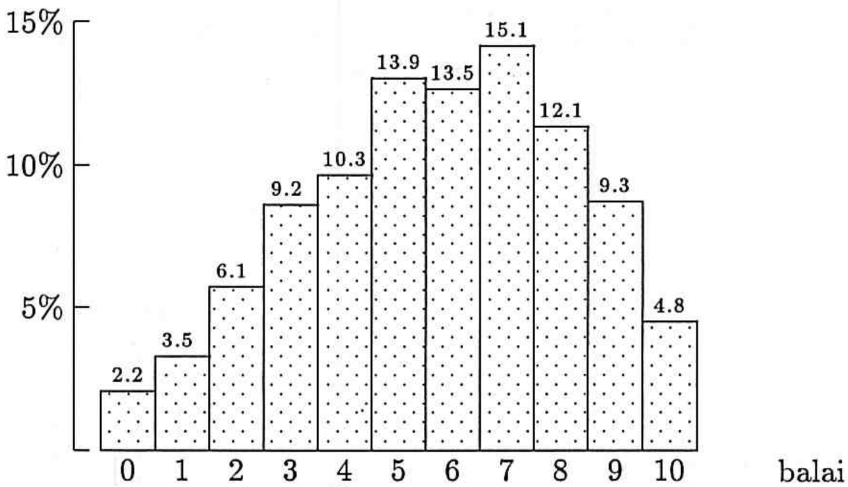
Antanas Apynis
Edmundas Gaigalas
Eugenijus Stankus

# Stojamasis matematikos egzaminas Vilniaus universitete

1996 metais stojantieji į Vilniaus universiteto ekonomikos bei vadybos ir psichologijos specialybes laikė stojamąjį matematikos egzaminą raštu. Norintieji studijuoti Matematikos fakultete buvo egzaminuojami žodžiu.

Laikantiems matematikos egzaminą raštu per 4 val. reikėjo išspręsti 10 uždavinių. Darbo įvertinimas buvo nustatomas pagal teisingų atsakymų kiekį, atsižvelgiant į uždavinių sprendimų teisingumą. Iš 1054 stojančiųjų* matematikos egzaminą raštu išlaikė 724 (68,7%) ir galėjo dalyvauti konkurse. Egzamino neišlaikė (gavo mažiau kaip 5 balus) 330 (31,3%) stojančiųjų. Pateiktoje 1 diagramoje pavaizduoti egzamino rezultatai: 4,8% stojančiųjų surinko 10 balų, 9,3% - 9 balus, 12,1% - 8, 15,1% - 7, 13,5% - 6, 13,9% - 5, 10,3% - 4, 9,2% - 3, 6,1% - 2, 3,5% - 1, 2,2% stojančiųjų neišsprendė nė vieno uždavinio (gavo 0 balų).

