Aleksandras Baltrūnas

Apie vieną A. Baranausko prielaidą

Vyskupas Antanas Baranauskas (1835–1902) pagarsėjo ne tik kaip nuostabaus grožio poemos apie Lietuvos gamtą „Anykščių šilelis“ autorius, ne tik kaip žymus kalbininkas, bet ir kaip matematikas, palikęs keletą svarių matematikos darbų. Susidomėjęs pirminių skaičių pasiskirstymu, jis atkreipė dėmesį į vokiečių matematiko E. Maiselio (E. Meissel, 1826–1895) imtą vartoti funkciją $\varphi(n,m)$ – kiekį natūraliųjų skaičių, kurie neviršija n ir nesidalija iš m pirmųjų pirminių skaičių $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Jei $\psi(n)$ pažymėsime skaičių pirminių skaičių, kurie neviršija n, tai tuomet

$$\psi(n) = \psi(\sqrt{n}) - 1 + \varphi(n, \psi(\sqrt{n})). \tag{1}$$

A. Baranauskas nustatė, kad funkcija $\varphi(n,m)$ pasižymi viena savybe, kurią jis pavadino tarpų simetrija. Ši savybė A. Baranausko konsultanto K. Hosfeldo buvo aprašyta [1] straipsnyje.

Benagrinėjant Meiselio funkciją $\varphi(n,m)$, A. Baranauskui kilo idėja, kurią jis pateikė 1890 m. lapkričio 15 (27) d. laiške H. Vėberiui: „... ar Meissel'ys nerado kelio, kaip atrasti $\varphi(n,x) = a$, kad iš „a“ galima būtų daeiti koksai yra skaičius „n“? Nes, tai žinant, galima būtų daeiti iš p_x, koksai yra p_{x+1}“ (žr. [2]). Kitaip sakant, taręs, jog vietoj n yra pirminis skaičius, A. Baranauskas siekė išspręsti lygtį

$$\varphi(n,x) = a,$$

čia n – nežinomas, x – iš anksto parenkamas skaičius. A. Baranauskas pasirenka patogiausią x reikšmę: $x = \psi(\sqrt{n})$. A. Baranauskas mano radęs sprendimą: „Aš tariaus jog bus: $\varphi(n, \psi(\sqrt{n})) = a$,

$$a\Big(\frac{p_x - 1}{p_x}\Big)\Big(\frac{p_{x-1} - 1}{p_{x-1}}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(\frac{p_2 - 1}{p_2}\Big) \pm 1 = n.\text{“}$$

Kaip galima suprasti, p_1 jis laikė 1. Tačiau iš tolesnių skaičiavimų matyti, kad užrašydamas šią formulę A. Baranauskas suklydo. Turėtų būti

$$a\Big(\frac{p_x}{p_x - 1}\Big)\Big(\frac{p_{x-1}}{p_{x-1} - 1}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(\frac{p_2}{p_2 - 1}\Big) - \Delta = n, \tag{2}$$

o skirtumas Δ nebūtinai lygus ± 1. Ši formulė atsirado, ko gero, todėl, kad Maiselio funkcija $\varphi(n,m)$ panaši į Oilerio funkciją $\varphi(n)$; $\varphi(n)$ yra skaičius tų natūraliųjų skaičių, kurie neviršija n ir yra su n tarpusavyje pirminiai. Kaip žinoma, (žr. [3], 117 teoremą), kai $n > 1$, teisinga lygybė

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p}).$$

A. Baranauskas spėjo, kad $\Delta = \pm 1$. Išties pirmiesiems penkiems pirminiams skaičiams taip ir yra. Tačiau jau kai $x = 6, 8$ ($p_6 = 13$, $p_8 = 19$) skirtumas Δ pasidaro lygus 2. Kai $x = 18$, šis skirtumas padidėja iki 4. Visa tai pastebi A. Baranauskas, parašęs: „Ką in didesnius skaičius einama, tą didesnį nelygumą randam" (žr. [2]). Todėl jis bando (2) formulę tam tikru būdu patobulinti.

