Jonas Kubilius

Rymano dzeta funkcija ir jos paslaptys

Istorija žino daug žmonių, kurių gyvenimo trukmė buvo neilga, tačiau jie paliko neišdildomą pėdsaką žmonijos istorijoje. Nemažai tokių yra ir matematikų. Pakanka paminėti E. Galua (Evariste Galois, 1811–1832), N. Abelį (Niels Henrik Abel, 1802–1829), Kaune gimusį H. Minkovskį (Hermann Minkowski, 1864–1909). Neilgai gyveno ir vienas žymiausių XIX amžiaus matematikų B. Rymanas (Bernhard Georg Friedrich Riemann, 1826 09 17 – 1866 07 20) – nepilnus 40 metų. Tačiau jo matematinė kūryba yra labai plati. Analizės pagrindinės sąvokos — integralas ir išvestinė, kompleksinio kintamojo funkcijų teorija, elipsinės ir Abelio funkcijos, hipergeometrinės funkcijos, trigonometrinės eilutės, pirminių skaičių pasiskirstymas, minimalūs paviršiai, neeuklidinės geometrijos, šilumos laidumas, oro bangų teorija, ausies ir akių sandara, šviesa, magnetizmas, elektra — štai beveik visas sąrašas sričių, kuriomis jis domėjosi. Jo kūrybos periodas tęsėsi vos 15 metų. Per tą laiką parašė apie 30 darbų, iš viso apie 500 puslapių. Produktyvumas labai didelis. Tačiau svarbu ne puslapių skaičius. Kokį tik nagrinėjo klausimą, dar kitų netyrinėtą (tokių nedaug), ar ėmėsi nagrinėti klausimus, kuriuos jau narpliojo jo pirmtakai (tokių daugiausia), jis gavo esminių rezultatų, sukūrė iš esmės naujų metodų. Beveik galima teigti, kad kiekvienas jo memuaras padarė savo srityje perversmą. F. Kleinas (Felix Klein, 1849–1925) taip jį apibūdina: „Niekas kitas nepadarė dabartinei matematikai tokio esminio poveikio kaip Rymanas.“

Šiame straipsnelyje (jo pagrindas yra pranešimas, kurį 1976 m. skaičiau Vilniaus universiteto „Matematikų dienų“ dalyviams) aš panagrinėsiu Rymano 8 puslapių memuarą, skirtą pirminių skaičių teorijai. Tai — „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse“, kurį B. Rymanas pasiuntė Berlyno mokslų akademijai 1859 metų spalio mėnesį, kai ši jį išrinko savo nariu korespondentu. Memuaras tais pačiais metais buvo publikuotas. Mano rašiniui suprasti reikia šiek tiek žinių iš kompleksinio kintamojo funkcijų teorijos.

Kas buvo žinoma apie pirminius skaičius iki Rymano?

Jau Euklidas (ca 340 – ca 287) įrodė, kad tokių skaičių esama be galo daug. Įrodymas yra labai paprastas. Jei jų būtų tik baigtinis skaičius, tarkime $p_1, \ldots, p_r$, tai kiekvienas skaičius, didesnis už 1, dalytųsi bent iš vieno tų skaičių. Tačiau skaičius $p_1 p_2 \ldots p_r + 1$ nesidalija nė iš vieno tų skaičių. Gautume prieštarą.

L. Oileris (Leonhard Euler, 1707–1783) 1737 m. pasiūlė kitą įrodymą, pagrįstą eilutės

$$\sum_p \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots$$

divergavimu; čia sumuojama pagal visus pirminius skaičius.

A. Ležandras (Adrien Marie Legendre, 1752–1833) 1798 m. rado empirinę formulę, kad skaičius $\pi(x)$ pirminių skaičių, mažesnių už x, yra apytiksliai lygus

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - 1.08366}.$$

K. Gausas (Carl Friedrich Gauß, 1777–1855) savo laiške 1849 m. rašė, jog 1792 ar 1793 m. jis pastebėjęs apytikslę lygybę

$$\pi(x) \approx \int_2^x \frac{du}{\ln u}.$$

P. Dirichle (Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859) 1838 m. įrodė, kad kiekvienoje aritmetinėje progresijoje $Dk + l, (D, l) = 1$ $(k = 0, 1, 2. \ldots)$, yra be galo daug pirminių skaičių. P. Čebyšovas (Pafnutij Čebyšev, 1821–1894) paskelbė du darbus – 1851 ir 1852 m. Pagrindiniai jo rezultatai yra du teiginiai. *Jei*

$$\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$$

turi ribą, tai ji lygi 1. Ir

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} \geq a, \quad \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} \leq \frac{6}{5}a;$$

