-t)^{n-1-i} t^i \mathbf{P}_{i+1} \right) \end{aligned}$$

sutraukę narius su tais pačiais taškais \mathbf{P}_i ir naudodamiesi žinoma tapatybe

$$C_n^i = C_{n-1}^{i-1} + C_{n-1}^i,$$

gauname užrašytą formulę ir tuo įrodymą baigiame.

Pažymėkime $B_i^n(t) = C_n^i (1-t)^{n-i} t^i$. Tada

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t).$$

Funkcijos $B_i^n(t)$ vadinamos n -ojo laipsnio Bernšteino daugianariais ir sudaro daugianarių, kurių laipsnis neviršija n , bazę. Taigi negeometrinę monominę bazę $1, t, \dots, t^n$ pakeitėme Bernšteino baze. Gautasis kreivės pavidalas vadinamas n -ojo laipsnio Bezje kreive, o taškai \mathbf{P}_i vadinami kontroliniais kreivės taškais. Išvardysime svarbiausias (bet toli gražu ne visas) Bezje kreivės savybes. Jos ir laiduoja Bernšteino bazės geometriškumą.

- **Iškilo apvalko savybė** (*convex hull property*).

Bezje kreivės $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$, taškai priklauso taškų $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ iškilam apvalkui.

Tai gauname tiesiog iš kreivės konstrukcijos: pradėdami atkarpomis $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}$, kiekvienu etapu imame atkarpos, kurios galai sukonstruoti prieš tai

buvusiame etape, tašką. Be to, tai išplaukia iš Bernšteino daugianarių **vieneto skaidinio** (*partition of unit*) savybės:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$$

ir iš $B_i^n(t) \geq 0$, $t \in [0, 1]$. Minėta vieneto skaidinio savybė yra labai svarbi ir raudona gija driekiasi per visą Bezje kreivių ir paviršių teoriją. O gaunama ji iš tapatybės $((1-t) + t)^n = 1$.

- **Skaidymas** (*subdivision*).

Taškas $\mathbf{P}(t_0)$, $0 \leq t_0 \leq 1$, suskaido Bezje kreivę į dvi dalis, kurių kiekviena irgi yra Bezje kreivė: segmento $\mathbf{P}(t)$, $0 \leq t \leq t_0$, kontroliniai taškai yra $\mathbf{P}_0^0, \mathbf{P}_0^1, \mathbf{P}_0^2, \dots, \mathbf{P}_0^n$, o segmento $\mathbf{P}(t)$, $t_0 \leq t \leq 1$, kontroliniai taškai yra $\mathbf{P}_0^n, \mathbf{P}_1^{n-1}, \mathbf{P}_2^{n-2}, \dots, \mathbf{P}_n^0$.

Įrodymas nėra labai sudėtingas, bet keliomis eilutėmis jo neperteiksime.

- **Variacijos mažėjimo savybė** (*variation diminishing property*).

Tiesės ir plokščios Bezje kreivės sankirtos taškų yra ne daugiau negu tiesės ir kontrolinių taškų laužtės $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_n$ sankirtos taškų (erdvinei Bezje kreivei tiesė keičiama plokštuma).

Trumpai paaiškinsime, kodėl yra taip, bet griežtas įrodymas reikalauja kruopštumo.

Naudojantis antrąja savybe kiekvienu žingsniu naujai gaunamos Bezje kreivės dalis vėl dalijame į du segmentus (paprastumo dėlei kiekvieną sykį galime imti $t_0 = 1/2$). Parodoma (tuo nesunku patikėti), kad smulkėjanti kontrolinių taškų laužtė konverguoja į nagrinėjamą Bezje kreivę. Taip pat nesunku įžvelgti, kad de Kastelžo algoritmas geometrine forma tai lyg laužtės kampų kapojimas (žr. 9 pav.). O tiesė plokštumoje (ar plokštuma erdvėje) kerta apkapotą laužtę ne dažniau negu pačią laužtę.

- **Iškilumo savybė** (*convexity property*).

Jei kontrolinių taškų laužtė $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_n$ iškila, tai ir Bezje kreivė yra iškila. Tai faktiškai yra variacijos mažėjimo savybės išvada.

- **Laipsnio kėlimas** (*degree elevation*).

Trumpai paaiškinsime problemos esmę. Jei naudojama standartinė monominė bazė, tai n -ojo laipsnio kreivė užrašoma kaip $(n+1)$ -ojo laipsnio kreivė paprasčiausiai prie t^{n+1} prirašant tašką su nulinėmis koordinatėmis. Bernšteino bazės atveju yra sudėtingiau, nes keičiasi visi baziniai daugianariai, o ne vien įtraukiamas naujas elementas. Žodžiu, reikia išsiaiškinti, kaip n -ojo laipsnio Bezje kreivę

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t)$$

••• $\alpha + \omega$ •••

užrašyti pavidalu

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \tilde{\mathbf{P}}_i B_i^{n+1}(t).$$

Tai daroma taip: lygybėje

$$\mathbf{P}(t) = \left(\sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t) \right) ((1-t) + t)$$

atliekame aritmetinius veiksmus, dešinę pusę sugrupuojame išskirdami $(n+1)$ -ojo laipsnio Bernšteino daugianarius. Gauname

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \tilde{\mathbf{P}}_i B_i^{n+1}(t); \quad \text{čia} \quad \tilde{\mathbf{P}}_i = \frac{i}{n+1} \mathbf{P}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{P}_i, \quad 0 \leq i \leq n+1.$$