Deja, ir tai nepadeda. Todėl savo laiško pabaigoje A. Baranauskas ir klausia: „Tai ben ar neaptiko Meisselys kelio, kaip galima būtų šito nelygumai išlyginti?" [2]. Dabar aišku, kad paprastu būdu šių „nelygumų" išlyginti negalima: pirminiai skaičiai yra išsibarstę chaotiškai. Todėl geriausiu atveju mes galime tik įvertinti Δ.

Iš (1) formulės ir asimptotikos $\psi(n) \sim n/\ln n$, išplaukia

$$a = \varphi(n, \psi(\sqrt{n})) \sim n/\ln n.$$

Kita vertus, F. Mertensas (Franz Mertens, 1840–1927) įrodė, kad

$$\prod_{p \leq x} (1 - \frac{1}{p}) \sim e^{-C}/\ln x;$$

čia $C = 0,577215\ldots$ – Oilerio konstanta (žr. [3], p. 355).

Imdami $x = \psi(\sqrt{n})$, gauname

$$\Big(\frac{p_x}{p_x - 1}\Big)\Big(\frac{p_{x-1}}{p_{x-1} - 1}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(\frac{p_2}{p_2 - 1}\Big) \sim e^C \ln x = e^C \ln(\psi(\sqrt{n})) \sim 0.5 e^C \ln n.$$

Tuomet su $a = \varphi(n, \psi(\sqrt{n})) \sim n/\ln n$

$$a\Big(\frac{p_x}{p_x - 1}\Big)\Big(\frac{p_{x-1}}{p_{x-1} - 1}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(\frac{p_2}{p_2 - 1}\Big) \sim \frac{e^C}{2}\frac{n}{\ln n}\ln n = \frac{e^C}{2} n.$$

Dydis $0.5e^C$ yra artimas 1, tačiau jam nelygus. Todėl (2) formulėje

$$\Delta \sim (\frac{e^C}{2} - 1)n,$$

kitaip tariant, skirtumas Δ yra tokios pat eilės kaip ir n.

Jei A. Baranausko (2) formulę pataisytume šitaip:

$$\frac{2a}{e^C}\Big(\frac{p_x}{p_x - 1}\Big)\Big(\frac{p_{x-1}}{p_{x-1} - 1}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(\frac{p_2}{p_2 - 1}\Big) - \Delta = n,$$

tai turėtume $\Delta = o(n)$, t. y. gautume pirminio skaičiaus n įvertį, išreikštą pirminiais skaičiais $p_1, \ldots, p_x$.

••• $\alpha + \omega$ •••

Tad A. Baranauskui nepasisekė surasti rekurentinės pirminio skaičiaus p_r formulės, išreiškiančios p_r pirmaisiais pirminiais skaičiais $p_1, \ldots, p_{r-1}$. Tokią formulę 1971 m. Vašingtono universiteto leidinyje paskelbė J. M. Gandis (J. M. Gandhi) (žr. [4]).

Literatūra

1. *Hosfeld C.* Bemerkung über eine zahlentheoretische Formel // Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1890. B. 25. S. 382–384.
2. A. Baranausko laiškai H. Vėberiui. Lietuvių literatūros ir tautosakos rankr. skyrius, F. 1–585.
3. Бухштаб А. А., Теория чисел. Москва, Просвещение, 1966.
4. *Gandhi J. M.* Formulae for the n-th prime: Proc. Washington State Univ. Conf. on Number Theory, Washington, Pullman, 1971. P. 96-106.

Formulė, kurios ieškojo A. Baranauskas:

$$\boxed{p_{n+1} = \left[1 - \log_2\left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} \frac{(-1)^r}{2^{p_{i_1} \cdots p_{i_r}} - 1}\right)\right].}$$