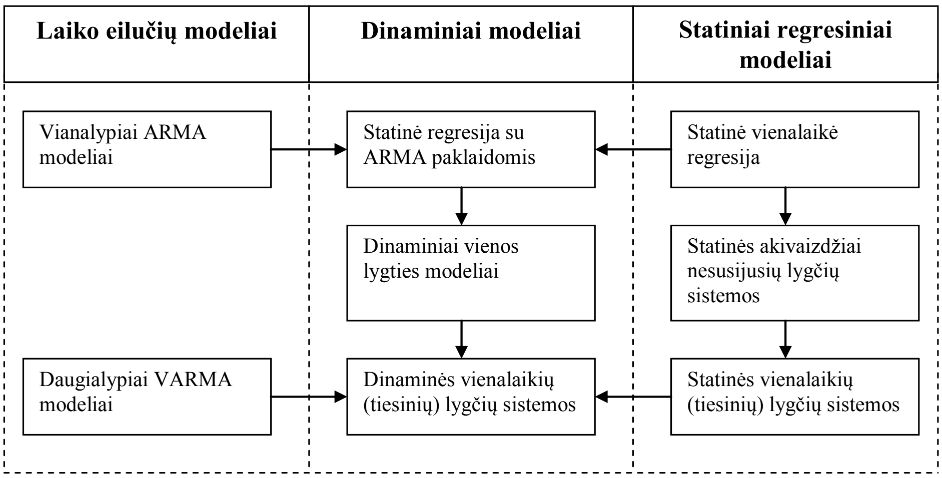
TAIKOMOSIOS EKONOMETRIJOS kurso konspektų santrumpa

Kurso apimtis ir paskirtis

Šis kursas nagrinėja laiko eilučių ekonometrikos bei dinaminių regresinių modelių pagrindus. Šiuo metu riba tarp pastarųjų apibrėžimų tampa vis mažiau aiški, kadangi nuo šeštojo XX a. dešimtmečio gerai suvokta, jog praktinis ekonometrinis modeliavimas – kitaip nei teoriniai samprotavimai – neįmanomas taikant vien statinius ryšius tarp vienalaikių kintamųjų ir pamažu, bet vis sparčiau, pradėta tarpusavyje derinti laiko eilučių modelius su statiniais regresiniais modeliais. Nepaisant tokios konvergencijos, laiko eilutėms galima priskirti tokius dinaminius vieno kintamojo ar vektorinius procesus bei modelius, kurie neturi struktūrinio ryšių tarp nagrinėjamų kintamųjų pagrindimo, t.y. ryšiai tarp kintamųjų nustatomi taikant statistinius metodus, o ne naudojant ekonomikos teoriją. Sąlyginis statinių regresinių modelių ir laiko eilučių bei modelių pozicionavimas pateiktas 1 schemoje.

*Ekonometriniai modeliai** **1 schema**



*šaltinis: A.C. Harvey (1990). ARMA ir VARMA žymėjimų paaiškinimą žr. žemiau, po 1 lentele

Kurse apibūdinami pagrindiniai pirmų dviejų blokų (laiko eilučių ir dinaminiai) tiesiniai modeliai bei nagrinėjamos procedūros, kuriomis siekiama pagal turimus kintamųjų stebėjimus parinkti adekvatų ekonominius procesus aprašantį modelį. Be to, ar nagrinėjami laiko eilučių, ar dinaminiai modeliai, kurse pateikiama medžiaga dar suskyla į keletą dalių priklausomai nuo to, ar nagrinėjami stacionarūs ar nestacionarūs procesai, bei nuo to, ar modeliuojami vienalypiai (atskiro kintamojo) ar daugialypiai (kintamųjų vektoriaus) procesai. Atitinkamas temų klasifikavimas pateiktas 1 lentelėje.

Kurso temos **1 lentelė**

Procesų/modelių tipai		Stacionarūs	Nestacionarūs
Vienalypiai	Laiko eilučių	ARMA modelis (2 tema)	Deterministinio trendo, RW ir RWD (4 tema)
Daugialypiai / vektoriniai	Laiko eilučių	VAR ir VARMA modeliai (3 tema)	Kointegruota VAR ir ECM (4 tema)
	Dinam.modeliai	SVAR (3 tema) ir vienalaikių tiesinių lygčių sistemos (5 tema)	Kointegruoti SVAR, ir SVECM bei sąlyginis SVECM (4 tema)

Lentelėje naudojami sutrumpinimai:

- ARMA (angl. Autoregressive Moving Average) – autoregresinis slenkamųjų vidurkių
- ECM (angl. Error Correction) – paklaidų korekcijos
- slenkamųjų vidurkių
- RW (angl. Random Walk) – atsitiktinio klaidžiojimo
- RWD (angl. Random Walk with Drift) – atsitiktinio klaidžiojimo su poslinkiu
- SVAR (angl. Vector Autoregression) – struktūrinė vektorinė autoregresija
- SVECM (angl. Structural Vector Error Correction) – struktūrinis vektorinis paklaidų korekcijos
- VAR (angl. Vector Autoregression) – vektorinė autoregresija
- VARMA (angl. Vector Autoregressive Moving Average) – vektorinis autoregresinis slenkamųjų vidurkių

Pirmiausiai kurse yra apibrėžiami ir nagrinėjami stacionarūs laiko eilučių modeliai, vėliau pereinama prie nestacionarių laiko eilučių analizės. Dinaminių modelių alternatyvos bei jų taikymo klausimai nagrinėjami kurso pabaigoje. Pastebėtina, jog kursas apsiriboja tik laiko srities nagrinėjimu, o apie dažnuminės srities analizės ir taikymo aspektus galima pasiskaityti D. Hamilton (1994, 6 skyriuje) arba A. C. Harvey (1988).