čia

$$a = \ln \frac{2^{1/2}3^{1/3}5^{1/5}}{30^{1/30}} = 0,92129\ldots, \quad \frac{6}{5}a = 1.10555\ldots$$

Iš Čebyšovo antrojo rezultato išplaukia vadinamojo Bertrano (Joseph Louis François Bertrand, 1822–1900) postulato įrodymas. J. Bertranas 1845 m. publikavo darbą iš grupių teorijos. Jam prireikė teiginio: *kiekvienam $x \geq 7$ intervale $\left(\frac{x}{2}, x - 2\right)$ yra bent vienas pirminis skaičius.* Šį teiginį jis patikrino visiems $x \leq 6 \cdot 10^6$, nes tuo metu turėtos tik tokios pirminių skaičių lentelės. Iš Čebyšovo teoremos išplaukia, jog kiekvienam $\epsilon > \frac{1}{5}$ intervale $\left(x, (1+\epsilon)x\right)$ yra bent vienas pirminis skaičius, jei tik x yra pakankamai didelis.

Rymano memuaras suvaidino labai svarbų vaidmenį ne tik pirminių skaičių, bet ir funkcijų teorijoje. Pažymėkime

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}. \tag{1}$$

Teisinga tapatybė

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}; \tag{2}$$

čia sandauga imama pagal visus pirminius skaičius p.

Iki tol ta funkcija buvo nagrinėta tik realiųjų s atveju. B. Rymanas ėmė ją tirti ir tada, kai s yra kompleksinis skaičius. Kai $\mathrm{Re}s > 1$, (1) eilutė ir (2) sandauga konverguoja. Todėl $\zeta(s)$ yra analizinė kompleksinių skaičių pusplokšmėje $\mathrm{Re}s > 1$. B. Rymanas įrodė, kad šią funkciją galima analiziškai pratęsti į visą kompleksinių skaičių plokštumą. Ji visur yra analizinė, išskyrus tašką $s = 1$, kuriame turi pirmosios eilės polių su likiniu 1, ir be galo nutolusį esminį pavienį tašką, kitaip tariant,

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

yra sveika transcendentinė funkcija.

B. Rymanas šiuos teiginius įrodo taip. Priminsime, jog gama funkcija $\Gamma(s)$, kai $\mathrm{Re}s > 0$, yra apibrėžiama integralu

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Todėl

$$\frac{\Gamma(s)}{m^s} = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-mx} dx.$$

Iš čia, kai $\mathrm{Re}s > 1$,

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\infty x^{s-1} e^{-mx} dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx,$$

nes galima sukeisti sumavimo ir integravimo tvarką. Imame integralą

$$-\int_{C_\delta} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz.$$

Integravimo konturas C_δ imamas toks. Perpjauname realiosios ašies teigiamąjį pusašį. Integravimo kelią imame nuo $+\infty$ viršutine pusašies puse, toliau apskritimu apie tašką $z = 0$ su spinduliu δ, vėliau apatine pusašies puse iki $+\infty$. Čia $(-z)^s = e^{s\ln(-z)}$. Integralas apskritimu konverguoja nulin, kai $\delta \to 0$ ir $\mathrm{Re}s > 1$. Iš kitų dviejų narių gauname

$$\left(e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}\right) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

Vadinasi,

$$\zeta(s) = \frac{-\Gamma(-s+1)}{2\pi i} \int_{C_\delta} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz.$$

Ši formulė turi prasmę visiems kompleksiniams s. Taip funkciją ζ pratęsiame analiziškai į visą kompleksinę plokštumą. Ji yra analizinė visur, išskyrus funkcijos $\Gamma(-s+1)$ polius $s = 1, 2, 3, \ldots$. Tačiau taškuose $s = 2, 3, 4, \ldots$ funkcija $\zeta(s)$, kaip matome iš (1) formulės, yra analizinė. Taigi ji turi polių tik taške $s = 1$. Be to, $\zeta(s) = 0$, kai $s = -2, -4, -6, \ldots$

