Uždaviniai

Skyrelį tvarko **Giedrius Alkauskas**

Uždavinius, kuriuos šįkart skelbiame, sprendė Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados dalyviai Švenčionyse (α.31 - α.33) ir matematikos komandinės olimpiados „Baltijos kelias 1996" dalyviai Suomijoje (α.34 - α.53). Pabandykite ir jūs. Galbūt juos bespręsdami sugalvosite naują. Primename, kad galite mums siųsti tiek naujus uždavinius, tiek jau paskelbtų uždavinių sprendimus. Teisingus ir gražius sprendimus spausdinsime.

α.21. Iškilojo šešiakampio $RSTUVZ$ kraštinių ilgių suma lygi P, įstrižainių RU, SV ir TZ ilgių suma lygi D. Įrodykite, kad

$$\frac{2}{3} < \frac{P}{D} < 2.$$

α.22. Su kiekvienu natūraliuoju n pažymėkime $S(n)$ visų natūraliųjų skaičių nuo 1 iki n skaitmenų sumų sumą. Raskite $S(1996)$.

α.23. Ar galima plokštumoje nubrėžti:

a) 5 vienodus apskritimus,

b) 6 vienodus apskritimus, kad kiekvienas apskritimas liestų lygiai tris apskritimus.

α.24. Keliautojas, eidamas iš Vilniaus į Kauną, kiekvieną dieną nueina kaskart vis didesnį atstumą, bet ne daugiau kaip $\frac{2}{3}$ viso kelio. Įrodykite, kad kurios nors dienos pabaigoje jis bus nutolęs nuo abiejų miestų ne mažiau kaip po $\frac{1}{3}$ viso kelio.

α.25. Trapecijos $ABCD$ pagrindai $AD = 4, BC = 2$, šoninė kraštinė $AB = 2$. Raskite visas galimas kampo ACD reikšmes.

α.26. Įrodykite, kad daugianario

$$(1 + 2x - x^2 + 3x^3 + 3x^4)^n, \quad n \geq 2,$$

visi koeficientai teigiami.

α.27. Skaičius 365 išreikštas kelių skirtingų kvadratų suma. Kiek daugiausiai dėmenų gali būti toje sumoje?

α.28. Iš dešimties skaičių rinkinio

$$2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13$$

reikia taip išbraukti kelis skaičius, kad iš likusių nebebūtų galima sudaryti sumos, lygios tiksliam kvadratui (t. y. jokių dviejų, trijų, keturių, ..., visų skaičių suma nėra lygi sveikojo skaičiaus kvadratui). Kiek daugiausiai skaičių gali likti rinkinyje?

α.29. Ant begalinių laiptų n pirmųjų laiptelių padėta po akmenį. Sizifas ir kipšiukas akmenis perkėlinėja pakaitomis. Sizifas gali perkelti bet kurį pasirinktą akmenį aukštyn ant pirmojo neužimto laiptelio. Kipšiukas gali bet kurį akmenį nukelti vienu laipteliu žemyn, jei tas laiptelis laisvas (žinoma, jis neturi kur nukelti akmens nuo pirmojo laiptelio). Sizifas pradeda ir stengiasi bent vieną akmenį užkelti kuo aukščiau, o kipšiukas stengiasi Sizifui trukdyti. Ant kelinto laiptelio aukščiausiai Sizifas gali užkelti akmenį, kad ir kaip jam trukdytų kipšiukas?

α.30. Išspręskite lygtį

$$x^3 - y^3 = xy + 61$$

natūraliaisiais skaičiais.

α.31. Sekos $a_1, \ldots, a_n, \ldots, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ yra tokios, kad $a_1 > 0, b_1 > 0$,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n}, \quad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n}.$$

Įrodykite, kad

$$a_{25} + b_{25} > 10\sqrt{2}.$$

α.32. Du moksleiviai žaidžia tokį žaidimą. Jie pakaitomis vienas po kito vietoje žvaigždučių į sistemą

$$\begin{aligned} *x + *y + *z &= 0, \\ *x + *y + *z &= 0, \\ *x + *y + *z &= 0 \end{aligned}$$

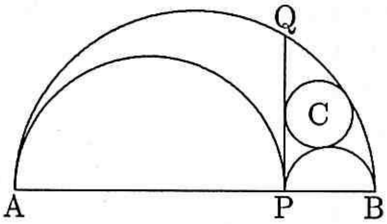
įrašinėja skaičius. Pirmasis žaidėjas laimi, jei gautoji lygčių sistema turi nenulinį sprendinį. Ar visada pirmasis žaidėjas gali laimėti?

