Remigijus Leipus

Finansų matematiniai modeliai

„Šiuolaikinės finansų teorijos matematiniuose modeliuose sutinkami kai kurie gražiausi tikimybių ir optimizavimo teorijų taikymai. Tačiau, žinoma, viskas, kas moksle yra gražu – nebūtinai praktiška ir, suprantama, ne viskas, kas moksle praktiška yra gražu. Čia gi turime abi puses. Sudėtingi, iš pirmo žvilgsnio, finansų teorijos matematiniai modeliai turi tiesioginę bei reikšmingą įtaką finansų praktikai."

Robertas Mertonas

Remiantis šiuolaikine samprata, finansų teorijos esmė yra ekonominių agentų veiklos, tvarkant savo resursus tiek supančios aplinkos, tiek laiko atžvilgiu, aprašymas. Supančios aplinkos neapibrėžtumas ir laikas yra pagrindiniai faktoriai, sąlygojantys finansinę agentų veiklą. Tai diktuoja ir pagrindinius taikomus finansų teorijoje matematinius metodus: tikimybių teorijos ir optimizavimo. Nežinoma aplinka lemia stochastinį uždavinių pobūdį. Kita vertus, sprendžiant investavimo-taupymo dilemą atsiranda optimizavimo uždaviniai.

Vertybinių popierių rinka, opcionai ir būsimieji kontraktai

Vertybinių popierių rinka

Pagrindinės finansų teorijoje nagrinėjamos struktūros yra individai, firmos, tarpininkai ir vertybinių popierių rinka. Svarbiausią vietą tarp šių struktūrų užima vertybinių popierių rinka, kuria labiausiai ir domisi finansų matematika. Vertybinių popierių rinka laikoma visuma organizuotų finansinių institucijų, kuriose vykdomos operacijos (prekyba, mainai,...) standartizuotais vertybiniais popieriais – akcijomis, obligacijomis, būsimais kontraktais, opcionais ir t. t. Be operacinės funkcijos, vertybinių popierių rinka pasižymi svarbia informacijos šaltinio funkcija. Čia nustatomos akcijų ir kitų vertybinių popierių kainos, palūkanų normos ir pan. Naudodamiesi šia informacija, individai ir firmos sprendžia iškylančius investavimo uždavinius.

Pagrindiniai vertybiniai popieriai cirkuliuojantys vertybinių popierių rinkoje yra akcijos bei obligacijos. Kiti vertybiniai popieriai – opcionai, būsimieji bei išankstiniai kontraktai ir t. t. – vadinami *išvestiniais* vertybiniais popieriais (*derivative securities*).

Opcionai

Praktiniu požiūriu, didžiausią įtaką šiuolaikinei finansų teorijai turėjo Bleko-Šoulso modelis. Jo autoriai - amerikiečiai F. Blekas (*Fischer Black, 1938–1995*), M. Šoulsas (*Myron Scholes*) [1] ir R. Mertonas (*Robert C. Merton*) [21]. Šio modelio pasirodymas sutapo su Čikagos opcionų biržos CBOE (*Chicago Board Option Exchange*) atidarymu 1973 metais. Sėkminga besiplečianti prekyba vis sudėtingesniais išvestiniais vertybiniais popieriais stimuliavo didžiulį teorinių ir praktinių opcionų teorijos srities darbų skaičių. Netrukus Bleko-Šoulso formulė, kuria naudojantis biržos dalyviai galėjo suskaičiuoti opciono racionalią vertę ir konstruoti *hedžingo* (*hedging* – apsidraudimas, siekiant sumažinti riziką, angl.) strategiją, buvo įvesta į finansinius kalkuliatorius. Antra vertus, opcionų vertinimo teorija suformavo bendrosios finansinių ieškinių vertinimo (*contigent-claims pricing*) teorijos metodologinius pagrindus. Apie tai pakalbėsime detaliau.

Pirmiausia, susipažinsime su opciono sąvoka.

Opcionu vadinamas kontraktas, pagal kurį viena iš jo šalių įgyja teisę pirkti arba parduoti prekę fiksuota kaina fiksuotu laikotarpiu, o kita – už tam tikrą kainą (premiją) įpareigojama įvykdyti kontrakto sąlygas, parduodant arba perkant sandorio objektą fiksuota kaina.

Žodis „teisė“ reiškia, kad opciono pirkėjas gali atsisakyti pirkti arba parduoti nurodytą kontrakte prekę, jeigu tai jam nenaudinga. Jeigu jis nutaria realizuoti savo teisę, tai opciono pardavėjas privalo įvykdyti kontrakto įsipareigojimus parduodamas arba pirkdamas prekę.

Standartiniai opcionai yra dviejų formų: *pirkimo* (*call*) ir *pardavimo* (*put*).

Pirkimo opciono atveju jo savininkas už tam tikrą premiją įgyja teisę fiksuota kaina pirkti norimą prekę. Opciono pardavėjas įsipareigoja parduoti prekę, jeigu opciono pirkėjas pareikalautų.

Pardavimo opciono atveju jo savininkas už tam tikrą premiją įgyja teisę fiksuota kaina parduoti norimą prekę. Opciono pardavėjas įsipareigoja pirkti prekę, jeigu opciono pirkėjas pareikalautų.

Kaina, kurią opciono pirkėjas sumoka pardavėjui, vadinama *opciono verte*.

Opciono *įvykdymo kaina* (*strike price, exercise price*) – tai kontrakte fiksuojama kaina, kuria opciono savininkas gali pirkti arba parduoti norimą prekę.

Pagal opciono realizavimo laiką išskiriami europietiškasis ir amerikietiškasis opcionai (*European and American options*). Europietiškojo opciono atveju kontraktas įvykdomas tiksliai nurodytą dieną (*maturity, expiration date*). Amerikietiškasis opcionas gali būti įvykdomas bet kada iki nurodytos dienos.

Didžiausiose pasaulio vertybinių popierių biržose investuotojams siūlomas didelis opcionų pasirinkimas: akcijų opcionai, indeksų opcionai (pavyzdžiui, S&P 500, NYSE), obligacijų opcionai, prekiniai opcionai (javų, aukso,...), valiutų opcionai ir pan.

Patys populiariausi vertybinių popierių biržose yra akcijų opcionai. Tarkime, kad sandorio objektas yra akcijos ir įveskime žymenis:

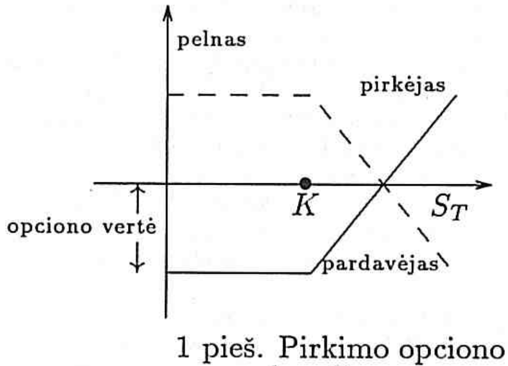
T – opciono įvykdymo data (metai);

S_t – akcijos kaina momentu t;

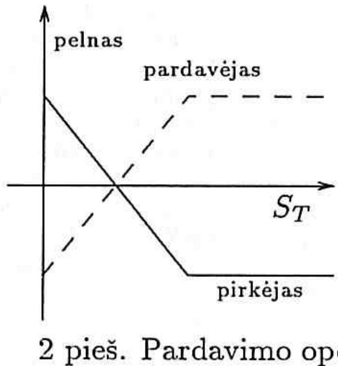
K – opciono įvykdymo kaina.