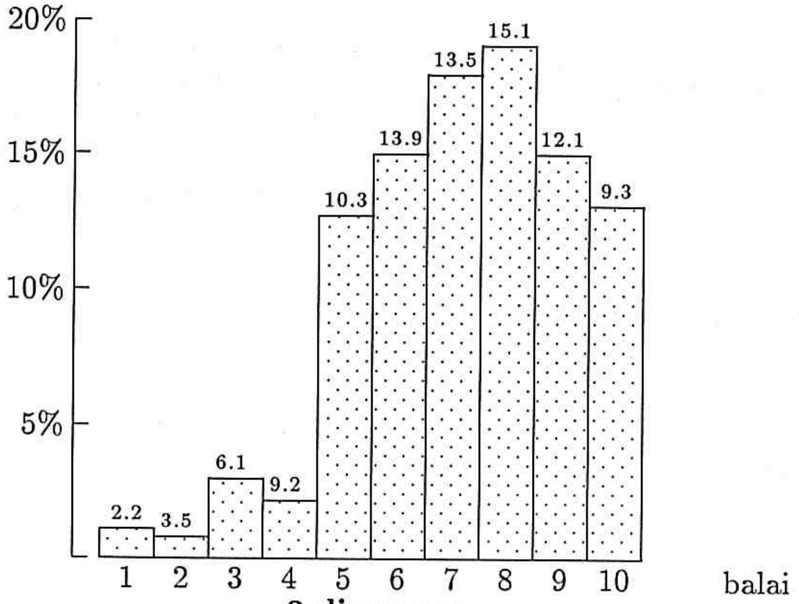



**1 diagrama**

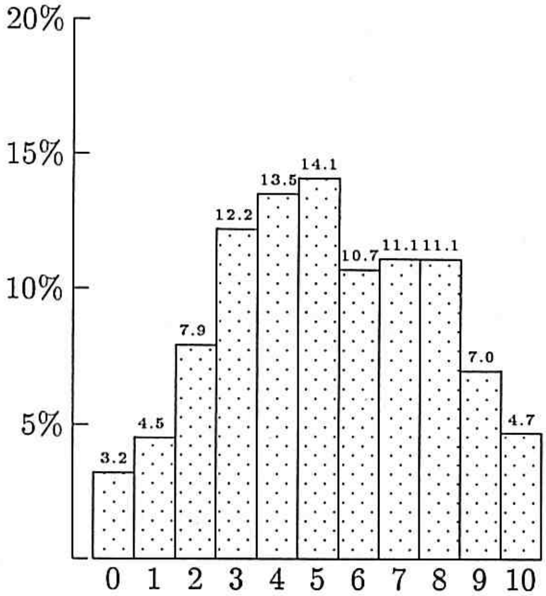
Egzaminą žodžiu sudarė dvi dalys: testas ir atsakymai į teorinius klausimus. Testui buvo skirta viena valanda. Po to stojantysis traukė bilietą, kurį sudarė du teorijos klausimai. Atsakinėjant į pirmąjį klausimą, reikėjo apibrėžti ar paaiškinti sąvokas, suformuluoti teiginius, teoremas, savybes,

* Čia analizuojami egzamino Vilniuje rezultatai

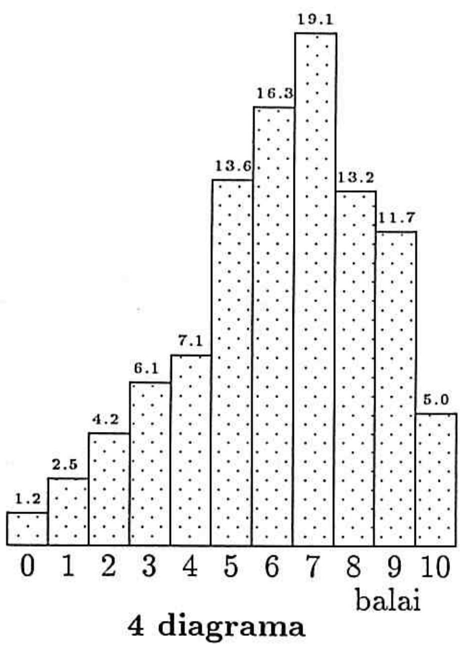
jų neįrodant, pateikti pavyzdžių. Atsakant į antrąjį klausimą, buvo reikalaujama teiginių, teoremų ar savybių įrodymų. Buvo egzaminuojama pagal stojamojo egzamino programą, kuri parengta remiantis bendrojo lavinimo mokyklos A lygio programa. Vertinant stojančiojo žinias, už testą buvo skiriama iki 4 balų, o už atsakymą į teorinius klausimus – iki 6 balų. Galutinis pažymys – abiejų egzamino dalių įvertinimų suma. Matematikos egzaminą žodžiu laikė 267 stojantieji, iš jų 248 (92,9%) egzaminą išlaikė, nepatenkinamus pažymius (mažiau kaip 5 balus) gavo 19 (7,1%) stojančiųjų. Visų šio egzamino rezultatų vaizdą matome 2 diagramoje.




