Gintaras Bakštys

Draudimo matematika? Kodėl gi ne!

Įvadas

Yra knygų, skambiai pavadintų draudimo ar aktuarine matematika. Atsivertęs bet kurią iš jų, pamatysi neįprastus žymenis. Akį traukia ir šiurpulį varo dydžiai su indeksais ne tik viršuje ir apačioje, bet ir kairėje, ir dešinėje pusėse. Mistiškas* rūbas dengia elementarią ar kartais šiek tiek sudėtingesnę, bet vis vien standartinę matematiką. Šia prasme, draudimo matematika, kaip specifinė matematikos dalis, su vien jai būdingais metodais neegzistuoja. Tėra tik tikimybių teorijos, atsitiktinių procesų ir matematinės statistikos taikymai.

Antra vertus, draudimo praktikos uždaviniai smarkiai pastūmėjo minėtąsias matematikos disciplinas į priekį. Matematika yra taip išaugusi ir išsišakojusi, kad paprasčiausiai trūksta laiko moksleiviui ar studentui parodyti kiekvienos sąvokos ištakas ar vystymąsi. Dažniausiai pateikiama tik sutvarkyta ir išdailinta matematinė teorija. Sutvarkymo logika paprasta: prieš tai buvę rezultatai yra būtini gauti po jų pateiktiesiems, šie sąlygoja tolesnius ir t. t. Taip patogu mokytis, bet nevisada aišku, kodėl prireikė vienos ar kitos teoremos. Dažnai nauji ir svarbūs rezultatai atsiranda sprendžiant praktinius uždavinius. Draudimas, o dabar ir kiti finansinio neapibrėžtumo sumažinimo mechanizmai, pilni netikėtumų. Čia profesionalus matematikas gali bandyti pritaikyti savo sugebėjimus.

Ir dar, neužmirškime, kad daug universitetus baigusių matematikų įsidarbina draudimo kompanijose. Draudimo kompanijos matematikas privalo įvaldyti standartinį jam reikalingų žinių rinkinį, kuris ir vadinamas *draudimo*, arba *aktuarine, matematika*.

* Laikui bėgant pasirodo, kad šie istoriškai susiklostę žymenys yra tikrai patogūs naudoti.

Gyvybės draudimas

Draudimas yra paprastas ir, kaip rodo praktika, efektyvus atsitiktinių nuostolių suglodinimo mechanizmas. Besidraudžiančių asmenų įmokos sudaro fondą, kuris vėliau naudojamas iš anksto aptartoms žaloms atlyginti. Matematikas turi suskaičiuoti draudimo įmokas taip, kad jos nebūtų pernelyg didelės arba mažos. Jei įmokos yra mažos, tai fondo pinigų gali neužtekti visiems nuostoliams atlyginti. Jei įmokos didelės, niekas nenorės tokio draudimo.

Aptarsime gyvybės draudimą. Gyvybės draudimo kompanijos draudžia nuo finansinio nuostolio, kuris susijęs su apdraustojo asmens amžiaus trukme. Nuostolio dydis yra iš anksto aptariamas ir vadinamas *draudimo suma*. Sandorių, panašių į gyvybės draudimą, pasitaikydavo jau pačiais seniausiais amžiais.

Genujos pirklių gudrybės: aktuarinis diskontas

Genujos pirkliai laivais leisdavosi į ilgas ir pavojingas keliones. Rizikingais žygiais jie susikrovė turtus, kuriais viduriniaisiais amžiais garsėjo šis miestas. Kiekvieną kartą išplaukdamas prekijas žinodavo, kad gali prarasti savo prekes ir laivą. Maža to, dažni tuo metu gaisrai ir plėšikai galėjo sunaikinti kitą jo turtą. Reikėjo garantijos, kad ištikus nesėkmei vėl bus galima bandyti tęsti savo verslą. Kartais grupelė pirklių susitardavo palikti saugioje vietoje po tam tikrą sumą pinigų. Praėjus sutartam laikui, tarkime vieniems metams * , likę gyvi pasidalydavo visus surinktus pinigus. Kiek tekdavo kiekvienam, sulaukusiam nustatyto termino pabaigos? Tarkime, kad iš pradžių $l_\bullet$ besidraudžiančiųjų sumokėjo po P. Jei po 1 metų liko $l_{\bullet+1}$ asmenų, tai kiekvienas išgyvenęs gavo po

$$\frac{P \cdot l_\bullet}{l_{\bullet+1}}.$$

Akivaizdu, kad $l_\bullet \geq l_{\bullet+1}$. Todėl gauta suma yra didesnė nei įmoka P. Atidavę savo pinigus saugoti bankui, taip pat atgausime ** truputį daugiau, nei pradžioje investavome. Šiuo atveju analogija yra gilesnė, nei atrodo iš pirmo žvilgsnio. Jei bankas sumoka i palūkanų per metus, tai po metų įdėta suma A_0 padidėja iki

$$A_1 = A_0(1+i).$$

* Šiuo atveju terminas yra visiškai neesminis.