Nagrinėkime europietiškąjį pirkimo opcioną. Momentu T kaina S_T gali neviršyti įvykdymo kainos K arba būti didesnė už K. Jeigu $S_T \leqslant K$, tai opciono pirkėjas pagal kontrakto sąlygas akcijų už kainą K nepirks, kadangi gali jas pigiau nusipirkti rinkoje. Taigi kontraktas tokiu atveju nepasirašomas ir opciono pirkėjas turi nuostolį, lygų sumokėtai premijai. Jeigu $S_T \geqslant K$, tai opciono savininkas kontraktą pasirašys, kadangi jis nusipirkęs už K, akcijas rinkoje parduos už S_T. Taigi išmoka opciono pirkėjui momentu T yra $(S_T - K)^+ := \max\{S_T - K, 0\}$ ir jo visas pelnas šiuo atveju bus $(S_T - K)^+$ minus sumokėtoji premija. Vadinasi, pirkimo opcioną verta įsigyti žinant, kad akcijų kainos kils.

Panašiai samprotaudami matome, kad pardavimo opciono savininko pelnas momentu T yra $(K - S_T)^+$.



1 pieš. Pirkimo opciono pelno diagrama



2 pieš. Pardavimo opciono pelno diagrama

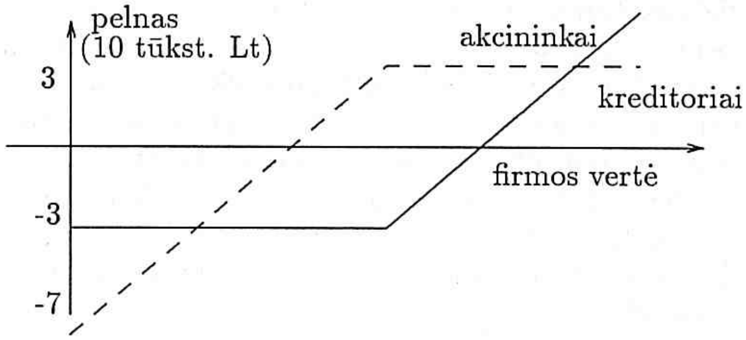
Pagrindinės matematinės problemos, iškylančios nagrinėjant opciono kontraktus, yra:

(i) *racionalios (teisingos) opciono vertės nustatymas.* Pavyzdžiui, pirkimo opciono atveju reikia nustatyti išmokos $(S_T - K)^+$ būsimu momentu $t = T$ dabartinę, t. y. momentu $t = 0$, vertę;

(ii) *hedžingo konstravimas.* Opciono pardavėjui, gaunančiam dabartiniu momentu opciono vertės dydžio premiją, reikia sukonstruoti apsidraudimo (hedžingo) strategiją, kuri europietiškojo pirkimo opciono atveju laiko momentu $t = T$ dubliuotų išmoką $(S_T - K)^+$.

Opcionų modelis yra plačiai naudojamas aprašant firmos, kurios investicinis kapitalas didinamas išleidžiant akcijas ir skolinantis, kapitalo struktūrą.

Tegul S, kuri anksčiau žymėjo akcijos kainą, yra *firmos vertė* (*firm value*). Akcininkai tokioje firmoje yra pirkimo opciono savininkai: jeigu momentu T firmos vertė viršys paskolos su palūkanomis dydį (įvykdymo kainą), tai akcininkai tokį opcioną pasirašys, sumokėdami skolą kreditoriams ir pasilikdami sau likutį. Jeigu momentu T firmos vertė yra mažesnė už paskolos su palūkanomis dydį (bankrotas), tai skola kreditoriams nebus grąžinta, t. y. opcionas nebus pasirašomas. Tiksliau, bus gražinama tik dalis skolos, būtent firmos vertė bankroto momentu.



3 pieš. Akcininkų ir kreditorių pelno diagrama

Pavyzdžiui, tarkime, firmos investicijoms reikia 100 000 Lt vieniems metams. Ji nutaria 70 000 Lt gauti imdama kreditą su 10% metinių palūkanų, likusius 30 000 Lt išleisdama paprastąsias akcijas. Visos po metų gautos pajamos bus paskirstomos kreditoriams ir akcininkams. Tarkime, nustatyta, kad firmos pajamos po metų su tikimybe 0,6 bus 200 000 Lt, su tikimybe 0,3 – 60 000 Lt ir su tikimybe 0,1 – 0 Lt. Vadinasi, vidutinės pajamos po metų: 0.6·200 000+0,3·60 000+0,1·0=138 000 Lt. Jeigu ši reikšmė būtų pasiekiama, ji atneštų akcininkams 138 000– 70 000– 7 000=61 000 Lt pelną. Tačiau reikšmė 138000 Lt nėra pasiekiama. Firmos pajamos yra 0 Lt arba 60 000 Lt, arba 200 000 Lt. Jeigu pajamos bus 0 Lt arba 60 000 Lt, tai šios sumos bus priskaičiuojamos kreditoriams, o akcininkai negaus nieko. Jeigu firmos vertė po metų bus 200 000 Lt, tai kreditoriams bus grąžinama 77 000 Lt, likusieji 200 000–77 000=123 000 Lt – akcininkų turtas. Taigi šiuo atveju, akcininkų pozicija sutampa su pirkimo opciono pirkėjo (įvykdymo kaina 77 000) pozicija.

Tarkime, kad galimos firmos vertės po metų reikšmės yra intervale $[0, \infty)$. Tada, jeigu firmos vertė po metų bus mažesnė už 77 000 Lt, akcininkai praras savo 30 000 Lt. Jeigu vertė viršys 77 000 Lt, akcininkai pasirašys opcioną, t. y. išmokės skolą kreditoriams.

Panašiai galima nagrinėti kreditorių poziciją, kuri sutampa su pardavimo opciono pardavėjo pozicija. Nagrinėjamojo pavyzdžio akcininkų ir kreditorių pelno diagrama pavaizduota 3 pieš.

Būsimieji ir išankstiniai kontraktai.

Būsimuoju kontraktu (*futures contract*) vadinamas susitarimas dėl kontrakte nurodyto aktyvo būsimo pristatymo. Sudarydamas kontraktą, jo pardavėjas pažada parduoti, o pirkėjas – pirkti aktyvą fiksuotu ateities momentu už kainą, fiksuotą kontrakto sudarymo metu.

Kontrakte nurodytas aktyvas gali būti tiek materialinė vertybė – nafta, auksas, grūdai, tiek ir finansinis instrumentas – valiuta, vertybiniai popieriai, indeksas.

Minėtoji kaina, fiksuojama kontrakto sudarymo metu, vadinama *būsimąja kaina*.

Esminis būsimojo ir opciono kontraktų skirtumas yra tas, kad žodis *teisė* opciono atveju keičiamas į pažadą būsimojo kontrakto atveju. Taigi opcioną jo pirkėjas pasirašo tada, kai apsimoka, ir nepasirašo tuo atveju, kai neapsimoka. Tuo tarpu būsimieji kontraktai *privalo būti* pasirašyti.

Labai svarbus būsimųjų kontraktų bruožas yra tas, kad pats kontraktas vėl yra vertybinis popierius, kurį galima parduoti („uždaryti poziciją") iki prekės pristatymo datos. Todėl būsimieji kontraktai praktiškai naudojami ne norint įsigyti ar parduoti prekę, o apsidrausti perkant ar parduodant tą prekę vadinamojoje tiesioginėje (*spot*) rinkoje, t. y. tokioje rinkoje, kur pirkimo ar pardavimo operacijos atliekamos tuo pačiu momentu kai sudaromas kontraktas.