**2 diagrama**




**3 diagrama**




**4 diagrama**

Nuodugniau paanalizuokime egzamino raštu rezultatus. Egzaminas vyko dvi dienas: pirmąją dieną laikė 532 stojantieji, antrąją – 522. Skaitytojui gal bus įdomu palyginti pirmosios dienos (žr. 3 diagramą) ir antrosios dienos (žr. 4 diagramą) egzaminų rezultatus.

Pradėdami dalykinę egzamino raštu analizę, pateikiame du šio egzamino bilietus (9601 ir 9602).

## 9601 bilietas

*1. Bankas moka 20% metinių palūkanų, kurios metų pabaigoje priskaičiuojamos prie indėlio. Indėlininkas metų pradžioje atidarė sąskaitą ir padėjo 2400 Lt. Kitų metų pradžioje jis papildė sąskaitą 1220 Lt, o dar po metų – 610 Lt. Kiek litų bus indėlininko sąskaitoje praėjus trejiems metams nuo jos atidarymo?*

*2. Išspręskite lygtį*

$$7 \cdot 2^{\frac{x}{3}-1} = 2^{\frac{x}{3}+1} + 12.$$

*3. Išspręskite lygtį*

$$\sqrt{3-5x} - \sqrt{2-5x} = 1.$$

*4. Raskite mažiausiąją sveiką $x$ reikšmę, su kuria teisinga nelygybė*

$$\frac{2x-1}{|x-1|} \geq -\frac{1}{3}f'(0), \quad \text{kai} \quad f(x) = \frac{15x^2+18x-5}{4x^3-3} + 5.$$

*5. Raskite didžiausią funkcijos $f(x) = \frac{x^2+5x+3}{x-1}$ reikšmę intervale $[-3;-1]$ .*

*6. Apskaičiuokite*

$$2\log_{16}(7-\sqrt{17}) - \log_{\frac{1}{4}}(7+\sqrt{17}).$$

*7. Raskite lygties*

$$\sqrt{2}\cos(8x+15^\circ) + \cos(4x-60^\circ) = \sin(4x-60^\circ) - \sqrt{2}\cos 630^\circ$$

*sprendinių intervale $[0^\circ; 45^\circ]$ sumą laipsniais.*

*8. Nustatykite, su kuriomis parametro $a$ reikšmėmis lygtys*

$$x^2 + (a+1)x - 2 = a \qquad \text{ir} \qquad (a+1)(x-1)^2 + 3(x-1) = 0$$

*yra ekvivalenčios.*

$\bullet\bullet\bullet\ \alpha + \omega\ \bullet\bullet\bullet$

*9.* *Trapecijos plotas lygus* 14, *o jos įstrižainės – po* $\sqrt{53}$. *Raskite trapecijos aukštinę, jei žinoma, kad ji ilgesnė už trape cijos vidurinę liniją.*

*10.* *Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo plotas lygus* $9\sqrt{3}$, *o šoninė briauna lygi* 5. *Raskite piramidės šoninio paviršiaus plotą.*

## 9602 bilietas

*1.* *Bankas išduoda paskolas su* 8% *metinėmis palūkanomis, kurios priskaičiuojamos metų pabaigoje. Firma metų pradžioje paėmė iš banko* 75000 *Lt paskolą ir įsipareigojo ją kartu su palūkanomis grąžinti per trejus metus. Po vienerių metų firma grąžino* 41000 *Lt. Kiek litų firma dar turi grąžinti bankui baigiantis paskolos terminui?*

*2.* *Išspręskite lygtį*

$$2 \cdot 3^{\frac{x}{2}+1} = 19 - 3^{\frac{x}{2}-1}.$$

*3.* *Išspręskite lygtį*

$$\sqrt{17+4x} - 2\sqrt{x+2} - 3 = 0.$$

*4.* *Raskite mažiausiąją* $x$ *reikšmę, su kuria teisinga nelygybė*

$$\frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq f'(0), \quad \text{kai} \quad f(x) = \frac{2x^2-1}{2x+1} + \frac{1}{5}\cos 5x - 5.$$

*5.* *Raskite mažiausią funkcijos* $f(x) = \frac{x^2+4}{2x+3}$ *reikšmę intervale* $[-6; -2]$ .