ζ funkcija tenkina tam tikrą funkcinę lygtį, kurią B. Rymanas įrodė dviem būdais. Pirmasis pagrįstas konturiniu integravimu, antrasis — teta funkcijos transformacijų savybėmis. Trumpai pakalbėsime apie antrąjį būdą. Imkime lygybę

$$\frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\pi^{s/2}m^s} = \int_0^\infty e^{-\pi m^2 x} x^{s/2-1} dx,$$

kai $\mathrm{Re}s > 1$. Susumavę pagal m, gauname

$$\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x) x^{s/2-1} dx;$$

čia

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^\infty e^{-\pi m^2 x}.$$

Jau K. Jakobis (Karl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851) buvo įrodęs, kad

$$1 + 2\psi(x) = \Big(1 + 2\psi\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Perrašysime integralą pavidalu

$$\int_0^\infty \psi(x)x^{s/2-1}dx = \int_1^\infty \psi(x)x^{s/2-1}dx + \int_0^1 \psi(x)x^{s/2-1}dx.$$

Pakeitę antrajame integrale x kintamuoju $1/x$, gauname

$$-\int_\infty^1 \psi\Big(\frac{1}{x}\Big)x^{-s/2-1}dz = \int_1^\infty \Big(\sqrt{x}\psi(x) + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}\Big)x^{-s/2-1}dx.$$

Todėl

$$\int_0^\infty \psi(x)x^{s/2-1}dx = \int_1^\infty \psi(x)\Big(x^{s/2} + x^{(1-s)/2}\Big)\frac{dx}{x} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_1^\infty \Big(x^{-(s-1)/2} - x^{-s/2}\Big)\frac{dx}{x} =$$

$$= \int_1^\infty \psi(x)\Big(x^{s/2} + x^{(1-s)/2}\Big)\frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)}.$$

Matome, kad, pakeitus s dydžiu $1-s$, reiškinys nesikeičia. Taigi

$$\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\pi^{-1/2}\zeta(s) = \Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\pi^{-(1-s)/2}\zeta(1-s).$$

Ši lygybė yra vadinama dzeta funkcine lygtimi. Ją galima ir kitaip užrašyti. Funkcija

$$\xi(s) = \Gamma\Big(\frac{s}{2}+1\Big)(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)$$

yra sveikoji ir

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Ją galima išreikšti funkcija $\psi(x)$. Paminėsime vieną formulę

$$\xi\Big(\frac{1}{2}+it\Big) = 4\int_1^\infty \frac{d}{dx}\Big(x^{3/2}\psi'(x)\Big)\cdot x^{-1/4}\cos\Big(\frac{t}{2}\ln x\Big)dx.$$

Pointegralinį reiškinį galima išskleisti labai greitai konverguojančia eilute.

Toliau Rymano memuare yra sunki ir neaiški vieta. B. Rymano tikslas yra išskleisti funkciją $\xi(s)$ begaline sandauga

$$\xi(s) = \xi(0)\prod_\rho \Big(1-\frac{s}{\rho}\Big); \tag{3}$$

čia ρ perbėga funkcijos $\xi(s)$ šaknis. Kaip žinome, kiekvieną polinomą $P(z)$ galima išreikšti baigtine sandauga

$$P(z) = P(0)\prod_\rho \Big(1-\frac{z}{\rho}\Big)$$

pagal polinomo šaknis ρ. Formulė (3) leistų traktuoti $\xi(s)$ „kaip begalinio laipsnio polinomą“. Panašiai L. Oileris traktavo funkciją $\sin x$, spėdamas ir vėliau įrodydamas formulę

$$\sin\pi x = \pi x\prod_{n=1}^\infty \Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big).$$

Norėdamas įrodyti (3) formulę, B. Rymanas turėjo nagrinėti funkcijos $\xi(s)$ nulių pasiskirstymą. Pradžioje jis pastebėjo, kad iš (2) sandaugos išplaukia, jog $\zeta(s)$ neturi nulių pusplokšmėje $\mathrm{Re}s > 1$, nes begalinė konverguojanti sandauga gali virsti nuliu tik tada, kai vienas iš jos dauginamųjų lygus nuliui. Iš funkcinės lygties išplaukia, kad $\xi(s)$ neturi nulių ir pusplokšmėje $\mathrm{Re}s < 0$. Vadinasi, jos šaknys yra vadinamojoje kritinėje juostoje $0 \le \mathrm{Re}s \le 1$. Jos yra simetriškos taško $s=\frac{1}{2}$ ir realiosios ašies atžvilgiu, taigi simetriškos ir tiesės $\mathrm{Re}s = \frac{1}{2}$ atžvilgiu.