Vienas iš svarbiausių uždavinių sudarant būsimąjį kontraktą yra nustatyti būsimąsias kainas. Tam yra nemažai būdų. Jie priklauso nuo aktyvo ir rinkos pobūdžio. Pavyzdžiui, jei rinka nearbitražinė (žr. kitą skyrelį) ir egzistuoja nerizikingos investicijos su metine palūkanų norma r galimybė o kontrakto galiojimo laikotarpiu iš aktyvo papildomo pelno nėra, tai kontrakto būsimoji kaina F lygi

$$F = S_0 e^{rT};$$

čia S_0 – aktyvo dabartinė kaina, T – aktyvo pristatymo momentas.

Reziumuojant būsimąjį kontraktą matematiškai galima interpretuoti kaip kontraktą su išmoka momentu T lygia $S_T - F$. Kaip matome, skirtingai nuo opciono, būsimojo kontrakto išmoka gali būti tiek teigiama, tiek ir neigiama. Tačiau sudarant tokį kontraktą, jo pardavėjui nemokama premija.

Išankstinis kontraktas (*forward contract*) apibrėžiamas panašiai kaip ir būsimasis. Tačiau yra keli skirtumai. Pirma, būsimaisiais kontraktais prekiaujama organizuotose biržose, o išankstiniai kontraktai sudaromi tarp individų ar kontrakto šalių ne biržoje. Antra, nei pirkėjo, nei pardavėjo pozicija negali būti uždaryta iki pristatymo momento parduodant ją trečiai šaliai.

Matematiniai modeliai

Bleko-Šoulso modelis

Dar 60-ųjų pabaigoje F. Blekas ir M. Šoulsas nustatė europietiškojo pirkimo opciono, kurio įvykdymo kaina K ir įvykdymo data T, racionaliąją vertę momentu t. Išvesdami formulę, jie darė tam tikras prielaidas, kurių pagrindinės yra šios:

- akcijos, esančios opcioninio kontrakto objektu, nemoka dividendų;
- akcijos yra be galo dalios;
- rinkoje žinoma pastovi palūkanų norma;
- nėra transakcijų kainų;
- prekyba vyksta tolydžiame laike ir akcijų kainos keičiasi pagal logaritminį normalųjį pasiskirstymo dėsnį (žr. (10) formulę).

Tuomet, remdamiesi arbitražo negalimumu, F. Blekas ir M. Šoulsas parodė, kad minėtoji racionalioji vertė yra $F(t, S_t)$; čia $F(t, x)$ tenkina diferencialinę lygtį dalinėmis išvestinėmis

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + rx\frac{\partial F}{\partial x} - rF = 0, \qquad (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}_+ \tag{1}$$

su kraštine sąlyga

$$F(T, x) = (x - K)^+, \qquad x \in \mathbf{R}_+. \tag{2}$$

Čia r yra nerizikingos investicijos metinė palūkanų norma, t. y. investavę nuliniu momentu vienetą, momentu t „banko sąskaitoje" turėsime $S_t^0 \equiv e^{rt}$. Grąžos dispersijos augimo greitis σ^2, vadinamas *nepastovumu* (*volatility*) yra vienintelis nežinomas parametras. (Aprašant akcijos kainas S_t (4) stochastine diferencialine lygtimi, nepastovumas σ^2 lygus dydžio $\ln(S_{t+1}/S_t)$ dispersijai.)

(1) diferencialinė lygtis su (2) kraštine sąlyga turi vienintelį sprendinį

$$F(t, x) = x\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2); \tag{3}$$

čia

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

$$d_1 = \frac{\ln(x/K) + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

(3) lygybė yra žymioji *Bleko-Šoulso formulė*. Jos pasirodymas paskatino naujus teorinius tyrimus ir kitose matematikos šakose. Pavyzdžiui, skaitiniuose metoduose ji stimuliavo naujus tyrimus, reikalingus atitinkamoms

lygtims dalinėmis išvestinėmis spręsti, statistikoje – atsitiktinių procesų dispersijos augimo greičio vertinimo metodiką.

Bearbitražės rinkos teorija

Pradedant Roso (*Stephen A. Ross*) [24] darbu, šiuo metu dauguma finansų rinkos modelių remiasi arbitražo teorija. Mes pateiksime pagrindines teorijos idėjas.

Arbitru vertybinių popierių rinkoje paprastai vadinamas žmogus, kuris sistemingai išlošia, turėdamas daugiau informacijos negu kiti rinkos dalyviai. Arbitro negalimumas paprastai formuluojamas kaip bearbitražės rinkos prielaida: neįmanoma su nulinėmis investicijomis be rizikos gauti pelno.

Pasirodo, vienintelė prielaida apie arbitražo negalimumą leidžia analizuoti rinkos savybes, pvz. nustatyti CAPM sąryšį, kurio išvedimas rėmėsi optimalaus portfelio savybėmis. Arbitražo teorijoje optimalumo prielaida nebereikalinga, tačiau atsiranda reikalavimai kainų procesų savybėms.

Remdamiesi arbitražo idėjomis Dž. Koksas (*John C. Cox*) ir S. Rosas [2] parodė, kad racionaliąją opciono vertę galima suskaičiuoti paprasčiau.

Visų pirma reikia nustatyti, kokiu tikimybiniu modeliu aprašomas akcijų kainų kitimas (žr. istorinę apžvalgą). Paprasčiausias ir labiausiai priimtas tolydusis kainų modelis yra *geometrinis Vynerio procesas*, apibrėžiamas lygybe

$$S_t = S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t}, \quad S_0 > 0;$$

čia $\{W_t\}$ yra standartinis Vynerio procesas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Dažniausiai pastaroji lygtis užrašoma kiek kitokiu pavidalu. Naudojant stochastinį Ito skaičiavimą, kurio turinį trumpai nusakyti čia būtų sunku, galima parodyti, kad tenkinama tokia Ito stochastinė diferencialinė lygtis:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t).$$

Naudojant stochastiniame skaičiavime gerai žinomą mato keitimo, arba Girsanovo teoremą, tikimybinį matą P galima pakeisti „rizikai neutraliu" ekvivalenčiu matu $P^\star$, kurio atžvilgiu vidutinis kainų proceso S_t augimo greitis μ būtų lygus nerizikingos investicijos augimo greičiui r:

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t). \tag{4}$$

Pastebėsime, kad diskontuotų kainų procesas $\{S_t/S_t^0\}$ yra martingalas mato $P^\star$ atžvilgiu. Pasirodo, tokio mato (vadinamojo ekvivalentaus martingalinio, arba rizikai neutralaus) mato egzistavimas yra būtina ir pakankama bearbitražės rinkos sąlyga.

Pirkimo opciono, kurio įvykdymo kaina K ir įvykdymo data T, racionalioji vertė momentu 0 yra

$$e^{-rT} E^\star(S_T - K)^+ =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(S_0e^x - Ke^{-rT})^+ e^{-\frac{(x+\frac{1}{2}\sigma^2T)^2}{2\sigma^2T}}dx = F(0, S_0);$$

$F(t,x)$ yra randamas iš (3) lygybės. Svarbu pastebėti, kad Bleko-Šoulso formulei neturi įtakos vidutinis augimo greitis μ, kuris išnyksta rizikai neutralaus mato parinkimo dėka.