*6.* *Apskaičiuokite*

$$2\log_{81} 12 + \log_{\frac{1}{3}} 54.$$

*7.* *Raskite lygties* $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 1 + 2\sin x$ *sprendinį laipsniais intervale* $[0; \frac{\pi}{2}]$.

*8.* *Nustatykite, su kuriomis parametro* $a$ *reikšmėmis lygtys*

$$x^2 + (a^2 + a - 6)x = 0 \qquad \text{ir} \qquad x^2 + 2(a+3)x + a^2 - 2a - 8 = 0$$

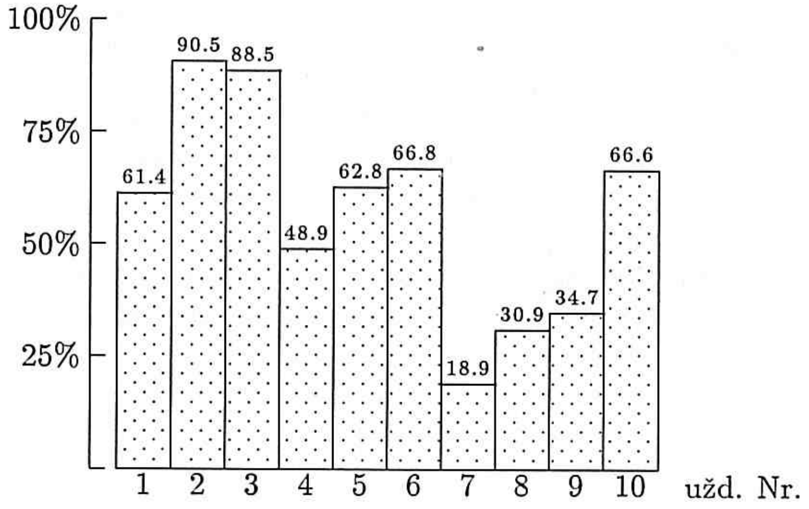
*yra ekvivalenčios.*

*9.* *Trikampio* $KMN$ *kraštinė* $KM$ *lygi* 4 , *o pusiaukraštinės* $KE$ *ir* $NF$ *– po* $\sqrt{22}$. *Raskite kraštinės* $KN$ *ilgį.*

*10.* *Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna lygi* 17, *o pagrindo plotas lygus* 256. *Raskite šoninio paviršiaus plotą.*

●●● $\alpha + \omega$ ●●●

Iš 5 diagramos matome, kiek stojančiųjų (procentais) teisingai išsprendė pateiktuosius uždavinius. Pirmą – palūkanų skaičiavimo – uždavinį teisingai išsprendė 61,4%, antrą (rodiklinę lygtį) – 90,5%, trečią (iracionaliąją lygtį) – 88,5%, ketvirtą (nelygybę) – 48,9%, penktą (funkcijos ekstremumo) – 62,8%, šeštą (logaritminio reiškinio skaičiavimo) – 66,8%, septintą (trigonometrinę lygtį) – 18,9%, aštuntą (lygčių ekvivalentumo) – 30,9%, devintą (planimetrijos) – 34,7%, dešimtą (stereometrijos) – 66,6%.




**5 diagrama**

Pirmąjį uždavinį teisingai išsprendė 61,4% moksleivių. Mes tikėjomės, kad būsimieji ekonomistai uždavinius su procentais spręs lengviau. Šie uždaviniai nebuvo sudėtingi – apskaičiuojant palūkanas tereikėjo žinoti pagrindines procentų savybes.

Antras, trečias, penktas, šeštas ir dešimtas uždaviniai yra pakankamai paprasti, todėl jų nekomentuosime.