** Ne visi susigundo nepatikimų bankų didelėmis palūkanomis

Akivaizdu, kad po metų norėdami gauti A_1 dabar turime įdėti $A_0 = A_1 v$; čia

$$v = \frac{1}{1+i}.$$

Daugiklis v yra vadinamas metiniu *diskonto daugikliu*, o $A_0 = A_1 v$ – įsipareigojimo išmokėti po 1 metų sumą A_1 *diskontuota verte.*

Jei Genujos prekijai savo draudimo fondą būtų patikėję tokiam bankui, tai kiekvienas, sulaukęs termino pabaigos, būtų gavęs po

$$\frac{P \cdot l_\bullet \cdot (1+i)}{l_{\bullet+1}}.$$

Įmokos P ir po metų išmokamos sumos santykis yra

$$\frac{P}{\frac{P \cdot l_\bullet \cdot (1+i)}{l_{\bullet+1}}} = \frac{l_{\bullet+1}}{l_\bullet} \cdot v.$$

Pažymėkime

$$p_\bullet = \frac{l_{\bullet+1}}{l_\bullet}, \quad E_\bullet = p_\bullet v.$$

Matome, kad atsargus Genujos pirklys, sulaukęs vienerių metų termino pabaigos, gaus S, jei iš pradžių buvo įmokėjęs

$$P = S \cdot E_\bullet.$$

Įsitikinome, kad pažadas po 1 metų išgyvenusiam sumokėti sumą S yra vertas $S \cdot E_\bullet$. Dydis $E_\bullet$ yra vadinamas *aktuariniu metiniu diskonto daugikliu.*

Jei pirkliai būtų susitarę susitikti po k metų, tai $l_{\bullet+k}$ išgyvenusiųjų pasidalytų savo $P \cdot l_\bullet \cdot (1+i)^k$. Įmokos ir po k metų išmokamos sumos santykis būtų

$$\frac{P}{\frac{P \cdot l_\bullet \cdot (1+i)^k}{l_{\bullet+k}}} = \frac{l_{\bullet+k}}{l_\bullet} \cdot v^k.$$

Pažymėję

$${}_kp_\bullet = \frac{l_{\bullet+k}}{l_\bullet}, \quad {}_kE_\bullet = {}_kp_\bullet v^k,$$

matome, kad įsipareigojimas po k metų išgyvenusiam sumokėti sumą S yra vertas

$$P = S \cdot {}_kE_\bullet.$$

Dydis ${}_kE_\bullet$ yra vadinamas *aktuarine diskonto funkcija.*

$\bullet\bullet\bullet\ \alpha + \omega\ \bullet\bullet\bullet$

Pensija. Mirtingumo lentelė

Pensija yra įsipareigojimas nuo tam tikro momento iki gyvenimo pabaigos periodiškai mokėti sutartą pinigų sumą. Žinome, kad pažadas po k metų išmokėti sumą S yra vertas $S \cdot {}_kE_\bullet$. Akivaizdu, kad visų įsipareigojimų suma

$$S + S \cdot {}_1E_\bullet + S \cdot {}_2E_\bullet + \cdots = S \cdot (1 + {}_1E_\bullet + {}_2E_\bullet + \cdots)$$

ir yra pensijos po S kasmet iki gyvos galvos diskontuota vertė. Matome, kad ši vertė tiesiškai priklauso nuo išmokos dydžio S. Intuityviai aišku, kad vertė turėtų priklausyti ir nuo pensijinio amžiaus x.

Pasielkime taip, kaip tai darė prieš porą šimtmečių. Tarkime, kad iš l_0 naujagimių savo pirmojo gimtadienio sulaukia l_1, antrojo – l_2, ir t. t. Gautą skaičių seką

$$l_0, l_1, l_2, \ldots$$

vadiname *mirtingumo lentele*. Padarykime dar vieną prielaidą: jei iš pradinės x amžiaus žmonių grupės, kurioje pradiniu momentu buvo $l_\bullet$ asmenų, po metų liko $l_{\bullet+1}$, po 2 – $l_{\bullet+2}$, ir t. t., tai

$$\frac{l_\bullet}{l_x} = \frac{l_{\bullet+1}}{l_{x+1}} = \frac{l_{\bullet+2}}{l_{x+2}} = \cdots$$

Pateiktasis modelis vadinamas *determinuotos išgyvenančiųjų grupės modeliu*. Mirtingumo lentelė konstruojama pagal turimus statistinius duomenis. Po to suskaičiuoti, pavyzdžiui, pensijos vertę yra nesunku. Šiuo atveju gauname

$${}_kE_\bullet = \frac{l_{\bullet+k}}{l_\bullet} v^k = \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k.$$

Todėl x amžiaus žmogaus pensijos po S kasmet iki gyvos galvos diskontuota vertė yra

$$S \cdot \left(\frac{l_x}{l_x} v^0 + \frac{l_{x+1}}{l_x} v^1 + \frac{l_{x+2}}{l_x} v^2 + \cdots \right).$$

Čia diskonto daugiklis v priklauso nuo metinės palūkanų normos i.