Kitas svarbus Bleko-Šoulso modelio bruožas yra tas, kad esant patenkintoms pakankamai bendroms sąlygoms, egzistuoja (vadinamoji *hedžingo*) strategija, kuri dubliuoja opciono išmoką momentu T. Paaiškinsime tai detaliau.

Tarkime, kad investuotojas laiko intervale $[0,T]$ gali operuoti dviem vertybiniais popieriais: nerizikinga investicija (paprastumo dėlei tegu tai obligacija) kainomis $\{S_t^0 = e^{rt}\}$ ir rizikinga investicija (tegu tai akcija) kainomis $\{S_t\}$, tenkinančiomis (4) lygtį. Kiekvienu momentu t jis gali pasirinkti H_t^0 obligacijų ir H_t akcijų. Porą $(H^0,H) \equiv \{(H_t^0,H_t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$ vadiname *portfeliu*, arba *strategija*. Tuomet *portfelio vertė* momentu t yra

$$V_t = H_t^0S_t^0 + H_tS_t.$$

Svarbi Bleko-Šoulso modelyje yra *finansavimosi strategijos* samprata. Intuityviai finansavimosi strategiją galima suprasti kaip tokią strategiją, kuriai atitinkamo portfelio verčių pokyčiai dV_t gaunami dėl kainų pokyčių dS_t^0 ir dS_t (griežtai tai suprantama Itô prasme):

$$dV_t = H_t^0dS_t^0 + H_tdS_t.$$

Finansiniu ieškiniu, arba tiesiog *ieškiniu* (*contingent claim*) vadinsime bet kurį neneigiamą $\mathcal{F}$-matų atsitiktinį dydį h. Kaip ir daugelio kitų finansinių terminų, kol kas nėra nusistovėjusio *contingent claim* vertimo į lietuvių kalbą. Pagal savo prasmę tai „ieškinys dėl nenumatytų įvykių įtakos". Pavyzdžiui, pirkimo opciono atveju $h = (S_T - K)^+$. Strategija (H^0,H) vadinama *leistinąja*, jeigu ji yra finansavimosi ir $V_t \geqslant 0$, $V_t \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P^*)$ su visais t.

Dabar galime apibrėžti hedžingo strategiją. Sakome, kad (H^0,H) yra finansinio ieškinio h *hedžingo* strategija, jeigu ji yra leistina ir $V_T = h$.

Pasirodo, kad Bleko-Šoulso modelyje kiekvienam finansiniam ieškiniui $h \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P^*)$ egzistuoja hedžingo strategija.

Pastarosios terminologijos, stochastinio skaičiavimo metodų panaudojimo ir matematikų susidomėjimo arbitražo teorija pradžia laikytini Harisono (*J. Michael Harrison*), Krepso (*David M. Kreps*) [8], ir Harisono, Pliskos (*Stanley R. Pliska*) [9] darbai.

Stochastiniais skaičiavimais Bleko-Šoulso opcionų vertinimo teorija buvo apibendrinta išvestinių vertybinių popierių su netiesine išmokų funkcija (Bleko-Šoulso modelio atveju ji yra $(S_T - K)^+$), priklausančia nuo vieno ar daugiau vertybinių popierių ir kainų istorijos, atvejui. Susiformavo nauja finansų teorijos šaka – finansinių ieškinių analizė CCA (*contingent claims analysis*).

Daugeliu atveju galima gauti „gražias“ formules, išsprendžiančias anksčiau suformuluotą (ii) problemą.

Pavyzdžiui, jeigu $h = (S_T - K)^+$, tai

$$H_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t),$$

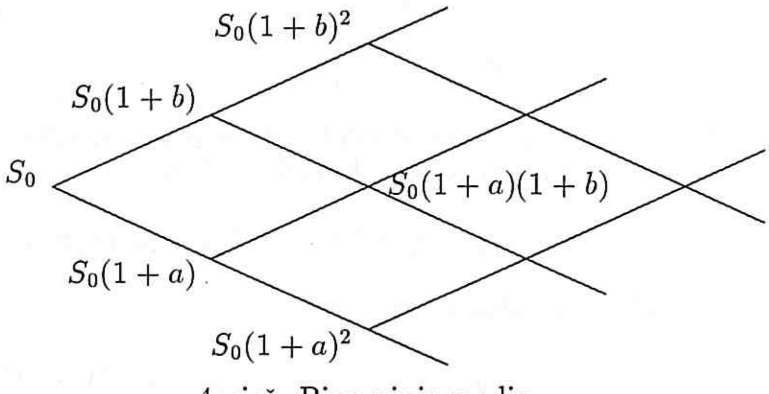
$$H_t^0 = \frac{F(t, S_t) - H_t S_t}{S_t^0};$$

čia $\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \Phi(d_1)$.

Binominis modelis

Šis modelis buvo pasiūlytas 1979 metais Dž. Kokso, S. A. Roso ir M. Rubinstaino (*Marc Rubinstein*) [3], todėl dar vadinamas CRR modeliu. Dėl savo paprastumo ir kartu pakankamo bendrumo jis paplito įvairiuose kainų modeliavimo uždaviniuose, nors pirmiausia buvo pritaikytas greitai apskaičiuoti opciono vertę. Pabrėžtina, kad jis ypač plačiai taikomas amerikietiškiems opcionams skaičiuoti.

CRR modelis nusako diskrečią finansų rinką, funkcionuojančią momentais $n = 0, 1, ..., N$. Nerizikingos ir rizikingos investicijų kainos yra atitinkamai $S_n^0 = (1+R)^n$ ir $S_{n+1} = \rho_{n+1} S_n$, $S_0 > 0$; čia ρ_n, $n = 1, ..., N$, įgyja tik dvi reikšmes $1+a$ ir $1+b$ $(-1 < a < b)$. Reikšmė $\rho_n = 1+a$ atitinka kainos kritimą, o reikšmė $\rho_n = 1+b$ – kilimą.



4 pieš. Binominis medis

Formaliai CRR modelis gali būti aprašytas taip: tegul

$$\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$$

– aibė visų sekų $\omega = (x_1, ..., x_N)$; čia kiekvienas x_i yra arba $1+a$, arba $1+b$; $\mathcal{F} = 2^\Omega$ – visų Ω poaibių σ algebra ir $\rho_i(\omega) = x_i$ su $i = 1, ..., N$.

Kiekvienas $\omega \in \Omega$ atitinka vieną binominio medžio šaką (laužtę). Tarkime, kad žinoma algebrų šeima:

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\},$$

$$\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, ..., S_n) = \sigma(\rho_1, ..., \rho_n), \; n = 1, ..., N,$$

ir tegu P – koks nors matas mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$

$$P\{(x_1, ..., x_N)\} = P\{\rho_1 = x_1, ..., \rho_N = x_N\}, \quad (x_1, ..., x_N) \in \Omega.$$

Sakykime, kad $R \in (a, b)$, ir pažymėkime

$$p^\star = \frac{b-R}{b-a}.$$

Tuomet pasirodo, kad taip nusakyta rinka yra nearbitražinė tada ir tik tada, kai $\rho_1, ..., \rho_N$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir $P^\star\{\rho_1 = 1 + a\} = p^\star = 1 - P^\star\{\rho_1 = 1 + b\}$.