Sprendžiant 4 uždavinį, daugiausia klaidų buvo padaryta skaičiuojant funkcijų išvestines bei taikant modulio apibrėžimą. Šio uždavinio sprendimo būdas buvo pakankamai aiškus.

Trigonometrinės lygties (žr. 9601 ir 9602 bilietų 7 uždavinį) sprendimas iš esmės remiasi papildomo kampo panaudojimu. Toks papildomas kampas 9601 bilieto trigonometrinei lygčiai yra 45°. Iš tikrųjų tą lygtį galima užrašyti šitaip:

$$\cos(8x + 15°) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(4x - 60°) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(4x - 60°) = 0.$$

Iš čia

$$\cos(8x + 15°) + \cos(4x - 15°) = 0.$$

Panašiai pertvarkoma 9602 bilieto lygtis:

$$\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \sin x = 0,$$
$$\sin(30^\circ + 2x) - \sin x = 0.$$

Taip gauname standartines trigonometrines lygtis, belieka pasirinkti reikalingas šaknis.

Panagrinėkime lygčių ekvivalentumo uždavinius. Akivaizdu, kad 9602 bilieto 8 uždavinio viena pirmosios lygties šaknis yra $x = 0$. Antroji lygtis šitokią šaknį turės tik tuo atveju, kai $a^2 - 2a - 8 = 0$ (t.y. $a = 4$ arba $a = -2$). Apskaičiuosime lygčių antrąsias šaknis. Kai $a = 4$, pirmosios lygties antroji šaknis yra $x = -14$, o antrosios – taip pat $x = -14$. Kai $a = -2$, pirmosios lygties šaknis – $x = 4$, o antrosios – $x = -2$. Taigi, kai $a = 4$, abi lygtys turi tas pačias šaknis, vadinasi, yra ekvivalenčios.

Panašus į išnagrinėtąjį ir 9601 bilieto 8 uždavinys. Tik reikėtų pastebėti, kad šaknį $x = 1$ turi abi lygtys su bet kuriomis parametro $a$ reikšmėmis. Todėl antrosios šių lygčių šaknys turi būti lygios:

$$\frac{a-2}{a+1} = -a - 2.$$

Iš čia gauname $a = 0$, $a = -4$.

Trumpai apie planimetrijos uždavinius. Sprendžiant 9601 bilieto 9 uždavinį, reikia remtis teiginiu: jei trapecijos įstrižainės lygios, tai trapecija lygiašonė. Stojantieji turėjo pateikti šio teiginio įrodymą. Panašiai ir 9602 bilieto 9 uždavinio sprendimas remiasi teiginiu – jei trikampio pusiaukraštinės lygios, tai trikampis lygiašonis – kurį reikėjo įrodyti.

Dar aptarkime matematikos egzamino žodžiu testą. Nors egzaminui buvo pateikta 20 variantų, bet jie skyrėsi nežymiai, todėl čia pateiksime tik vieną bilieto pavyzdį ir apibendrintus rezultatus.

## Testo bilietas

1. *Funkcijos* $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)$ *reikšmių aibė yra*
   *A)* $[-1;1]$ *B)* $[-1;0]$ *C)* $[0;1]$ *D)* $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$
2. *Funkcijos* $y = 3\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$ *periodas yra*
   *A) 3* *B)* $2\pi$ *C)* $3\pi$ *D)* $4\pi$ *E)* $\frac{\pi}{6}$
3. *Lyginė funkcija* $y = f(x)$ *intervale (1;3) yra didėjanti ir turi išvestinę. Be to,* $f'(2) = 1$. *Tuomet*
   *A)* $f'(-2) = 0$ *B)* $f'(-2) > 0$ *C)* $f'(-2) < 0$
4. *Stačiajame trikampyje iš stačiojo kampo viršūnės išvesta pusiaukraštinė, kurios ilgis yra 6 cm. Tuomet apibrėžto apie trikampį apskritimo diametras yra*
   *A)* 3 *cm* *B)* 6 *cm* *C)* 12 *cm* *D)* 4 *cm*
5. *Skaičius* $\frac{2}{5}$ *yra didesnis už skaičių* $\frac{1}{4}$