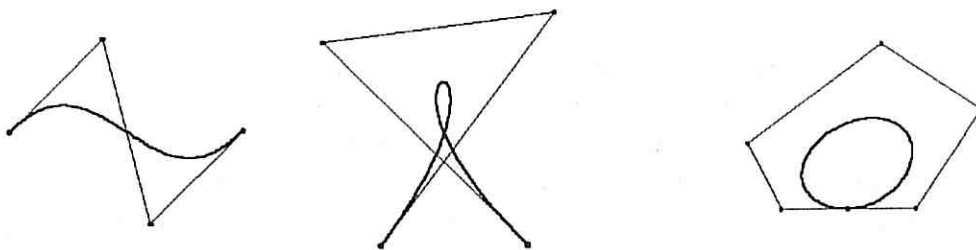
Taigi matome, kaip apskaičiuojami naujieji kontroliniai taškai $\tilde{\mathbf{P}}_i$. Ir turbūt atkreipėte dėmesį į mistinius kontrolinius taškus \mathbf{P}_{-1} ir \mathbf{P}_{n+1} . Neišsigąskite, nes dauginami iš nulio, jie pranyksta.

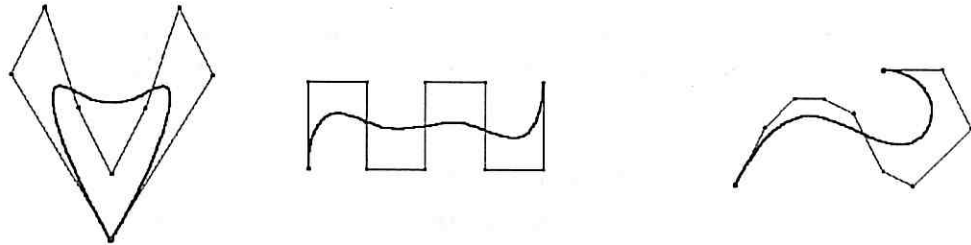
Laipsnio kėlimas paprastai naudojamas tokioje situacijoje. Kad skaičiams būtų unifikuoti ir vyktų greičiau, daug sistemų apdoroja tik fiksuoto laipsnio kreives. Tai reiškia, kad su aukštesnio laipsnio kreivėmis nereikia jų ir erzinti, o projektavimo eigoje atsirandančias žemesnio laipsnio kreives laipsnio kėlimu kilstelėjame iki sistemos reikalavimų.

Be išvardytų savybių, dar lengvai įrodoma, kad:

- $B_i^n(t)$ intervale $[0, 1]$ įgyja maksimumą taške i/n ;
- $\mathbf{P}'(0) = n(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$, $\mathbf{P}'(1) = n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1})$;
- $\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}_n$ (dėl akivaizdumo vos nepamiršome paminėti).

Pastarieji trys kuklūs bevardžiai teiginiai kartu su anksčiau išvardytomis garbingomis savybėmis ir paaiškina, kodėl Bezje kreivė mėgdžioja kontrolinių taškų laužtės elgesį. Jei minėta laužtė nėra rafinuotai parinkta, tai leidžia atsipėti kreivės formą. Štai keletas pavyzdžių.





10 pav.

Norime atkreipti dėmesį į Bezje kreivių savybių pavadinimus. Tai raktiniai šios teorijos terminai. Juos išidėmėjęs ir dar šiek tiek su Bezje kreivėmis paeksperimentavęs, skaitytojas tikrai bus savas bet kurioje anglakalbių modeliuotojų kompanijoje.

Ir jau žinome, kaip svarbu brėžiant splainines kreives atsižvelgti į santykinį intervalų ilgį. Todėl Bezje kreivės nagrinėjamos bet kokiame intervale $[a, b]$, ne vien vienetiniame. Bernšteino bazė intervale $[a, b]$ apibrėžiama formulėmis

$$B_i^n(t) = C_n^i \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-i} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^i, \quad 0 \leq i \leq n,$$

o n -ojo laipsnio Bezje kreivė $\mathbf{P}(t)$ šiame intervale užrašoma

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Pratimas. Patikrinkite, kad n -tojo laipsnio Bezje kreivei $\mathbf{P}(t)$, apibrėžtai intervale $[a, b]$, teisinga:

$$\mathbf{P}'(a) = \frac{n}{b-a}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0); \quad \mathbf{P}'(b) = \frac{n}{b-a}(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1});$$

$$\mathbf{P}''(a) = \frac{n(n-1)}{(b-a)^2}(\mathbf{P}_2 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_0);$$

$$\mathbf{P}''(b) = \frac{n(n-1)}{(b-a)^2}(\mathbf{P}_n - 2\mathbf{P}_{n-1} + \mathbf{P}_{n-2}).$$

Verta pažymėti, kad Bezje kreivė, kaip taškų visuma, visiškai nusakoma kontrolinių taškų seka ir nepriklauso nuo to, kokiame intervale ji apibrėžta.

Vis dėlto turbūt jaučiame, kad išliaupsintos Bezje kreivių savybės kol kas lyg aktoriai be scenos. Nors trumpam pasigėrėkime jų daugiabriauniais talentais žiūrėdami, kaip jos veikia efektyviame algoritme.

Splaininių kreivių sankirtos radimas

Pagrindiniai veikėjai: pirmoji splaininė kreivė; antroji splaininė kreivė; Bezje kreivės ir pirmosios dvi jų savybės bei kontroliniai taškai.