Žymėkime C_n – europietiškojo pirkimo opciono, kurio kaina K ir įvykdymo data N, vertę momentu n. Nesunku įsitikinti, kad

$$C_n = (1+R)^{-(N-n)} E^\star((S_N - K)^+ | \mathcal{F}_n) =$$

$$= S_n \phi(k_0, N-n; \tilde{p}) - K(1+R)^{-(N-n)} \phi(k_0, N-n; p^\star); \tag{5}$$

čia

$$k_0 = 1 + \left[\ln \frac{S_n(1+b)^{N-n}}{K} / \ln \frac{1+a}{1+b}\right],$$

$$\phi(k, n; p) = \sum_{j=k}^{n} C_n^j p^j (1-p)^{n-j},$$

$$\tilde{p} = p^\star \, \frac{1+a}{1+r}.$$

Kaip ir tolydžiojo laiko atveju, čia taip pat galima surasti hedžingo strategiją, t. y. tokią strategiją, kuriai su visais $n = 0, ..., N$ būtų teisinga lygybė

$$V_n = (1+R)^{-(N-n)} E^\star((S_N - K)^+ | \mathcal{F}_n).$$

Pora (H^0, H) randama iš lygybių

$$\begin{cases} H_n^0 = \dfrac{c(n, S_{n-1}(1+b))(1+a) - c(n, S_{n-1}(1+a))(1+b)}{(1+R)^n(a-b)}, \\ H_n = \dfrac{c(n, S_{n-1}(1+b)) - c(n, S_{n-1}(1+a))}{S_{n-1}(b-a)}; \end{cases} \tag{6}$$

čia $c(n, x)$ sutampa su (5) reiškiniu, kuriame S_n yra pakeistas argumentu x.

Nagrinėkime rizikingą investiciją – valiutos pirkimą. Tarkime, 100 USD kaina Šveicarijos frankais nuliniu momentu yra 150 SFR (S_0 =150) ir yra du prekybos momentai. 100 dolerių kursas Šveicarijos franko atžvilgiu gali kristi iki 90 SFR arba kilti iki 180 SFR, t. y.

$$S_1 = \begin{cases} 180, & \textit{su tikimybe } p, \\ 90, & \textit{su tikimybe } 1-p. \end{cases}$$

Tikimybė p nėra žinoma.

Nagrinėkime pirkimo opcioną: pirkėjui suteikiama teisė, sumokėjus tam tikro dydžio premiją pardavėjui, momentu $n = 1$ pirkti JAV dolerius už jų dabartinę kainą, t. y. $K = S_0 = 150$. Tokio opciono išmoka momentu $n = 1$ yra

$$X = (S_1 - 150)^+ = \begin{cases} 30, & \text{su tikimybe } p, \\ 0, & \text{su tikimybe } 1-p. \end{cases}$$

Paprastumo dėlei tarkime, kad rinkoje galima gauti nerizikingą paskolą su palūkanomis $R = 0$. Laikykime $S_0^0 = S_1^0 = 1$.

Kokia yra tokio opciono vertė? Jeigu dolerio kritimą ir kilimą laikysime vienodai tikėtinu, t. y. $p = 1/2$, tai grubi opciono vertė bus $EX = 30p = 15$. Tačiau nesunku matyti, kad tokiu atveju yra arbitražo galimybė. Teisingą opciono vertę C_0 reikėtų skaičiuoti iš lygybių (žr. (5) lygybę):

$$C_0 = E^* X = 20p^*$$

ir (pagal anksčiau suformuluotą bearbitražės binominės rinkos kriterijų)

$$S_0 = E^* S_1.$$

Iš čia gauname

$$150 = 180p^* + 90(1 - p^*),$$

taigi $p^* = 2/3$ ir $C_0 = 20$.

Pagrįsime ekonomiškai šią vertę. Tarkime, opciono pardavėjas, gavęs iš pirkėjo premiją $C_0 = 20$ SFR, už 50 SFR perka $\frac{1}{3} \times 100$ USD ir pasiskolina 30 SFR. Taigi jo strategija $(H_1^0, H_1) = (-30, 1/3)$. Ją nesunku suskaičiuoti remiantis (6) lygybėmis. Matome, kad tokiu atveju

$$C_0 = H_1^0 S_0^0 + H_1 S_0.$$

Jeigu momentu $n = 1$ dolerio kursas krenta, tai opcionas nepasirašomas, doleriai parduodami kursu 0,9 SFR, gaunant 30 SFR, ir grąžinama skola 30 SFR.

Jeigu momentu $n=1$ dolerio kursas kyla, tai opcionas pasirašomas, sumokant 30 SFR, doleriai parduodami kursu 1,8 SFR, gaunant 60 SFR, ir gražinama skola 30 SFR. Abiem atvejais pardavėjo galutinis balansas yra 0.

Aprašytoji strategija ir atitinkamos išmokos yra pavaizduotos lentelėje.

	$n = 0$	$n = 1$	
parduodu pirkimo opcioną už 20 *SFR*	20	-30	0
perku $\frac{100}{3}$ *\$*	-50	60	30
pasiskolinu 30 *SFR*	30	-30	-30
suma	0	0	0

Tarkime, kad nagrinėjamasis prekybos laikotarpis yra T metų. Tolydų Bleko-Šoulso modelį galima aproksimuoti binominiu (CRR) modeliu, suskaidant prekybos intervalą $[0,T]$ į N lygių dalių, parenkant parametrus a_N, b_N, R_N ir N – pakankamai didelį.

Tarkime

$$\lim_{N\to\infty}(1+R_N)^N = e^{rT},$$

o akcijos kainų šuoliai aprašomi parametrais $a = a_N$ ir $b = b_N$; čia

$$1 + a_N = (1+r_N)e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}},$$

$$1 + b_N = (1+r_N)e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}.$$

Tegu $C_0^{(N)}$ žymi europietiškojo pirkimo opciono, kurio įvykdymo kaina K ir galiojimo data T, vertę nuliniu momentu. Tada

$$\lim_{N\to\infty} C_0^{(N)} = F(0, S_0);$$

čia $F(t,x)$ yra apibrėžtas (3) lygybe.

Palūkanų normų modeliavimas

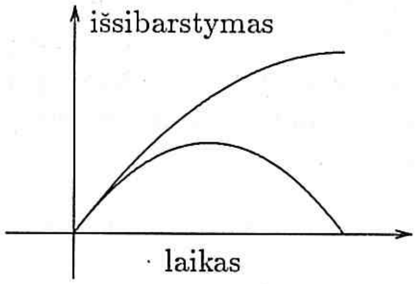
Pastaruoju metu atsiranda vis daugiau finansinių kontraktų ir išvestinių vertybinių popierių tiesiogiai ar netiesiogiai susijusių su palūkanų norma. Tokių kontraktų pavyzdžiai gali būti obligacijų opcionai, mainų opcionai (*swaptions*), palūkanų normų kepurės (*interest rate caps*) ir t. t. Tai sąlygoja vis didesnį dėmesį palūkanų normų modeliams.

Populiariausi vertybiniai popieriai, priklausantys nuo palūkanų normos, yra obligacijos (*bonds*). Jos paprastai yra skirstomos į obligacijas su kuponais (kai iki išpirkimo datos mokami kuponai) ir obligacijas be kuponų arba nulinio kupono obligacijas (*zero-coupon bonds*).

Nulinio kupono obligacijas, arba tiesiog obligacijas, mes suprantame kaip įsipareigojimą išmokėti tam tikrą *fiksuotą* sumą fiksuotu laiko momentu ateityje.

Žymėkime $P(t,T)$ – obligacijos su išpirkimo data T kainą momentu t. Tegu paprastumo dėlei $P(T,T) = 1$.