*A)* 62,5% *B)* 60% *C)* 37,5% *D)* 30%

6. *Du dviratininkai lenktyniauja ratu. Pirmasis ratą nuvažiuoja per* 6 *min., antrasis – per* 4 *min. Per kiek laiko antrasis dviratininkas pralenks pirmąjį vienu ratu?*

   *A)* 8 *min.* *B)* 10 *min.* *C)* 12 *min.* *D)* 16 *min.* *E)* 18 *min.*

7. *Kiek reikia parašyti skaitmenų, norint sunumeruoti* 600 *puslapių knygą (nuo* 1 *iki* 600 *)?*

   *A)* 1691 *B)* 1692 *C)* 1690 *D)* 1689 *E)* 1694

8. *Vieno mėnesio trys šeštadieniai buvo lyginės dienos. Kuri savaitės diena buvo to mėnesio 28–toji diena?*

   *A) Antradienis* *B) Sekmadienis* *C) Šeštadienis* *D) Ketvirtadienis* *E) Pirmadienis*

9. *Jūros vandenyje yra* 5% *druskos. Kiek kilogramų gėlo vandens reikia įpilti į* 40 *kg jūros vandens, kad druskos kiekis būtų* 2%*?*

   *A)* 80 *kg* *B)* 60 *kg* *C)* 40 *kg* *D)* 100 *kg* *E)* 25 *kg*

10. *Iš* 100 *turistų* 75 *moka vokiečių kalbą,* 83 *anglų, o* 10 *nemoka nei vokiečių, nei anglų kalbų. Kiek turistų moka abi kalbas?*

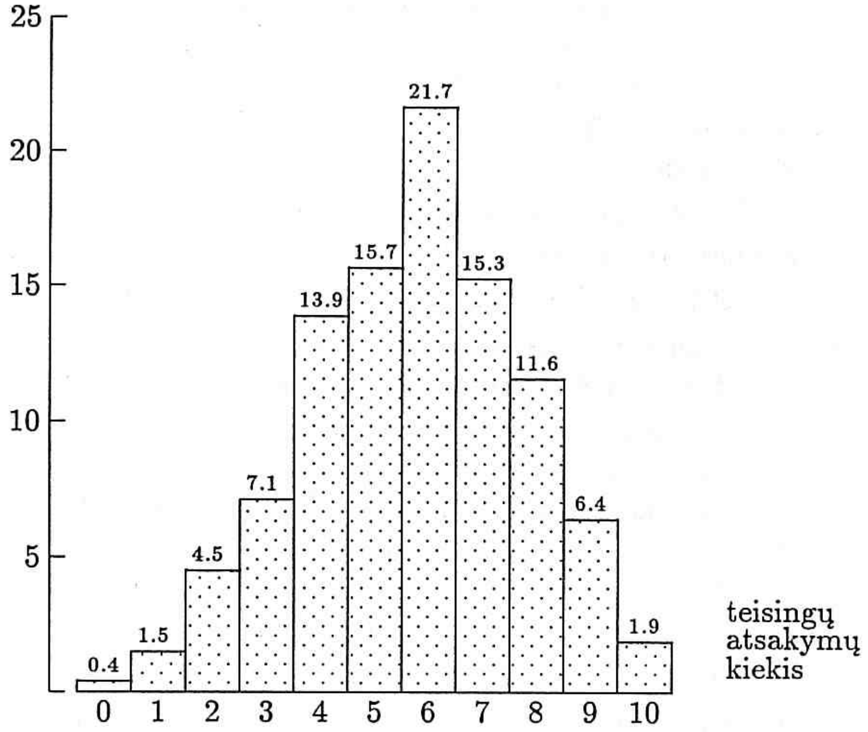
    *A)* 25 *B)* 17 *C)* 68 *D)* 58 *E)* 42

Stojantysis iš pateiktų po užduoties sąlyga atsakymų turėjo pasirinkti vieną ir įrašyti jį į atsakymų taloną. Iš 267 stojančiųjų visus teisingus atsakymus pasirinko penki (1,9%), o nė vieno – vienas (0,4%). Visi testų sprendimo rezultatai pavaizduoti 6 diagramoje. Kitoje – 7 diagramoje pateikta informacija apie kiekvieną užduotį.