Veiksmo vieta: Plokštuma.

Pirmasis veiksmas. Abiejų splaininių kreivių kiekviena dalis persikūnija į Bezje pavidalą. O jei jos tokio pavidalo jau yra, tai laukia savo eilės užkulisiuose.

Antrasis veiksmas. Kiekvienai Bezje kreivei randamas mažiausias jos kontrolinius taškus apimantis stačiakampis, kurio kraštinės lygiagrečios su koordinacių ašimis.

Trečiasis veiksmas. Peržiūrimos visos sukonstruotų stačiakampių poros, kuriose vienas stačiakampis atitinka pirmosios splaininės kreivės dalį, o kitas – antrosios kreivės dalį. Peržiūros metu tikrinama, ar jie kertasi. Jei stačiakampiai nesikerta, tai iškilo apvalko savybė laiduoja, kad ir juos atitinkančios Bezje kreivės nesikerta. Veiksmo pabaigoje be teisės grįžti į sceną išlydime į užkulsius tas Bezje kreives, kurios nerado bendros kalbos su jokia kitos splaininės kreivės dalimi.

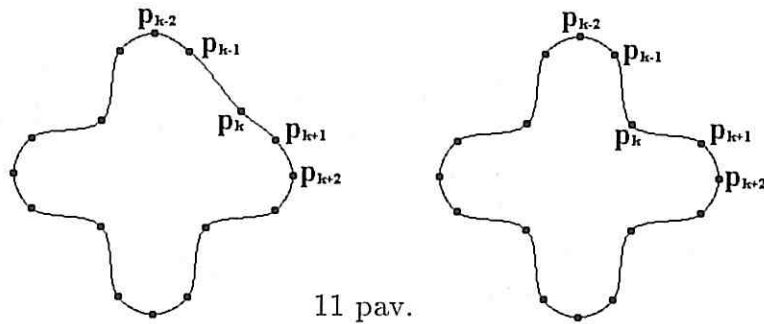
Ketvirtasis veiksmas. Scenoje likusios Bezje kreivės, remdamosios skaidymo savybe, skyla į dvi dalis. Ir „*but life still goes on*“ – naujoji Bezje kreivių karta kartoja antrąjį, trečiąjį ir pastarąjį veiksmus. O algoritmas stabdomas, kai visų naujausių stačiakampių kraštinių ilgiai tampa mažesni už pasirinktą leistiną paklaidą.

Remarka. Konstruoti vietoje jau minėtų paprastų stačiakampių tikruosius Bezje kreivių kontrolinių taškų iškilus apvalkus gal ir nebūtų istorinė klaida, bet energijos švaistymas tai tikrai. Mat iškilų apvalkų radimas ir jų sankirtos testavimas vyksta daug lėčiau už atitinkamus veiksmus su stačiakampiais.

B-splainai arba kaip kartais svarbu rūpintis vien savo kiemo reikalais

O dabar grįžkime prie jau nagrinėtų interpoliacinių splainų. Nejaugi besivaikydami didesnio glodumo kubiniai C^2 splainai nieko, lyginant su kukliais kubiniais C^1 splainais, neprarado? Kaip tuoj pamatysime, jie neteko labai svarbios lokalumo savybės. Pasiaiškinkime, kas tai.

Tarkime, jūs nubrėžėte kubinį C^1 splainą ir esate nepatenkinti kokia nors jo sritimi (projektavimo eigoje tai dažnokai atsitinka). Jei likusi splaino dalis atitinka lūkesčius, aišku, keisite tik tuos sekos \mathbf{p}_i taškus, kurie yra jus erzinančioje srityje, ir vėl brėšite kreivę per pakeistą taškų seką. Kadangi išvestinėms įvertinti kubiniai C^1 splainai išnaudoja tik kelis gretimus taškus, pakeitus vieną tašką \mathbf{p}_k splainas pasikeis tik tarp taškų \mathbf{p}_{k-2} , \mathbf{p}_{k-1} , \mathbf{p}_k , \mathbf{p}_{k+1} , \mathbf{p}_{k+2} . Tai reiškia, kad reikia naujai perskaičiuoti tik keturias splaino dalis ir gausime naują kreivę (žr. 11 pav.).



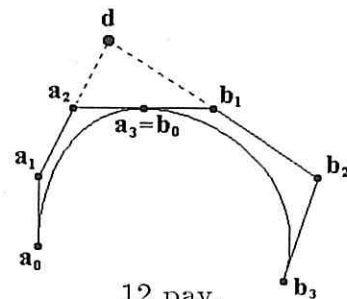
11 pav.

Jei taškų nedaug, tai ši savybė ypatingo vaidmens nevaizduoja. Tačiau jau esame minėję būtinybę brėžti kreivę per tūkstančius taškų. Todėl nesunku suvokti, kad tokioje situacijoje splaino lokalumo savybė – pakeitus dalį duomenų splainas keičiasi tik nedidelėje srityje – yra labai vertinga. Būtent šios savybės ir trūksta interpoliaciniams kubiniams C^2 splainams. Mat, pakeitus vieną tašką p_k , keičiasi kiekviena splaino dalis. Jei taškai išsidėstę tolygiai, tai, kuo toliau nuo keičiamo taško, tuo splainas keičiasi mažiau, o tie pokyčiai paprasta akimi dažnai ir nepastebimi. Juos galima ignoruoti, pavyzdžiui, modeliuojant batus. Bet jei taip atsainiai būtų elgiamasi su nežymiais pokyčiais aviacijos firmos konstruktorių biure, sukonstruoti lėktuvai aerodinaminėmis savybėmis tikriausiai taptų panašūs į Niutono obuolius.