Pagrindiniai obligacijos ir akcijos skirtumai yra šie: (1) artėjant išpirkimo datai, obligacijos kainos išsibarstymas (*volatility*) mažėja ; (2) artėjant išpirkimo datai, obligacijos kaina artėja į vienetą. Akcijos ir obligacijos nežinomybės evoliucija keičiantis laikui pavaizduota 5 pieš.



5 pieš. Nežinomybės evoliucija

Paprastai obligacijos kaina laikoma tiesiogiai susieta su palūkanų norma lygybe

$$P(t,T) = e^{-(T-t)R(t,T)};$$

čia $R(\cdot,\cdot)$ yra *vidutinė palūkanų norma* (*mean interest rate*).

Nesunku įsitikinti, kad esant determinuotai vidutinei palūkanų normai $R(\cdot,\cdot)$ nearbitražinėje rinkoje turi galioti lygybė

$$P(t,u) = P(t,s)P(s,u), \ t < s < u.$$

Todėl esant gana bendroms sąlygoms galime perrašyti:

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T r_s ds};$$

čia r_t vadinamoji *momentine palūkanų norma* (*spot* arba *instantaneous interest rate*).

Atsitiktinėje aplinkoje $\{r_t, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ yra nežinomas (atsitiktinis) dydis ir sakoma, kad tai yra atsitiktinis procesas filtruotoje tikimybinėje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, P\}$; čia $\mathbb{F}^W$ yra Vynerio proceso W generuota σ algebrų šeima.

Tuomet remiantis Harisono-Pliskos nearbitražinės rinkos kriterijumi galima gauti išraišką

$$P(t,T) = E^\star(e^{-\int_t^T r_s ds}|\mathcal{F}_t); \tag{7}$$

čia $E^\star$ yra vidurkis, atitinkantis ekvivalentų martingalinį matą $P^\star$, kurio atžvilgiu procesas

$$\{e^{-\int_0^t r_s ds}P(t,T), 0 \leqslant t \leqslant T\}$$

yra martingalas.

Pagrindiniai $\{r_t\}$ modeliai yra Vasiceko ir Kokso-Ingersolo-Roso.

(i) Vasiceko (*Oldrich Vasicek*) [30] modelis:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t; \tag{8}$$

čia a, b, ir σ yra teigiamos konstantos. Tai yra Ornšteino-Ulenbeko (*Ornstein-Uhlenbeck*) procesas su vidurkio reversija: kai r_t yra didelis, vidurkio reversija daro jo dreifą neigiamą, o kai r_t yra mažas – teigiamą. Ekonominis vidurkio reversijos pagrindimas yra akivaizdus: kai palūkanos yra didelės, jų paklausa tarp besiskolinančių mažėja, dėl to palūkanos mažėja; ir atvirkščiai, esant mažoms palūkanoms, jų paklausa didėja ir kartu palūkanos pradeda didėti.

Remiantis (7) lygybe, galima suskaičiuoti obligacijos, kurios išpirkimo data yra T, kainą momentu t:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r_t}; \tag{9}$$

čia

$$B(t,T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)}),$$

$$A(t,T) = \exp\left\{\frac{(B(t,T) - T + t)(a^2 b - \sigma^2/2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4a}\right\}.$$

Tuo atveju, kai parametrai a, b ir σ (8) lygtyje priklauso nuo t, taip pat galima suskaičiuoti obligacijos kainą $P(t,T)$ (žr. [12]). Vienas iš didžiausių Vasiceko modelio trūkumų yra tas, kad momentinė palūkanų norma r_t gali įgyti ir neigiamas reikšmes.

(ii) Dž. Koksas, J. Ingersolas (*Jr. Ingersoll*) ir S. A. Rosas [4] pasiūlė šią problemą apeiti modeliuojant r_t lygtimi

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t.$$

Kaip ir Vasiceko modelio atveju, nulinio kupono obligacijos kaina $P(t,T)$ yra (9) pavidalo,

$$B(t,T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

ir

$$A(t,T) = \left[\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}\right]^{2ab/\sigma^2};$$

čia $\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$. Tačiau tuo atveju, kai parametrai a, b ir σ priklauso nuo t, $P(t,T)$ pavidalas nėra išreikštinis.

Kitas kelias yra modeliuoti ne momentinę palūkanų normą r_t, o tiesiogiai obligacijos kainą $P(t,T)$ arba *išankstinę normą* (*forward rate*) f_{tu} $(0 \leqslant t \leqslant u)$, apibrėžtą lygybe

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f_{tu}du}.$$

Šiuo atveju $r_t = f(t,t)$.

D. Hitas, R. Džerou ir A. Mortonas (*David Heath, Robert Jarrow, Andrew Morton*) [10] pasiūlė modeliuoti išankstinę normą lygtimi

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW_t;$$

čia W_t – d-matis Vynerio procesas, o $\alpha(\cdot,\cdot)$ $\sigma(\cdot,\cdot)$ parenkami taip, kad rinka būtų bearbitražė.

Be to, reikia paminėti labai populiarų pasiūlytą T. S. V. Ho ir S.-B. Li [11] (*Thomas S.Y. Ho, Sang-Bin Lee*) diskrečiojo laiko modelį, kuris, panašiai kaip ir CRR, obligacijų kainas $P(t,T)$ aprašo binominiu medžiu.

Istorinė finansų matematikos raidos apžvalga

Bašelje akcijų kainų modelis

Istorinę matematinių metodų taikymo finansuose apžvalgą, be abejo, reikia pradėti nuo žinomo prancūzų matematiko L. Bašelje (*Louis Bachelier, 1870–1946*), kuris 1900 metais Sorbonoje apgynė disertaciją „Spekuliacijos teorija" (*"Théorie de la spéculation"*). Čia „spekuliacija" suprantama ne įprastąja blogiausia šio žodžio prasme, o kaip sandorių vertybinių popierių biržoje sudarymas siekiant po kurio laiko naudos iš sandorių objektų kainų svyravimo. Akcijų kaina disertacijoje bandoma aprašyti atsitiktiniu procesu $\{S_t, t \geqslant 0\}$, kurio prieaugiai $\triangle S_t = S_{t+\triangle t} - S_t$ tam tikra tikimybine prasme yra $\sqrt{\triangle t}$ eilės. Naudodamasis tokiu akcijų kainų modeliu, L.' Bašelje pateikė formules kai kurių kontraktų, tuo metu sudaromų Paryžiaus vertybinių popierių biržoje, racionaliosioms vertėms skaičiuoti. Pastarąją disertaciją galima laikyti tiek tolydžiojo laiko atsitiktinių procesų, tiek ir stochastinių finansų bei opcionų teorijos gimimu.

Šis darbas ilgą laiką buvo užmirštas ir tai galima paaiškinti tuo, kad jis tuo metu nebuvo tinkamai suprastas. Netgi A. Puankarė (*Jules Henri Poincaré, 1845–1912*) – L. Bašelje vadovas – pažymėjo, kad jo studento darbo tema yra gana tolima toms, kurias paprastai pasirenkama tirti.