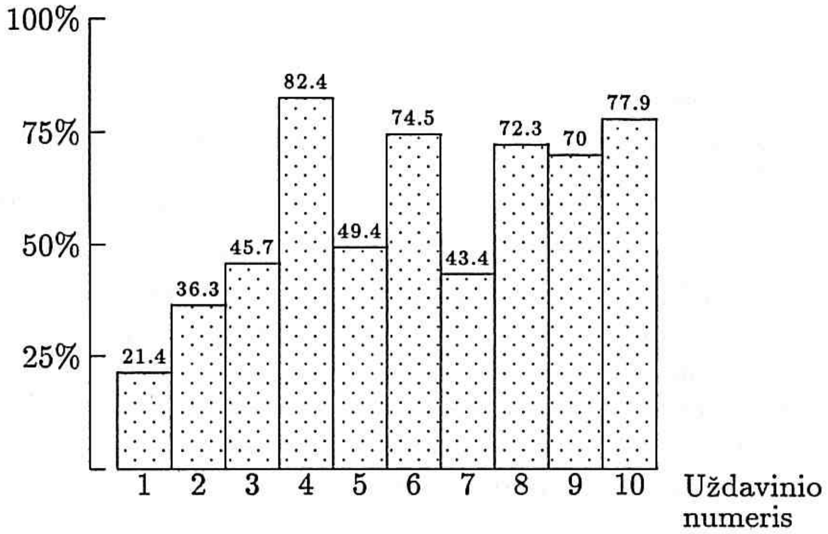
Matome, kad sunkiausios stojantiesiems buvo pirmoji, antroji, trečioji, penktoji ir septintoji užduotys. Tai rodo ne tik bendroji statistika, bet ir geriausiai testo užduotis sprendusių stojančiųjų rezultatai. Aštuonis arba devynis balus surinko 48 stojantieji (18%). Iš jų 56,3% suklydo pasirinkdami pirmojo uždavinio atsakymą, 25% – antrojo, 29,2% – trečiojo, 22,9% – penktojo ir 20,8% – septintojo. Kitų uždavinių neišsprendė vienas ar du stojantieji.

Trumpam sustokime prie kelių uždavinių sprendimo rezultatų.

Pirmajame uždavinyje reikėjo rasti funkcijos $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)$ reikšmių aibę. Teisingą atsakymą – [0;1] parašė 21,4%. Tuo tarpu klaidingą pirmąjį variantą – [-1;1] pasirinko net 56,5% stojančiųjų. Matyt, spręsdami tą uždavinį jie visai nekreipė dėmesio į sinuso argumentą ir todėl parašė „standartinį“ atsakymą.




**6 diagrama**




**7 diagrama**

Greičiausiai psichologinis faktorius nulėmė nemažos dalies stojančiųjų antrojo uždavinio atsakymo pasirinkimą. Reikėjo nustatyti funkcijos $y = 3\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$ periodą. Teisingą atsakymą parašė 36,3% stojančiųjų, o „standartinį" – $2\pi$ pasirinko 40,8%. Pastebėtina dar, kad pirmojo atsakymo – 3 neparašė nė vienas.