Norint išvengti bręstančios tragedijos buvo atkreiptas dėmesys į Šionbergo (*I. J. Schoenberg*) atrastas B-splainines funkcijas. Remiantis jomis išlaikomas pageidaujamas splaino glodumas ir neprarandama lokalumo savybė. Bet prieš pateikiant tikslų (gana formalų) jų apibrėžimą, pabandykime pasiaiškinti, kaip mums rūpimoje situacijoje geometriškai išnyra B-splainai.

Geometrinė B-splainų kilmės versija

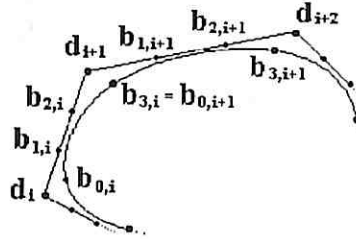
Tarkime, turime dvi gretimuose vienetinio ilgio intervaluose apibrėžtas kubines Beze kreives, kurių kontroliniai taškai yra atitinkamai a_0, a_1, a_2, a_3 ir b_0, b_1, b_2, b_3 . Jei pirmosios kreivės pabaiga sutampa su antrosios pradžia, tai $a_3 = b_0$. Jei šiame sandūros taške, kurį pažymėsime p , sutampa jų pirmosios ir antrosios išvestinės, tai gauname, kad $3(a_3 - a_2) = 3(b_1 - b_0)$ ir $6(a_3 - 2a_2 + a_1) = 6(b_2 - 2b_1 + b_0)$. Iš pirmosios lygybės gauname $p = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}b_1$, o iš antrosios gauname $2a_2 - a_1 = 2b_1 - b_2$. Pažymėję $d = 2a_2 - a_1$, gauname $a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}d$ ir $b_1 = \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}b_2$. Geometrinė šių formulų interpretacija yra paprasta: taškas d yra tiesių, jungiančių vidinius kontrolinius taškus a_1 ir a_2 bei b_1 ir b_2 , sankirta; a_2 yra atkarpos a_1d vidurio taškas,



12 pav.

o \mathbf{b}_1 – atkarpos $\mathbf{d}\mathbf{b}_2$ vidurio taškas; \mathbf{p} yra atkarpos $\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1$ vidurio taškas (žr. 12 pav.).

Pritaikykime šią patogią geometrinę išvestinių sutapimo interpretaciją C^2 splainams, kai intervalų $[t_i, t_{i+1}]$ ilgiai lygūs 1. (Ne veltui mes įkyriai zyzėme apie būtinybę geometrizuoti naudojamas sąvokas.) Tuo tikslu kiekvieną kubinę kreivę $\mathbf{P}_i(t)$ užrašome Bezje pavidalu ir jos kontrolinių taškų seką pažymime $\mathbf{b}_{0,i}, \mathbf{b}_{1,i}, \mathbf{b}_{2,i}, \mathbf{b}_{3,i}, 0 \leq i \leq n-1$. Tiesių $\mathbf{b}_{1,i}, \mathbf{b}_{2,i}$ ir $\mathbf{b}_{1,i+1}, \mathbf{b}_{2,i+1}$ sankirtos taškus pažymime $\mathbf{d}_{i+1}, 0 \leq i \leq n-2$ (žr. 13 pav.).



13 pav.

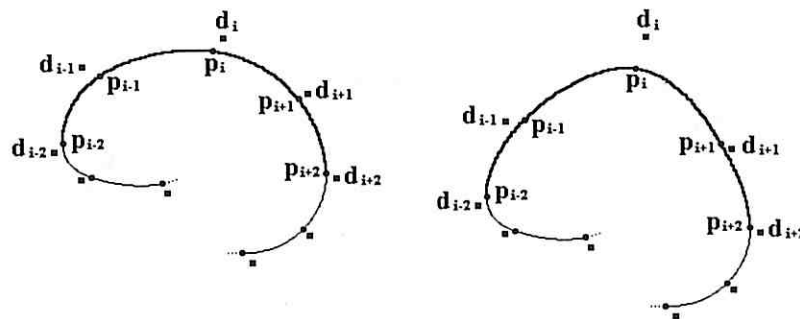
Kadangi $\mathbf{b}_{1,i}$ yra atkarpos $\mathbf{d}_i\mathbf{b}_{2,i}$ vidurio taškas, o $\mathbf{b}_{2,i}$ – atkarpos $\mathbf{b}_{1,i}\mathbf{d}_{i+1}$ vidurio taškas, gauname, kad $\mathbf{b}_{1,i}$ ir $\mathbf{b}_{2,i}$ dalija atkarpą $\mathbf{d}_i\mathbf{d}_{i+1}$ į tris lygias dalis. Todėl procedūra

$$\mathbf{b}_{1,i} = \frac{2}{3}\mathbf{d}_i + \frac{1}{3}\mathbf{d}_{i+1}, \quad \mathbf{b}_{2,i} = \frac{1}{3}\mathbf{d}_i + \frac{2}{3}\mathbf{d}_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-2),$$

$$\mathbf{b}_{0,i} = \frac{1}{2}\mathbf{b}_{2,i-1} + \frac{1}{2}\mathbf{b}_{1,i}, \quad \mathbf{b}_{3,i} = \frac{1}{2}\mathbf{b}_{2,i} + \frac{1}{2}\mathbf{b}_{1,i+1} \quad (2 \leq i \leq n-2),$$

naudodama vien taškus $\mathbf{d}_i, 1 \leq i \leq n-1$, visiškai atstato kreivių $\mathbf{P}_i(t), 2 \leq i \leq n-3$, kontrolinius taškus. Nesunku suvokti, kaip seką $\{\mathbf{d}_i\}$ reikia papildyti taškais $\mathbf{d}_{-1}, \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_n, \mathbf{d}_{n+1}$, kad minėta procedūra galėtume atstatyti ir kreivių $\mathbf{P}_0(t), \mathbf{P}_1(t), \mathbf{P}_{n-2}(t), \mathbf{P}_{n-1}(t)$ kontrolinius taškus.