Tik 1965 metais žymus ekonomistas P. Samuelsonas (*Paul A. Samuelson*), statistiko L. Sevidžo (*Leonard Jimmie Savage, 1917–1971*) dėka „atrado" L. Bašelje. Pažymėsime, kad P. Samuelsonas 1970 metais už ekonomikos srities darbus gavo Nobelio premiją. P. Samuelsonas [26] pastebėjo, kad vietoje Bašelje akcijų kainų modelio

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t,$$

čia $\{W_t\}$ – standartinis Vynerio procesas, ekonomiškai tikslingiau nagrinėti *teigiamą* procesą

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}, \quad S_0 > 0, \tag{10}$$

vadinamąjį *geometrinį Vynerio procesą*. Pastebėsime, kad (10) tenkina stochastinę diferencialinę lygtį

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t). \tag{11}$$

Tarkime, kad, be rizikingos investicijos, rinkoje galima ir *nerizikinga investicija* (obligacija, banko sąskaita ir pan.), kurios kainos S_t^0, $t \geqslant 0$, tenkina lygtį

$$dS_t^0 = S_t^0 r dt,$$

t. y. $S_t^0 = S_0^0 e^{rt}$. Čia r apibrėžia metines investicijos palūkanas (augimo greitį) tolydžiųjų sudėtinių palūkanų schemoje.

Taigi (11) lygybe aprašomas akcijų kainų procesas gana natūralus ir yra ne kas kita, kaip „užtriukšminta“ nerizikinga investicija su $\mu = r$. Taip apibrėžtas $(S^0,\ S)$ rinkos modelis yra paprasčiausias ir, ko gero, pagrindinis tolydusis finansų rinkos modelis, plačiai taikomas iki pat šių dienų.

Šiuolaikiniai finansai

Nuo 50-ųjų pabaigos iki 60-ųjų pradžios finansai buvo, beveik be išimčių, aprašomoji disciplina. Matematinių metodų taikymai dažniausiai apsiribodavo sudėtinių palūkanų ir dabartinių verčių skaičiavimu. Šiuolaikinės finansų teorijos pradžia galima laikyti H. Markovico (*Harry M. Markovitz*) 1952 metais paskelbtą *portfelio* teoriją, dar vadinamą *portfelio vidurkio ir dispersijos analize* (žr. [18]). Už portfelio teorijos srities darbus H. Markovicas 1990 metais buvo apdovanotas Nobelio premija.

H. Markovicas pirmasis pastebėjo lyg ir akivaizdų faktą, kad individualių vertybinių popierių rizika gali būti sumažinta kombinuojant juos į portfelį. Antra vertus, individualaus vertybinio popieriaus rizika negali būti matuojama izoliuotai; ji turėtų būti matuojama pagal jos įnašą į rinkos portfelio riziką.

Toliau mes suformuluosime bendrą vidurkio ir dispersijos analizės uždavinį, pasiūlytą Markovico darbe [19]. Tarkime, kad yra n vertybinių popierių su grąžomis $X_1, ..., X_n$; čia (*grąža* (*return*) vadinamas būsimosios ir dabartinės kainų pokyčio bei dabartinės kainos santykis. Matematiškai jas galime įsivaizduoti kaip n atsitiktinių dydžių, kurių vidurkių vektorius $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)'$ ir kovariacijų matrica $\Sigma = (\sigma_{ij})$.

Investuotojas sudaro porfelį $w = (w_1, ..., w_n)'$; čia w_i nurodo i-ojo vertybinio popieriaus dalį portfelyje. Įveskime apribojimus:

$$\begin{aligned} Aw &= b, \\ \sum w_i &= 1, \\ w &\geqslant 0; \end{aligned} \tag{12}$$

čia: A yra $m \times n$ matrica, o b – $m \times 1$ vektorius. Portfelis vadinamas *leistinuoju*, jeigu jis tenkina (12) apribojimus.

Viso portfelio vidutinė grąža ir dispersija (ji nusako portfelio *riziką*) atitinkamai yra

$$E = \mu' w \quad \text{ir} \quad V = w'\Sigma w = \sum_{i,j} w_i w_j \sigma_{ij}.$$

Leistinasis portfelis $w^0 = (w_1^0, ..., w_n^0)'$, kurio vidurkis E^0 ir dispersija V^0, vadinamas *efektyviuoju*, jeigu nėra kito tokio portfelio $w^1 = (w_1^1, ..., w_n^1)'$, kurio vidurkis E^1 ir dispersija V^1 tenkintų sąlygas:

$$E_1 \geqslant E_0 \quad \text{ir} \quad V_1 < V_0$$

arba

$$E_1 > E_0 \quad \text{ir} \quad V_1 \leqslant V_0.$$

Pagrindiniai portfelio analizės uždaviniai yra nustatyti:

- ar (12) apribojimai yra leistini,
- jeigu taip, tai rasti efektyviųjų portfelių aibę.

Kaip pastebėjo H. Markovicas, tai nėra grynai tiesinio programavimo uždavinys, t. y. efektyvus porfelis nėra tas, kuris maksimizuoja vidurkį E esant fiksuotai dispersijai V ir minimizuoja V esant fiksuotam E.

Markovico modelyje reikia žinoti visas tarpusavio individualių vertybinių popierių kovariacijas. Tai, esant dideliam jų kiekiui, sulėtina skaičiavimus. V. F. Šarpas (*William F. Sharpe*) [27], kartu su H. Markovicu 1990 metais už ekonomikos srities darbus gavęs Nobelio premiją, pasiūlė šiek tiek modifikuoti modelį, vietoje tarpusavio kovariacijų skaičiuojant kovariacijas su kažkuriuo vienu dominuojančiu faktoriumi.

Dž. Tobinas (*James Tobin*) – dar vienas ekonomikos srities Nobelio premijos laureatas (1981) – suformulavo porfelio *atskyrimo teoremą*, t. y. ištyrė sąlygas, kuriomis bet kuris efektyvusis porfelis gali būti išskaidytas į kelių fiksuotų portfelių kombinaciją. Dažniausiai tai nerizikingas aktyvas ir portfelis, sudarytas vien tik iš rizikingų vertybinių popierių, be to, ši struktūra nepriklauso nuo investuotojo naudos funkcijos ir yra visiškai apibrėžta rizikingų vertybinių popierių tikimybinėmis charakteristikomis.

Nors H. Markovico išvystyta portfelio teorija nurodo, kaip reikėtų matuoti riziką, tačiau ji neatsako į klausimą, koks yra ryšys tarp rizikos ir vidutinės grąžos. Rizikos ir grąžos ryšį apibrėžia vadinamasis CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) modelis, pasiūlytas nepriklausomai Dž. Lintnerio (*John Lintner*) [17] ir V. Šarpo [28]. CAPM remiasi tam tikromis sąlygomis, kurių svarbiausia – *tobulos kapitalo rinkos* (*perfect capital market*) prielaida, kad visi rinkos dalyviai turi vienodą informaciją, pagal kurią daro optimalius sprendimus. Šios sąlygos lemia, kad susiklosčiusioje pusiausvyroje individualaus rizikingo vertybinio popieriaus i vidutinė grąža yra lygi

$$EX_i = R + \beta_i(EX - R);$$

čia: R – nerizikingo vertybinio popieriaus grąža; EX – rinkos portfelio vidutinė grąža. Tuo atveju, kai rizikos matas yra dispersija, β_i – i-ojo vertybinio popieriaus beta koeficientas randamas iš lygybės

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X)}{DX} = \mathrm{Corr}(X_i, X)\sqrt{\frac{DX_i}{DX}}$$

ir nurodo šio popieriaus grąžų vidutinį išsibarstymą rinkos porfelio atžvilgiu.

Taigi CAPM modelyje rizikingo vertybinio popieriaus vidutinė grąža priklauso nuo trijų faktorių: 1) nerizikingos investicijos grąžos, 2) rinkos portfelio vidutinės grąžos, 3) vertybinio popieriaus beta koeficiento.