••• $\alpha + \omega$ •••

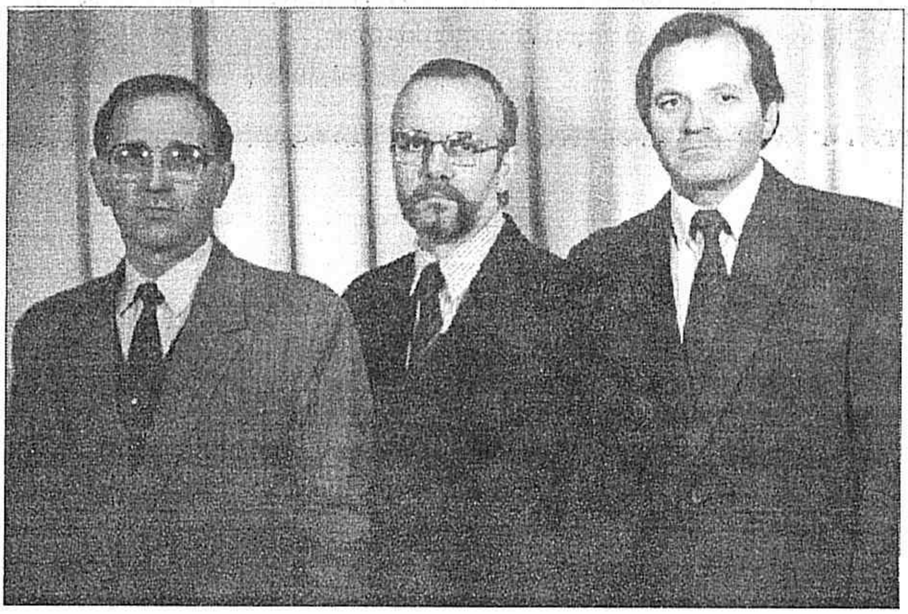
Įdomu, kaip būtų pasiskirstę tų dviejų uždavinių atsakymai neįtraukus į sąrašą „standartinių“.

Penktojo uždavinio teisingas atsakymas yra 60%. Jį pasirinko 49,4% stojančiųjų. Pirmąjį atsakymą, t. y. kad $\frac{1}{4}$ sudaro 62,5% skaičiaus $\frac{2}{5}$, pasirinko 16,5%. Skaičių skirtumo procentus didesniojo skaičiaus atžvilgiu skaičiavo (pasirinko atsakymą 37,5%) net 29,6%. Taigi skaičių palyginimo uždavinys didesnei stojančiųjų daliai pasirodė per sunkus.

Atsakinėdami į teorinius klausimus, dauguma stojančiųjų be priekaištų atsakydavo į pirmąjį klausimą, nes čia nereikėjo įrodymų. Žymiai sunkiau sekdavosi su antruoju, kuriame pateiktuosius teiginius reikėjo įrodyti. Nemaža dalis stojančiųjų nesugebėdavo įrodyti vienos ar kitos teoremos, ar formulės. Susidaro įspūdis, kad vidurinėse mokyklose matematika pateikiama kaip įvairiausių teiginių, teoremų, formulių rinkinys, nesigilinant į jų tarpusavio ryšius, per mažai dėmesio skiriama mąstymui ugdyti.

Stojantieji į matematikos fakultetą turėtų žinoti, kad laikant stojamąjį egzaminą teorinė dalis yra svarbiausia. Be to, ir mokantis mūsų fakultete tokio tipo egzaminų bus daugiausia. Stojamojo egzamino metu reikalaujama tik pačių svarbiausių vidurinės mokyklos kurso teoremų bei formulių įrodymų, nes viso to reikės studijuojant Vilniaus universiteto Matematikos fakultete.

Autoriai visiems skaitytojams linki sėkmės matematikos labirintuose.



Matematika yra ne tik realybė, ji yra vienintelė realybė. Suprantama, visata sudaryta iš materijos. O materija iš dalelių. O iš ko sudarytos dalelės? Jos iš nieko nesudarytos. Vienintelis dalykas, ką jūs galite pasakyti apie elektrono realumą, tai tiesiog išvardyti jo matematines savybes. Tokiu būdu materija visiškai išsisklaido ir lieka vien tik matematinės struktūros.

Martinas Gardneris (*Martin Gardner*)