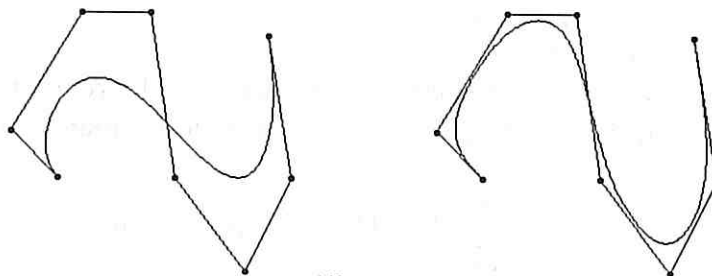
Keliomis skaičiavimų eilutėmis galite patikrinti, kad, paėmus bet kokią taškų \mathbf{d}_i seką, šia procedūra sukonstruota Bezje kreivių seka sandūros taškuose turės sutampančias pirmąsias ir antrąsias išvestines. Todėl, jei keisite ne pačius taškus \mathbf{p}_i , o taškus \mathbf{d}_i , tai galėsite norima linkme keisti nedidelę splaino sritį. Mat iš konstrukcijos išplaukia, kad taškas \mathbf{d}_i daro įtaką tik kreivėms $\mathbf{P}_{i-2}(t), \mathbf{P}_{i-1}(t), \mathbf{P}_i(t), \mathbf{P}_{i+1}(t)$. Ir jokios mistikos, kaip kai kas gal spėjo pagalvoti, čia nėra — mat keisdami tik vieną tašką \mathbf{d}_i specialiu būdu keičiame tris sandūros taškus $\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}$ (žr. 14 pav.).



14 pav.

Dabar tarkime, kad parinkti taškai $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$. Pažymėkime $\mathbf{d}_{-1} = 2\mathbf{d}_0 - \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_{n+1} = 2\mathbf{d}_n - \mathbf{d}_{n-1}$. Tada aptartoji procedūra pagamins mums kubinį

splainą, kurio galai yra \mathbf{d}_0 ir \mathbf{d}_n , išvestinės galuose atitinkamai lygios $3(\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0)$ ir $3(\mathbf{d}_n - \mathbf{d}_{n-1})$, o pati kreivė mėgdžioja laužtės $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1 \dots \mathbf{d}_n$ elgesį. Panašu į Bezje kreivę, tiesa? Bezje kreivė ir jos kontrolinių taškų laužtė pavaizduota 15 pav. kairėje, o tą laužtę atitinkanti B-splaininė kreivė –dešinėje. Pastaroji, kaip matome, tikrai yra „guvesnė beždžionėlė“.

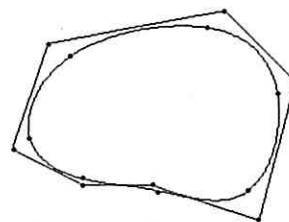


15 pav.

Matematiškai šį jos guvumą pagrįsti nėra sunku. Taip pat siūlome pagalvoti, kaip cikliškai pratęsti duomenis tuo atveju, kai $\mathbf{d}_0 = \mathbf{d}_n$, ir kaip nubrėžti uždara B-splainą. Jei gausite ką nors panašaus į 16 pav. kreivę, tai B-splainai jau yra jūsų draugai.

Ką tik pateikta kreivių brėžimo schema, dažnai vadinama „kampų kapojimu“, labai patinka žmonėms, mėgstantiems kombinatorinius metodus, o pačios funkcijos jiems nerūpi. Bet pabandykite, nors ir glaustai (ir be formulių) išsiaiškinti, kur čia pasislėpusios B-splaininės funkcijos.

Norint gauti analizinę B-splaininių funkcijų išraišką, tereikia Bezje kreivių $\mathbf{P}_k(t)$ kontrolinius taškus išreikšti taškais \mathbf{d}_i ir gautas išraiškas sugrupuoti taškų \mathbf{d}_i atžvilgiu. Išraiškos prie \mathbf{d}_i ir yra B-splaininės funkcijos. Kiekviena jų nelygi nuliui tik keturiuose gretimuose intervaluose. Kiek kruopščiau tenka skaičiuoti, jei intervalų $[t_i, t_{i+1}]$ ilgiai nevienodi. Tokia veikla tikrai naudinga, nes padeda geriau pajauti B-splainų geometriją. Bet gilios teorijos taip nesukurtume. Tad trumpam pažvelkime į formaliąją B-splainų pusę, kuri kai kam gal pasirodys kaip tik šviesioji jų pusė.



16 pav.