••• $\alpha + \omega$ •••

Reikia taip pat paminėti Modiljanio (*Franco Modigliani*) ir Milerio (*Merton H. Miller*) [22], [23] darbus tiriant optimalią firmos kapitalo struktūrą. Tam tikromis „geros" rinkos sąlygomis, firmos vertė priklauso tik nuo jos būsimų kapitalo įplaukų ir nepriklauso nuo kapitalo finansavimo šaltinių (akcijų išleidimas ar paskola). Pažymėsime, kad abu finansininkai tapo ekonomikos srities Nobelio premijos laureatais, F. Modiljanis – 1985 metais, Mileris – 1990.

Kitas svarbus 60-ųjų tyrimas buvo atliktas jau minėto P. Samuelsono [25] ir E. Fama [7] (*Eugene F. Fama*). Juo norėta patikrinti rinkos efektyvumo hipotezę, t. y. kad rinkoje, kurioje

- informacija yra vienodai pasiekiama,
- nėra mokesčių bei kitų sandėrių barjerų,
- kainos negali būti veikiamos atskirų asmenų ar institucijų,
- visi investuotojai elgiasi racionaliai (t. y. maksimizuoja savo naudos funkciją),

diskontuotos vertybinių popierių kainos elgiasi kaip martingalas, t. y. geriausias būsimos kainos įvertis (tinkamai parinkto „rizikai neutralaus" tikimybinio mato atžvilgiu) yra šios dienos kaina. Galiojant šiai hipotezei ir turint informaciją apie buvusias kainas ir visą viešai prieinamą informaciją, būsimųjų kainų neįmanoma prognozuoti. Tai patvirtino ir žymaus statistiko Kendalo (*Maurice Kendall*) [15] statistiniai tyrimai.

Vėliau Markovico statinė portfelio teorija buvo apibendrinta ir pateikta kaip dinaminė portfelio teorija (žr. pavyzdžiui [20]), o Lintnerio, Šarpo kapitalo vertinimo modelis CAPM – kaip *arbitražo teorija* APM (*Arbitrage Pricing Theory*), kurioje vietoje vienintelio rizikos faktoriaus beta buvo įvesta keletas faktorių (žr. [24]). Remiantis APM, pusiausvyros būsenoje esančioje rinkoje negalimà arbitražo strategija, t. y. su nulinėmis investicijomis be rizikos neįmanoma gauti pelno.

Nuo 70-ųjų pradžios finansų teorijoje vis plačiau buvo pradėta taikyti gana sudėtinga stochastinių diferencialinių ir integralinių lygčių, stochastinio dinaminio programavimo, lygčių dalinėmis išvestinėmis technika.

Finansų matematikos knygos

Pabaigoje norėčiau paminėti keletą vadovėlių, rekomenduotinų besidomintiems finansų matematika. Geros prancūzų kalba išleistos knygos [5] ir [16]. Iš daugybės anglų kalba išleistų knygų tinkamiausios yra [6], [13], [14] ir monografija [20]. Yra keletas knygelių parengtų Rusijoje, pavyzdžiui, [31]–[33], kurios yra skirtos bankininkams ir finansininkams. Reikėtų taip pat pažymėti, kad Steklovo instituto matematikų grupė, vadovaujama A.N. Širiajevo, taip pat intensyviai dirba ir publikuoja finansų matematikos srities darbus. Šiai temai skirtas žurnalo "Теория вероятностей и ее применения" 1994 metų pirmasis numeris.

••• $\alpha + \omega$ •••

LITERATŪRA

1. *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. 1973. **3**. 637–659.
2. *Cox J.C., Ross S.A.* The valuation of options for alternative stochastic processes // Journal of Financial Economics. 1976. **3**. 145–166.
3. *Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M.* Option pricing: a simplified approach // Journal of Financial Economics. 1979. **7**. 229–263.
4. *Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A.* A theory of the term structure of interest rates // Econometrica. 1985. **53**. 385–407.
5. *Dana R.-A., Jeanblanc-Picqué M.* Marchés financiers en temps continu: valorisation et équilibre. Paris: Economica. 1994.
6. *Dothan M.V.* Prices in Financial Markets. Oxford University Press. Oxford. 1990.
7. *Fama E.F.* The behaviour of stock market prices // Journal of Business. 1965. **38**. 34–105.
8. *Harrison J.M., Kreps D.* Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets // Journal of Economic Theory. 1979. **20**. 381–408.
9. *Harrison J.M., Pliska S.R.* Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading // Stochastic Processes and their Applications. 1980. **11**. 215–260.
10. *Heath D., Jarrow R. Morton A.* Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation // Econometrica. 1992. **60**. 77–105.
11. *Ho T.S.O., Lee S.-A.* Term structure movements and pricing interest rate contingent claims // Journal of Finance. 1986. **41**. 1011–1029.
12. *Hull J., White A.* Pricing interest-rate derivative securities // Review of Financial Studies. 1990. **3**. 573–592.
13. *Hull J. Options, Futures and other Derivative Securities.* Prentice Hall, 1989.
14. *Ingersoll J.E.* Theory of Financial Decision Making. Rowman & Littlefield Publishers, 1987.
15. *Kendall M.G.* The analysis of time series, Part I: prices // Journal of the Royal Statistical Society. 1953. **96**. 11–25.
16. *Lamberton D., Lapeyre B.* Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles. Vol. SMAI **9**. Paris: Ellipses 1991.
17. *Lintner J.* The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets // Review of Economic Statistics. 1965. **47**. 13–37.

18. *Markovitz H.M.* Portfolio selection // Journal of Finance. 1952. **7**. 77–91.

19. *Markovitz H.M.* The general mean-variance portfolio selection // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1994. **347**. 543–549.

20. *Merton R.C.* Continuous-time finance. Oxford: Basil Blackwell. 1992.

21. *Merton R.C.* Theory of rational option pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. 1973. **4**. 141–183.

22. *Modigliani F., Miller M.H.* The cost of capital, corporation finance and the theory of investment // American Economic Review. 1958. **48**. 261-297.

23. *Modigliani F., Miller M.H.* Taxes and the cost of capital: a correction. // American Economic Review. 1963. **53**. 433–443.

24. *Ross S.* The arbitrage theory of capital asset pricing // Journal of Economic Theory. 1976. **13**. 341–360.

25. *Samuelson P.A.* Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly // Industrial Management Review. 1965. **6**. 41–50.

26. *Samuelson P.A.* Rational theory of warrant pricing // Industrial Management Review. 1965. **6**. 13–31.

27. *Sharpe W.F.* A simplified model for portfolio analysis // Management Science. 1963. **9**. 277–293.

28. *Sharpe W.F.* Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk // Journal of Finance. 1964. **19**. 425–442.

29. *Tobin J.* Liquidity preference as behavior toward risk. Review of Economic Studies. 1958. **67**. 65–86.

30. *Vasicek O.* An equilibrium characterization of the term structure // Journal of Financial Economics. 1977. **5**. 177–188.

31. *Первозванский А.А., Первозванская Т.Н.* Финансовый рынок: расчет и риск. Москва: Инфра-М. 1994.

32. *Цалыч Г.Г.* Опционные, фьючерсные и форвардные контракты: сверхприбыльные инвестиции в период инфляции. Москва, 1994.

33. *Чесноков А.С.* Инвестиционная стратегия, опционы и фьючерсы. Москва: ПАИМС, 1995.