B. Rymanas rašo, kad skaičius menamųjų šaknų, kurių menamoji dalis yra tarp 0 ir T , yra apytiksliai lygus

$$\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} \tag{4}$$

ir santykinė paklaida yra $1/T$ eilės. Jis sako, kad tas skaičius yra integralas

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}ds$$

konturu, kuris yra stačiakampio $0 \le \mathrm{Re}s \le 1, 0 \le \mathrm{Im}s \le T$ perimetras, ir tas integralas yra lygus minėtam skaičiui su santykine $1/T$ eilės paklaida. Tačiau nenurodo, kaip įvertinamas integralas. Tai padaryti pavyko tik 1905 m. H. Mangoldtui.

Toliau B. Rymanas teigia, kad skaičius šaknų tiesėje $\mathrm{Re}s = 1/2$ yra „maždaug" tas pats (4) reiškinys. Jis nepaaiškina, kuria prasme reikia suprasti tą aproksimaciją. Manoma, jog tai reiškia, kad $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ šaknų su $0 \le t \le T$ skaičius yra reiškiamas (4) formule su santykine paklaida, konverguojančia nulin, kai $T \to \infty$. Tik 1914 m. G. Hardžiui (Godfrey Harold Hardy, 1877–1947) pavyko įrodyti, kad yra be galo daug $\zeta(s)$ šaknų tiesėje $\mathrm{Re}s = \frac{1}{2}$. G. Hardis ir Dž. Litlvudas (John Edensor Littlewood, 1885–1977) 1921 m. įrodė, kad tokių šaknų tarp 0 ir T yra $\ge cT$, kai T yra pakankamai didelis; čia c yra konstanta. A. Selbergas (Atle Selberg) 1942 m. įrodė, kad jų yra $\ge c_1 T \ln T$ su atitinkama konstanta c_1. N. Levinsonas 1974 m. parodė, jog galima imti $c_1 = \frac{1}{3}$. Vėliau ši konstanta buvo kiek pagerinta. 1914 m. H. Boras (Harald August Bohr, 1887–1951) ir E. Landau (Edmund Georg Landau, 1877–1938) įrodė, kad skaičius $\zeta(s)$ šaknų su $0 \le \mathrm{Im}s \le T, \frac{1}{2} - \varepsilon < \mathrm{Re}s < \frac{1}{2} + \varepsilon$ kiekvienam ε yra lygus (4) su santykine paklaida, konverguojančia nulin, kai $T \to \infty$.

Toliau B. Rymanas formuluoja hipotezę, kad funkcijos $\zeta(s)$ visos menamosios šaknys yra tiesėje $\mathrm{Re}s = \frac{1}{2}$. Kaip jam kilo mintis, kad tokia hipotezė galėtų būti teisinga, — iki šiol neaišku.

B. Rymanas logaritmuoja (2) formulę, skleidžia ją eilute ir, įvedęs funkciją

$$J(x) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{p^n < x} \frac{1}{n} + \sum_{p^n \le x} \frac{1}{n} \Big),$$

gauna formulę

$$\ln \zeta(s) = s \int_0^\infty J(x) x^{-s-1} dx \quad (\mathrm{Re} > 1).$$

Tai vadinamoji Melino (Robert Hjalmar Mellin, 1854–1933) transformacija, įvesta tik po 40 metų. Ją galima apversti. Tą B. Rymanas ir daro, tiesa, nepagrįsdamas. Gaunama formulė

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{s} \ln \zeta(s) ds \quad (a > 1).$$

Išskleidęs funkciją $\xi(s)$ begaline sandauga, B. Rymanas po ilgų ir gana sudėtingų (ne visada aiškių) skaičiavimų gauna pagrindinę formulę

$$J(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\mathrm{Re}\rho > 0} \Big(\mathrm{Li}(x^\rho) + \mathrm{Li}(x^{1-\rho}) \Big) + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t} + \ln \xi(0) \quad (x > 0);$$

čia

$$\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{du}{\ln u} = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{du}{\ln u} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{du}{\ln u} \Big).$$

B. Rymano tikslas buvo ne funkcija $J(x)$, o $\pi(x)$. Tačiau nesunku įrodyti, kad

$$J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \ldots$$

B. Rymanas apverčia šią formulę

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J(x^{1/n});$$

čia $\mu(n)$ yra Moebijaus (Augustus Ferdinand Moebius, 1790–1868) funkcija. Dabar jau nesunku gauti lygybę

$$\pi(x) = \sum_{n} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{Li}(x^{1/n}) + \sum_{n} \sum_{\rho} \mathrm{Li}(x^{\rho/n}) + \text{mažesni nariai.}$$

Šis trumpas Rymano memuaras buvo tik didelio darbo santrauka. Ne visi jo teiginiai buvo įrodyti. Paminėsime neįrodytuosius.