Formalioji B-splainų versija

Tarkime, fiksuota skaičių, vadinamųjų mazgų, seka

$$t_0 < t_1 < t_1 < \dots < t_{n+k} < t_{n+k+1}, \quad n \geq k.$$

Normuotos r -ojo laipsnio B-splaininės funkcijos N_i^r , $0 \leq r \leq k$, rekursyviai apibrėžiamos formulėmis:

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{jei } t \in [t_i, t_{i+1}), \\ 0, & \text{jei } t \notin [t_i, t_{i+1}), \end{cases} \quad 0 \leq i \leq n+k;$$

••• $\alpha + \omega$ •••

kai $r \geq 1$,

$$N_i^r(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_i^{r-1}(t) + \frac{t_{i+r+1} - t}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(t), \quad 0 \leq i \leq n + k - r.$$

Taip apibrėžtos funkcijos N_i^r tenkina sąlygas:

- $N_i^0(t) > 0$, jei $t \in (t_i, t_{i+r+1})$,
- $N_i^0(t) = 0$, jei $t \notin (t_i, t_{i+r+1})$,
- $\sum_{i=0}^n N_i^r(t) = 1$, jei $t \in (t_r, t_{n+1})$,
- intervale $t \in [t_i, t_{i+r+1}]$ funkcijos N_i^r yra $(r - 1)$ -diferencijuojamos.

Fiksavus taškų \mathbf{d}_i seką, $0 \leq i \leq n$, r -ojo laipsnio B-splaininė kreivė apibrėžiama formule

$$P(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{d}_i N_i^r(t), \quad t \in [t_r, t_{n+1}].$$

Taškai \mathbf{d}_i vadinami de Būro (*C. de Boor*) taškais.

Pateiktas funkcijų N_i^r apibrėžimas nėra pats bendriausias. Jis nesunkiai modifikuojamas taip, kad galiotų ir jei kai kurie mazgai sutampa (kartotiniai mazgai). O jei visų intervalų $[t_i, t_{i+1}]$ ilgiai lygūs 1, tai integravimą permaniusiam skaitytojui gal bus lengviau suvokti tokį rekursyvų funkcijų N_i^r apibrėžimą:

$$N_i^r(t) = \int_{t-1}^t N_i^{r-1}(u) du.$$

Racionaliosios Bezje kreivės arba dar kartą apie pagarbą konstruktoriui

Kol kas Bezje kreivė išdrįso būti tik parabolės lankas. Todėl visiškai netoleruotina, kad už borto liko ne tik didysis žmonijos atradimas — apskritimas, bet ir konstruktorių seniai naudojamos elipsė bei hiperbolė. Jas pilnaverčiam kūrybiniam gyvenimui gražiname į modeliuotojų arsenalą įtraukdami vadinamąsias racionaliąsias Bezje kreives. Aiškinant, kaip jos atsiranda, užteks vien centrinės projekcijos. Tačiau rimtai tiriant racionaliąsias kreives, reikia neblogai orientuotis tiek projektyvinėje, tiek algebrinėje geometrijoje.

Tarkime, fiksavome erdvės koordinačių sistemą $Oxyz$. Plokštuma, kurioje gyvens būsima racionali Bezje kreivė, tai $z = 1$, o centrinės projekcijos centras — tai koordinačių pradžia O . Racionali plokščia n -ojo laipsnio Bezje kreivė apibrėžiama kaip erdvinės n -ojo laipsnio Bezje kreivės centrinė projekcija plokštumoje $z = 1$. Bet jei daugiau niekuo nesirūpintume, tai konstruktoriui dirbant su plokščia racionali kreive tektų įsivaizduoti jos pirmtakę erdvėje. Tai vargu ar jam patiktų. O jei tektų dirbti su plačiai vartojamomis erdvinėmis racionaliomis kreivėmis ar racionaliais paviršiais, tai kiekvieną kartą vargšui konstruktoriui tektų ropštis į keturmatę erdvę. Manome, jo ten nei riestainiu priviliotumėme,

nei lazda nugintume. Todėl privalome pasirūpinti, kad jis galėtų ramiai dirbti įprastoje aplinkoje su jam įprastais kontroliniais taškais. O apsvarstę, ko siekiame, pažiūrėkime, kaip tai įgyvendinama.

Erdvės taško $(x; y; z)$ centrinė projekcija plokštumoje $z = 1$ yra taškas $(x/z; y/z)$. Paskutinę koordinatę mes sąmoningai praleidžiame, nes ji visiems plokštumos taškams lygi 1. Pažymėkime $\mathbf{P}_i(x_i; y_i)$ erdvinės Bezje kreivės $\tilde{\mathbf{P}}(t)$ kontrolinio taško \mathbf{P}_i , $0 \leq i \leq n$, centrinę projekciją. Tada $\tilde{\mathbf{P}}_i = (w_i x_i; w_i y_i; w_i)$,

$$\tilde{\mathbf{P}}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{\mathbf{P}}_i B_i^n(t) = \left(\sum_{i=0}^n w_i x_i B_i^n(t); \sum_{i=0}^n w_i y_i B_i^n(t); \sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) \right).$$

Pažymėję $\mathbf{P}(t)$ kreivės $\tilde{\mathbf{P}}(t)$ centrinę projekciją, gauname