α.33. Nustatykite, kiek kraštinių turi į apskritimą įbrėžtas daugiakampis, kurio kraštinių ilgių kvadratų suma yra didžiausia.

••• $\alpha + \omega$ •••

α.34. Per bet kurias dvi nelygiagrečias taisyklingo 1996-kampio įstrižaines išveskime tieses. Tegu α, β yra šių tiesių sankirtos kampai. Įrodykite, kad α/β yra racionalusis skaičius.

α.35. Skritulys C liečia du pusskritulius bei atkarpą PQ, kuri yra statmena skersmeniui AB. Raskite skersmens AB ilgį, jei skritulio C plotas lygus 9π, o didžiojo pusskritulio dalies be skritulio C ir abiejų mažųjų pusskritulių plotas lygus 39π.



α.36. Tegu $ABCD$ yra vienetinis kvadratas, o P, Q yra du plokštumos taškai: Q yra apie trikampį BPC, D – apie trikampį PQA apibrėžtųjų apskritimų centrai. Raskite visas galimas atkarpos PQ ilgio reikšmes.

α.37. Keturkampis $ABCD$ yra trapecija (AD lygiagreti BC), taškai P, Q parinkti tiesėse AB ir CD taip, kad kampai $\angle CPD$, $\angle BQA$ yra didžiausi. Tarkime, taškas P yra atkarpoje. Įrodykite, jog $\angle CPD = \angle BQA$.

α.38. Iškilusis keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą, o r_a, r_b, r_c, r_d yra atitinkamai į trikampius BCD, ACD, ABD, ABC įbrėžtųjų apskritimų spinduliai. Įrodykite, kad $r_a + r_c = r_b + r_d$.

α.39. Tegu a, b, c, d yra sveikieji teigiami skaičiai, $ab = cd$. Įrodykite, kad skaičius $a + b + c + d$ yra sudėtinis.

α.40. Sveikųjų skaičių seka $a_1, a_2, \ldots$ sudaroma pagal tokią taisyklę: $a_1 = 1, a_2 = 2$; jei $n \geq 3$,

$$a_n = \begin{cases} 5a_{n-1} - 3a_{n-2}, & \text{jei } a_{n-2}a_{n-1} \text{ yra lyginis skaičius,} \\ a_{n-1} - a_{n-2}, & \text{jei } a_{n-2}a_{n-1} \text{ yra nelyginis skaičius.} \end{cases}$$

Įrodykite, kad su visais n $a_n \neq 0$.

α.41. Apibrėžkime tokią natūraliųjų skaičių seką:

$$x_1 = 19,\ x_2 = 95,\ x_n = [x_{n-1}, x_{n-2}] + x_{n-2},\ n \geq 3;$$

čia $[a, b]$ yra bendras mažiausias sveikųjų skaičių a, b kartotinis. Raskite bendrą didžiausiąjį skaičių x_{1995}, x_{1996} daliklį.

α.42. Tegu k, n yra du sveikieji skaičiai, $1 < k \leq n$. Raskite sveikąjį skaičių b ir aibę A, sudarytą iš n sveikųjų skaičių, kad būtų patenkintos šios sąlygos:

1) jokių skirtingų $k - 1$ aibės A elementų sandauga nesidalija iš b;

2) bet kokių skirtingų k aibės elementų sandauga dalija b;
3) jei $a, a' \in A$ ir $a \neq a'$, tai a nedalija a'.

α.43. Skirtingų natūraliojo skaičiaus n daliklių skaičių (įskaitant 1 ir n) žymėsime $d(n)$. Tegu $a > 1$ ir $n > 0$ yra tokie sveikieji skaičiai, kad $a^n + 1$ yra pirminis. Įrodykite, kad

$$d(a^n - 1) \geq n.$$

α.44. Tegu $x_1, x_2, \ldots, x_{1996}$ yra tokie realieji skaičiai, kad su bet kokiu antrojo laipsnio polinomu $W(x)$ bent trys iš skaičių

$$W(x_1), W(x_2), \ldots, W(x_{1996})$$

yra lygūs. Įrodykite, kad tada bent trys iš skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_{1996}$ irgi yra lygūs.