Šis modelis naudojamas iki šiol. Yra sugalvota įvairių išradingų priemonių, dar palengvinančių nesudėtingus, bet gana monotoniškus skaičiavimus. Paprastumas ir naudojimo patogumas atperka akivaizdžius jo trūkumus. Aktuariniai skaičiavimai pasidaro labai panašūs į finansinius. Įsitikinkite tuo, apibrėždami ${}_kE_x$ ir E_x bei įrodydami, kad

$${}_kE_x = E_x \cdot E_{x+1} \cdots E_{x+k}.$$

••• $\alpha + \omega$ •••

Ar užteks pinigų?

Viskas būtų gražu, tik $l_{\bullet+k}$, kartu ir aktuarinio diskonto funkcija ${}_kE_\bullet$ realiame pasaulyje yra atsitiktiniai dydžiai. Vadinasi įsipareigojimo mokėti pensiją vertė taip pat yra atsitiktinis dydis. Atėjo eilė truputį sudėtingesniam: stochastiniam (atsitiktiniam) išgyvenančiųjų grupės modeliui. Įsitikinsime, kad determinuotas modelis pateikia mus dominančių įsipareigojimų vidutinę diskontuotą vertę.

Pagrindinė modelio prielaida yra ta, kad kiekvienas x amžiaus asmuo nepriklausomai nuo kitų su ta pačia tikimybe p_x išgyvena dar vienus metus. Tikimybių seką

$$p_0, p_1, p_2, \ldots$$

taip pat vadiname *mirtingumo lentele.* Tikimybę, kad x amžiaus sulaukęs asmuo išgyvens dar k metų pažymėkime ${}_kp_x$. Nesunku įsitikinti, kad

$${}_kp_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+(k-1)}.$$

Jei $l_\bullet$ yra skaičius x amžiaus asmenų pradiniu laiko momentu, dar k metų išgyvenusių skaičiaus $l_{\bullet+k}$ vidutinė reikšmė

$$\mathbf{E}\, l_{\bullet+k} = l_\bullet \cdot {}_kp_x.$$

Todėl diskonto funkcijos vidutinė reikšmė

$$\mathbf{E}_kE_\bullet = \mathbf{E}\frac{l_{\bullet+k}}{l_\bullet}v^k = \frac{1}{l_\bullet}l_{\bullet\,k}p_xv^k.$$

Sutvarkę gausime

$$\mathbf{E}_kE_\bullet = p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+(k-1)}v^k.$$

Matome, kad žinodami tikimybes p_k, galime suskaičiuoti mus dominančių įsipareigojimų vidutinę diskontuotą vertę. Dydis

$${}_kE_x = \mathbf{E}_kE_\bullet$$

yra vadinamas *aktuarine diskonto funkcija.*

Jei pradėtume stebėti $l_\bullet = l_0$ naujagimių grupę, tai k metų amžiaus sulaukusiųjų vidutinis skaičius

$$l_k = \mathbf{E}l_{\bullet+k} = l_0 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdots p_{k-1}.$$

$\bullet\bullet\bullet\ \alpha + \omega\ \bullet\bullet\bullet$

Seką l_k ankstesniame skyrelyje pavadinome mirtingumo lentele. Nesunku patikrinti, kad

$$_kE_x = \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k,$$

t. y. sutampa su aktuarinio diskonto funkcija, apibrėžta determinuotame modelyje.

Paprastai draudimo kompanija turi ne vieną kontraktą, o visą jų paketą. Tarkime, kad prisiimtų įsipareigojimų vidutinės vertės ir dispersijos yra

$$V_1, \Sigma_1, V_2, \Sigma_2, \ldots$$

Jei kompanijos pardavimo strategija yra pakankamai apgalvota, įsipareigojimai yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Tuo atveju suminis įsipareigojimas vidutiniškai vertas

$$V = V_1 + V_2 + \cdots,$$

o jo dispersija

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots.$$

Jei kontraktų yra daug, tai, kaip teigia centrinė ribinė teorema, įsipareigojimo pasiskirstymas yra artimas normaliajam, kurio vidurkis V ir dispersija Σ. Šiuo atveju lengvai galime suskaičiuoti įsipareigojimų vertės nuokrypių nuo vidutinės reikšmės tikimybes.