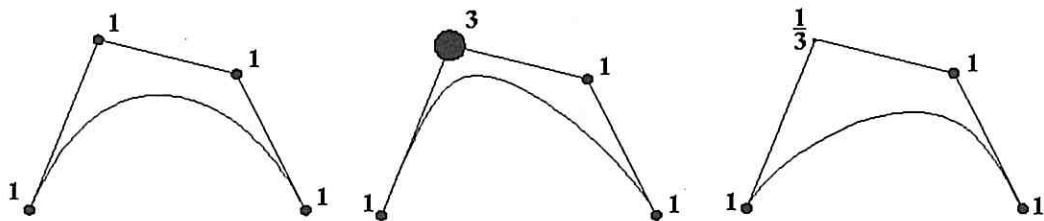
$$\mathbf{P}(t) = \left(\frac{\sum_{i=0}^n w_i x_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}, \frac{\sum_{i=0}^n w_i y_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} \right).$$

Vektorine forma racionali n -ojo laipsnio Bezje kreivė užrašoma taip:

$$\mathbf{P}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}.$$

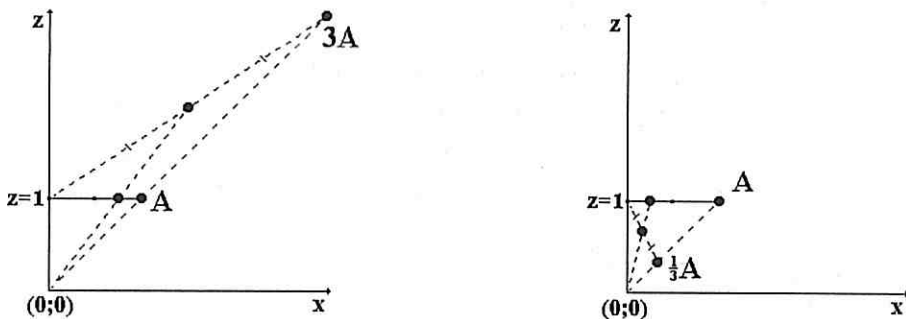
Jei šioje išraiškoje plokštumos taškus pakeisime erdvės taškais \mathbf{P}_i , tai gausime erdvinę racionalią Bezje kreivę. Taškai \mathbf{P}_i vadinami kontroliniais taškais, o skaičiai w_i — atitinkamų kontrolinių taškų svoriais.

Lengva patikrinti, kad racionali kreivės $\mathbf{P}(t)$ galiniai taškai yra \mathbf{P}_0 ir \mathbf{P}_n , kuriuose ji liečia tieses $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ ir $\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{P}_n$. Taigi racionali kreivės yra panašios į paprastas Bezje kreives (visų panašumų ir nevardijame). Bet kartais turi ir savų kaprizų (todėl ir įdomesnės). O kaip kontroliniai taškai tukdami ar liesdami veikia kreivės formą, konstruktoriai greitai suvokia šiek tiek paeksperimentavę su naujojo tipo kreivėmis. Tokio eksperimento fragmentą matome 17 pav. (prie kontrolinių taškų parašyti jų svoriai).



17 pav.

Manome, kad 18 pav. padės be formulių suvokti, kodėl didėjant kontrolinio taško svoriui kreivė artėja prie jo, o mažėjant — tolsta.



18 pav.

Apie racionaliąsias antrojo laipsnio Bežje kreives bei apskritimo, elipsės ir hiperbolės reabilitaciją skaitykite R. Krasausko straipsnį „Klasikinė geometrija ir Bežje kreivės“ šio žurnalo puslapiuose.

Bežje paviršiai arba atsisveikinimas pobūvio įkarštyje

Prisijaukę Bežje ir kitokias kreives, nors akimirksniui žvilgtelkime į geometrinio modeliavimo paviršius.

Sudėtingo paviršiaus geometriją dažnai galima lengviau suprasti įsivaizduojant jį kaip kintančių pažįstamų kreivių šeimą. Tad ir mes pradėkime konstruoti paviršių iš besikeičiančių n -ojo laipsnio Bežje kreivių. Užrašykime šią kreivių šeimą pavidalu

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_j(u) B_j^n(v);$$

čia $\mathbf{P}_j(u)$ jau nebe fiksuoti, o nuo parametro u priklausantys taškai. Kadangi nenorime išsiskirti su tokiomis mielomis Bežje kreivėmis, nusprendžiame, kad $\mathbf{P}_j(u)$ — tai m -ojo laipsnio Bežje kreivės. Užrašę

$$\mathbf{P}_j(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{P}_{ij} B_i^m(u), \quad 0 \leq j \leq n,$$

ir įstatę tai į ankstesnę $\mathbf{P}(u, v)$ išraišką, gauname

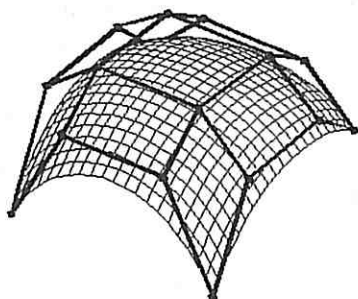
$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v), \quad (a \leq u \leq b, c \leq v \leq d).$$

$\mathbf{P}(u, v)$ vadinama bilipsnio $m \times n$ Bežje skiaute. Taškai \mathbf{P}_{ij} vadinami kontroliniais taškais ir sudaro vadinamąjį skiautės kontrolinį tinklą. Kreivės, ribojančios skiautę, yra Bežje kreivės, o pati skiautė bando mėgdžioti kontrolinio tinklo elgesį.