α.45. Tegu S yra sveikųjų skaičių aibė, $0 \in S, 1996 \in S$. Tarkime, bet kurio nenulinio daugianario su koeeficientais iš S sveikoji šaknis (jei jis ją turi) irgi priklauso S. Įrodykite, kad tada $-2 \in S$.

α.46. Raskite visas lygines ir visas nelygines funkcijas, apibrėžtas sveikųjų skaičių aibėje ir su bet kokiu sveikuoju x tenkinančias sąlygą

$$f(x) = f(x^2 + x + 1).$$

α.47. Funkcijos

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0, \quad n > 1,$$

grafikas kerta tiesę $y = b$ taškuose $B_1, B_2, \ldots, B_n$, o tiesę $y = c$ ($c \neq b$) taškuose $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (taškai numeruojami iš kairės į dešinę). Tegu P yra dešiniau taško C_n esantis tiesės $y = c$ taškas. Raskite sumą

$$\mathrm{ctg}(\angle B_1C_1P) + \mathrm{ctg}(\angle B_2C_2P) + \ldots + \mathrm{ctg}(\angle B_nC_nP).$$

α.48. Su kokiomis realiosiomis teigiamomis a ir b reikšmėmis nelygybė

$$x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \geq x_1^a x_2^b x_3^a + x_2^a x_3^b x_4^a + \ldots + x_n^a x_1^b x_2^a$$

yra teisinga su visais sveikaisiais $n > 2$ ir su visais teigiamais realiaisiais skaičiais $x_1, x_2, \ldots, x_n$?

α.49. Du žaidėjai paeiliui ženklina begalinės šachmatų lentos langelius. Vienas rašo ženklą $\times$, kitas – o. Laimi tas žaidėjas, kuris savo ženklu sugeba pažymėti 2×2 dydžio kvadratą. Ar pradedantis žaidėjas visada gali laimėti?

••• $\alpha + \omega$ •••

α.50. Panaudojus skaitmenis $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ir 9 lygiai po vieną kartą, užrašytas triženklis skaičius A, du dviženkliai skaičiai $B, C, B < C$, ir vienženklis skaičius D. Keliais būdais tai galima padaryti, jeigu žinoma, kad $A + D = B + C = 143$?

α.51. Olimpiados pradžioje žiuri sudaro 30 narių. Kiekvienas narys mano, kad dalis žiuri narių yra nekompetentingi. Ši nuomonė nėra keičiama. Posėdžių metu žiuri nariai balsuoja išbraukdami jų nuomone nekompetentigus asmenis, tačiau niekas nebalsuoja prieš save. Jeigu prieš asmenį balsuoja daugiau negu pusė žiuri narių, jis išbraukiamas iš žiuri narių sąrašo iki olimpiados pabaigos. Įrodykite, kad daugiausiai po 15 posėdžių daugiau pašalinimų nebebus.

α.52. Keturiose degtukų dėžutėse yra atitinkamai po 38, 45, 61, 70 degtukų. Pirmas žaidėjas pasirenka bet kurias dvi dėžutes ir išima iš kiekvienos po tam tikrą nenulinį (nebūtinai tą patį) skaičių degtukų. Po jo tą patį daro antrasis žaidėjas, vėl pirmasis ir taip toliau. Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali paimti degtukų. Kuris iš dviejų žaidėjų turi išlošimo strategiją?

α.53. Ar įmanoma visus natūraliuosius skaičius suskirstyti į dvi klases taip, kad:

a) jokie trys A elementai nesudarytų aritmetinės progresijos,
b) iš B elementų negalima būtų sudaryti jokios begalinės didėjančios aritmetinės progresijos?