1. Skaičius funkcijos $\zeta(s)$ šaknų, esančių tiesėje $\mathrm{Re}s = \frac{1}{2}$, yra asimptotiškai lygus (4) reiškiniui. Šis teiginys iki šiol nėra įrodytas.

2. Reiškinyje

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{s} \sum_{p} \ln\left(1 - \frac{s}{p}\right) \right\} x^s ds$$

galima integruoti panariui. Šį teiginį įrodė H. Mangoldtas 1895 m.

3. Ar teisinga formulė

$$\zeta(s) = \frac{ae^{bs}}{(s-1)\Gamma(\frac{s}{2}+1)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho} \ ?$$

Ją 1893 m. įrodė Ž. Adamaras (Jacques Hadamard, 1865–1963).

4. Funkcijos $\zeta(s)$ nulių skaičius stačiakampyje $0 \le \mathrm{Re}s \le 1, |\mathrm{Im}s| \le T$ yra lygus

$$\frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T).$$

Įrodė H. Mangoldtas 1905 m.

5. Ar teisinga pirminių skaičių teorema

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \ ?$$

Įrodė nepriklausomai vienas nuo kito 1896 m. prancūzas Ž. Adamaras ir belgas Š. Valė Pusenas (Charles Jean de La Vallée Poussin, 1866–1962). Įrodymas pagrįstas dzeta funkcijos savybe, kad $\zeta(1+it) \neq 0$ visiems realiesiems t. O elementariniais metodais tą teoremą pavyko įrodyti tik 1948 m. A. Selbergui ir P. Erdiošui (Pál Erdös).

6. Visos menamosios $\zeta(s)$ šaknys yra tiesėje $\mathrm{Re}s = \frac{1}{2}$. Tai — garsioji Rymano hipotezė, kuri, nepaisant daugybės matematikų didžiulių pastangų, iki šiol nėra įrodyta. Jai tikrinti iš pradžių buvo skaičiuojama įprastiniais metodais, o vėliau pasitelktos elektroninės skaičiavimo mašinos. 1983 m. buvo žinoma (J. van de Lune ir H. J. J. te Riele), jog

menamų šaknų su ordinatėmis $0 < t < 119\,590\,809\,282$ yra 300 000 001 ir visų jų realioji dalis yra $\frac{1}{2}$. Manau, kad iki šiol yra gauta naujų rezultatų. Tačiau tai nėra hipotezės įrodymas, o tik daro ją patikimesnę.

Pasakojama, jog vienas iš pačių žymiausių pastarųjų laikų matematikų D. Hilbertas (David Hilbert, 1862–1943) mėgdavęs sakyti, jog po mirties patekęs į rojų jis pirmiausia paklaustų Viešpatį Dievą: „Mein Gott, wo liegen doch die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion?"

Kaip jau matėme pirminių skaičių pasiskirstymo savybės glaudžiai siejasi su Rymano dzeta funkcijos nulių pasiskirstymu. Jei būtų teisinga Rymano hipotezė, tai galėtume įrodyti, kad

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\big(\sqrt{x}\ln x\big).$$

Tačiau iki šiol žinoma tik, kad $\zeta(s) \neq 0$, kai

$$\mathrm{Re}s \geq 1 - \frac{c_2}{(\ln t)^{2/3}(\ln\ln t)^{3/5}}$$

ir $|t| \geq c_3$; čia c_2 ir c_3 — atitinkamos konstantos. Iš čia gaunama

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\Big(x \exp\Big(- c_4(\ln x)^{2/5}(\ln\ln x)^{-3/5}\Big)\Big);$$

čia c_4 — teigiama konstanta.

Nagrinėjamasis memuaras yra vienintelis B. Rymano publikuotas darbas iš skaičių teorijos. Atidi jo analizė rodo, jog B. Rymanas apie dzeta funkciją žinojo daug daugiau, negu parašė. 1932 m. K. Zygelis (Carl Ludwig Siegel) Rymano rankraščiuose aptiko dzeta funkcijos skleidinį asimptotine eilute, kurios tik porą narių (vadinamąją artutinę funkcinę lygtį) buvo radę G. Hardis ir Dž. Litlvudas 1921 m.

Rymano darbas paskatino daugelį matematikų tirti dzeta funkciją. Jo idėjos buvo labai reikšmingos ne tik skaičių teorijoje, bet ir kompleksinio kintamojo funkcijų teorijoje. Esama storų monografijų, kuriose nagrinėjama ζ teorija. Atsirado daugybė kitų panašių funkcijų, vaidinančių svarbų vaidmenį skaičių teorijoje ir, apskritai, matematikoje.