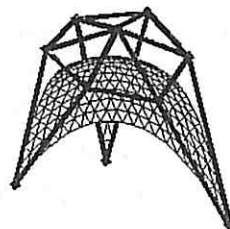
Ką tik apibrėžtos Beze skiautės vadinamos tenzorinės sandaugos paviršiais. Labai svarbios teoriniu požiūriu (nors praktikoje mažiau prigijusios) yra trikampės Beze skiautės. Dėl paprastumo tarkime, kad jų apibrėžimo sritis yra parametru u, v plokštumoje esantis trikampis, nusakomas nelygybėmis $u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1$. Trikampė n -ojo laipsnio Beze skiautė apibrėžiama formule

$$\mathbf{T}(u, v) = \sum_{\substack{i, j, k \geq 0 \\ i+j+k=n}} \mathbf{T}_{ijk} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j (1-u-v)^k.$$

Taškai \mathbf{T}_{ijk} vadinami kontroliniais taškais ir sudaro trikampės Beze skiautės kontrolinį tinklą. Jo ir tenzorinės sandaugos paviršiaus kontrolinio tinklo struktūros yra skirtingos. Bilaispnio 3×3 Beze skiautė ir jos kontrolinis tinklas pavaizduoti 19 pav., o trikampė 3-ojo laipsnio skiautė ir jos kontrolinis tinklas – 20 pav.



19 pav.



20 pav.

Štai šioje vietoje, gal kam ir netikėtai, spaudžiame stabdžius. Mat dabar reikėtų suformuluoti keletą kreivių teorijos sąvokų atitikmenų paviršiams. Kartais tai trivialu, kartais tenka elgtis atsargiau. Manome, atidesnis skaitytojas dažnai kuo puikniausiai susidorotų su šia užduotimi. O norint supažindinti, pavyzdžiui, su paviršių glodaus jungimo problemomis (Kunso (*S. A. Coons*) paviršiais, Gregory (*J. A. Gregory*) skiautėmis), tektų atlikti šokių tokių parengiamąjį darbą. Bet senka ir skaitytojo kantrybė, ir redakcijos skirtas puslapių limitas. Tai tegul ir lieka intriga. Ją dar pakaitinsime pažymėdami, kad paviršių geometrija yra kur kas sudėtingesnė. Netyrinėtų sričių čia taip pat daugiau. Bet negi norėtume, kad būtų atvirkščiai? Be to, paviršių gerosios savybės ir kaprizai visapusiškiau atsiskleidžia nagrinėjant juos ne atskirai, o tarpusavio sąveikoje. Nes ką nors konstruojant, tenka paviršius ir sukirsti, ir sankirtą suglodonti, ir kokią nors skylę išpjauti. Šie ir daugelis kitų konstravimo etapų dabar pakankamai automatizuoti. Vystantis kreivių ir paviršių teorijai, tobulėja ir projektavimo sistemos. Sparčiai „raumenis auginantis“ kompiuteris taip pat jas daro daug efektyvesnes. Bet mus supantis pasaulis toks įdomus, sudėtingas ir neišsemiamas. Todėl daugelio geometrinio modeliavimo ekspertų nuomone, visuomet bus reikalingas žmogus su savo neformalizuojama intuicija. Galingasis kompiuteris jo nepakeis, bus tik labai šaunus pagalbininkas. Neužmirškime šito.

Matematiką ir tapybą sieja didelis panašumas. Tapybos ištakos yra fiziniėje realybėje, matematikos – irgi, tačiau dailininkas nėra fotografas, o matematikas nėra inžinierius... Kaip arti realybės turi būti tapyba (ir matematika) – tai subtilių svarstymų tema. Paprašyti dailininko nutapyti konkretų siužetą tolygu paprašyti matematiko išspręsti realų uždavinį. Dabartinė tapyba ir dabartinė matematika domisi žymiai bendresniais dalykais, kai kas sako – pernelyg bendrais. Galbūt būtų idealu, jei realybės jausmas nuolatos išliktų, tačiau ne taip akivaizdžiai kaip aprašomojoje geometrijoje arba tapyboje, iliustruojančioje mediciną. < ... >

Perspektyvos atradimas davė dailininkams naudingą techniką, panašiai kaip nulinis atradimas matematikams. Senasis menas yra toks pat geras kaip ir naujasis, senoji matematika yra lygiai tokia pat gera kaip naujoji. Skoniai keičiasi abiejose srityse, bet dvidešimtojo amžiaus dailininkas jaučia simpatiją pirmųjų žmonių tapybai ant urvų sienų, o dvidešimtojo amžiaus matematikas – babiloniečių trupmenų džiuglėms.

Paveikslas turi būti nutapytas, o po to žiūrimas; teorema turi būti atspausdinta, o po to skaitoma. Dailininkas, kuris mąsto apie gerus paveikslus, ir matematikas, svajojantis apie gražias teoremas, yra diletantai. Nematomas meno kūrinys yra neužbaigtas. Tapyboje ir matematikoje egzistuoja tam tikri objektyvūs kokybės kriterijai. Dailininkai kalba apie struktūrą, liniją, formą, tekstūrą, matematikai – apie teisingumą, galiojimą, naujumą, bendrumą, tačiau šiuos reikalavimus lengviausia patenkinti. Tiek dailininkai, tiek matematikai diskutuoja tarpusavyje, ar šiuos objektyvius kriterijus verta aiškinti jaunesiems; pradedantieji gali juos neteisingai suprasti ir pervertinti, prarasdami svarbesnių subjektyvių kokybės kriterijų nuojautą. Tapyba ir matematika turi istoriją, tradicijas ir plėtrą.

P. Halmos. Mathematics as a Creative Art.