Kai būdavau nelaimingas, užsiimdavau matematika, kad tapčiau laimingas. Kai būdavau laimingas, užsiimdavau matematika, kad laimingas išlikčiau.
Alfredas Renji (*Alfréd Rénji*)

Skyrelį tvarko **Artūras Dubickas**

Pirmieji šeši šio skyrelio uždaviniai nereikalauja universitetinių matematikos kursų žinių. Juos sprendė pasaulinės matematikų olimpiados, vykusios Indijoje, dalyviai (žr. R. Kašubos straipsnį). Kitus uždavinius pasiūlė Vilniaus universiteto studentas Giedrius Alkauskas.

ω.4. Stačiakampė lenta $ABCD, AB = 20, BC = 12$, padalyta į 20×12 vienetinių kvadratėlių. Tegu r yra natūralusis skaičius. Monetą iš vieno kvadratėlio galima perkelti į kitą tada ir tik tada, kai atstumas tarp šių kvadratėlių centrų lygus $\sqrt{r}$. Reikia rasti tokią ėjimų seką, kad atlikus visus ėjimus moneta iš kvadrato su viršūne A būtų perkelta į kvadratą su viršūne B.

a) Įrodykite, kad to neįmanoma padaryti, jei r dalijasi iš 2 arba 3.

b) Įrodykite, kad monetą galima šiuo būdu perkelti, jei $r = 73$.

c) Ar įmanoma tai padaryti, kai $r = 97$?

ω.5. Tegu P yra toks trikampio ABC taškas, kad

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC,$$

o taškai D, E yra į trikampius APB ir APC įbrėžtųjų apskritimų centrai. Įrodykite, kad AP, BD ir CE kertasi viename taške.

ω.6. Tegu $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ yra neneigiamų sveikųjų skaičių aibė. Raskite visas funkcijas, apibrėžtas aibėje S bei įgyjančias reikšmes toje pat aibėje, kad su visais $m, n \in S$ būtų teisinga lygybė

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n).$$

ω.7. Tegu aibę S sudaro tų natūraliųjų skaičių poros $\langle a, b\rangle$, su kuriais abu skaičiai $15a + 16b, 16a - 15b$ yra natūraliųjų skaičių kvadratai. Raskite

$$\min\{\min\{15a + 16b, 16a - 15b\} : \langle a, b\rangle \in S\}.$$

ω.8. Tegu $ABCDEF$ yra iškilusis šešiakampis, kurio kraštinė AB yra lygiagreti kraštinei ED, BC lygiagreti FE ir CD lygiagreti AF. Tarkime,

R_A, R_C, R_E yra apie trikampius FAB, BCD, DEF apibrėžtųjų apskritimų spinduliai, o p yra šešiakampio perimetras. Įrodykite, kad

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}.$$

ω.9. Tarkime n, p, q yra natūralieji skaičiai tokie, kad $n > p+q$. Tegu sveikieji skaičiai $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tenkina sąlygas:
(a) $x_0 = x_n = 0$;
(b) su visais sveikaisiais $1 \leq i \leq n$

$$\text{arba } x_i - x_{i-1} = p, \text{ arba } x_i - x_{i-1} = -q.$$

Įrodykite, kad atsiras indeksų pora (i, j) tokia, kad $i < j$, $(i, j) \neq (0, n)$ ir $x_i = x_j$.

ω.10. Kiekvienai aibės $\{1, 2, \ldots, n\}$ elementų perstatai

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

apibrėžkime $f^{(1)}(\sigma) = \sigma^2, f^{(k+1)}(\sigma) = f^{(1)}(f^{(k)}(\sigma))$. Natūraliajam k nustatykite:
a) kiek yra perstatų, tenkinančių lygybę $f^{(k)}(\sigma) = \sigma$;
b) kiek yra perstatų, tenkinančių lygybę $f^{(k)}(\sigma) = e$; čia e yra tapatinga perstata.

Giedrius Alkauskas

ω.11. Baigtinės aibės A elementų skaičių žymėsime $|A|$, atstumą tarp dviejų plokštumos taškų x, y žymėsime $d(x, y)$. Baigtinei plokštumos taškų aibei A apibrėžkime:

$$d_{max}(A) = \max\{d(x, y) : x, y \in A, x \neq y\},$$

$$d_{min}(A) = \min\{d(x, y) : x, y \in A, x \neq y\}.$$

Tegu

$$R_n = \inf\left\{\frac{d_{max}(A)}{d_{min}(A)} : A, |A| = n\right\}.$$

Įrodykite, kad egzistuoja du realieji skaičiai α, β, kad

$$R_n \sim \alpha n^{\beta}, \quad n \to \infty.$$

Raskite šiuos skaičius.

Giedrius Alkauskas

••• $\alpha + \omega$ •••

ω.12. Su kokiais natūraliaisiais m, q egzistuoja tokie du nenuliniai daugianariai $P(u_1, u_2, \ldots, u_m), Q(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, kad

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = Q(x_1^q, x_2^q, \ldots, x_m^q)$$

su visomis x_i reikšmėmis?

Giedrius Alkauskas

ω.13. Apibrėžkime skaičių seką

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_{k+1} = \left(\alpha_k + \frac{1}{2^{2^k}}\right)\left(1 - \frac{1}{2^{2^k}}\right).$$

Įrodykite, kad skaičių seka α_k konverguoja ir jos riba α yra iracionalusis skaičius. Kam lygus skaičiaus α dvejetainės išraiškos i-asis skaitmuo? Ar α yra algebrinis skaičius?

Giedrius Alkauskas

Ne vien tik skaitykite, grumkitės! Formuluokite savo klausimus, ieškokite pavyzdžių, kurkite savo įrodymus. Ar ši prielaida būtina? Ar atvirkštinis teiginys teisingas? Ką gauname specialiuose klasikiniuose atvejuose? Ką gauname ribiniuose atvejuose? Kaip įrodyme panaudojama prielaida?

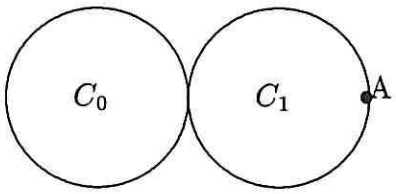
Paulius Halmošas (*Paul Halmos*)

Sprendimai

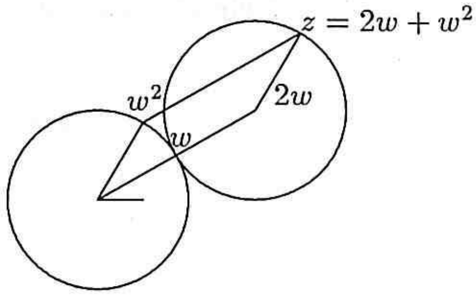
ω.1. *Kompleksinis skaičius w atvaizduojamas į kompleksinį z pagal taisyklę $z = 2w + w^2$. Į ką atvaizduojamas apskritimas $|w| = 1$?*

Sprendimas. Uždavinį išsprendė VU Matematikos fakulteto studentas **Remigijus Jodelis.**

Jeigu vienetinis apskritimas C_1 neslysdamas riedės vienetiniu apskritimu C_0, tai taškas A (žr. 1 brėž.) brėš širdies formos kreivę, kurį vadinama *kardioide.* Remigijus siūlo panagrinėti 2 brėž. ir įsitikinti, kad minėtasis atvaizdis perveda vienetinį apskritimą į kardioidę.



1 brėž.



2 brėž.

ω.2. *Tegu E bet kokia skaiti apskritimo taškų aibė. Ar galima apskritimą pasukti apie jo centrą kokiu nors nenuliniu kampu ϕ, kad aibė E pereitų į aibę E_ϕ, nesikertančią su E?*

Sprendimas . Remigijus Jodelis išsprendė ir šį uždavinį. Štai jo sprendimas.

Nagrinėkime apskritimo S posūkį kampu ϕ prieš laikrodžio rodyklę. Taško $s \in S$ vaizdą pažymėkime $e(s|\phi)$. Tegu $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Sudarykime aibę

$$\Phi = \{\phi_{ij} : e(x_i|\phi_{ij}) = x_j, i, j = 1, 2, \ldots\}.$$

Tada $\Phi \subset [0, 2\pi)$ ir Φ skaiti aibė. Todėl būtinai atsiras $\phi \in [0, 2\pi), \phi \notin \Phi$. Tada su bet kokiais $x, y \in E, x \neq y$ bus $e(x|\phi) \neq y$.