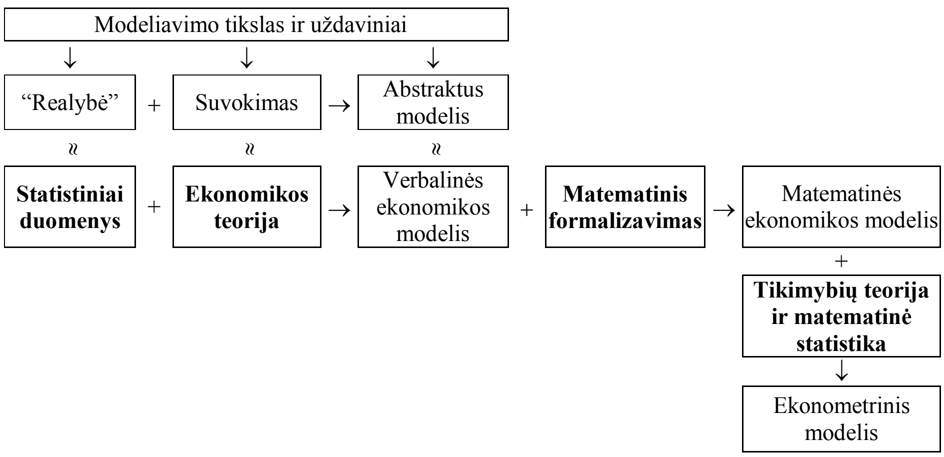
1 Pagrindinės sąvokos ir apibrėžimai

Šio skyriaus uždaviniai:
1) priminti bendrus ekonometrinio modeliavimo principus;
2) apibrėžti toliau naudojamas pagrindines sąvokas.

1.1 Bendras ekonometrinio modeliavimo apibūdinimas

Ekonometrinis modeliavimas skirtas specifikuoti ir įvertinti prognozavimui, imitaciniam modeliavimui ar hipotezių tikrinimui tinkamą kiekybinį modelį. Kaip ir kiekvienas modeliavimas, ekonometrinis modeliavimas yra susijęs su mėginimu taip aprašyti tam tikrą realybę, kad sudaromas modelis taptų valdomas, tačiau išsaugotų analizei pagrindinius modeliuojamos sistemos bruožus. Čia modelio valdomumas reiškia, jog modeliuojama sistema yra tiek supaprastinta, jog įmanoma suprasti ją atvaizduojančio modelio komponentų tarpusavio ryšius ir suprasti jo funkcionavimo principus. Pastarieji turi atkartoti pagrindinius modelio naudotojui aktualius modeliuojamos sistemos bruožus, o šiuos, savo ruožtu, apibrėžia modelio taikymo tikslai ir sprendžiami uždaviniai. Aukščiau išsakyti principai tinka bet kokiam modeliavimui, o apytikslius ryšius tarp bendro modeliavimo ir ekonometrinio modeliavimo būtų galima nusakyti tokiomis sąsajomis:

Ekonometrinis modeliavimas **2 schema**



Kaip matyti iš pateiktos schemos, ekonometrinis modeliavimas turi keletą svarbių ypatumų: 1) ekonometrinio modelio turinį ir struktūrą nusako ekonomikos teorija; 2) ekonometrinis modelis yra formalizuotas, t.y. modelio komponentų ryšiai apibrėžiami naudojant matematinius žymėjimus; 3-4) taikant tikimybių teorijos ir matematinės statistikos siūlomus metodus nežinomi parametrai įvertinami panaudojant faktinius statistinius duomenis. Pirmi du ypatumai leidžia manyti, jog ekonometriniai modeliai yra labai panašūs į matematinės ekonomikos modelius. Tačiau lyginant su matematinės ekonomikos modeliais pagrindinis ekonometrinio modelio skirtumas yra tas, kad ekonometriniame modelyje nagrinėjami ne funkciniai, o regresiniai ryšiai tarp ekonominių kintamųjų, t.y. ryšiams tarp kintamųjų apibūdinti naudojama regresijos funkcija

(1) $$f(x) = E(Y=y|X=x),$$

ir atitinkamai kintamųjų ryšį galime užrašyti kaip regresijos modelį

(2) $$y = f(x) + \varepsilon, E(\varepsilon)=0.$$

Pateiktose lygtyse Y ir X žymi atsitiktinius kintamuosius, y ir x – konkrečias jų įgyjamas reikšmes, ε - nulinės matematinės vilties paklaidą; $E(\bullet)$ yra matematinės vilties operatorius, o $f(\bullet)$ yra regresijos funkcija.

Kaip rodo (2) lygtis, ekonometriniame modelyje ryšius tarp kintamųjų galima nusakyti tik su tam tikra paklaida, t.y. jie galioja tik "vidutiniškai". Matematinėje ekonomikoje atsitiktinės paklaidos nario nėra ir ryšiai yra nusakomi taikant determinuotas funkcijas, t.y. (2) išraiškoje pateiktą ekonometrinį modelį atitinkantis matematinės ekonomikos modelis yra

(3) $$y = f(x).$$

Pavyzdžiui, matematinės ekonomikos teiginys apie Keynes'o tipo paklausos funkciją būtų toks: vartojimo išlaidas (C) ir disponuojamas pajamas (Y) sieja priklausomybė $C=\alpha+\beta Y$; o regresinis modelis būtų $C=\alpha+\beta Y+\varepsilon$, $E(\varepsilon)=0$.

Ekonometrinis požiūris yra realesnis jau vien tuo aspektu, kad visų į $f(x)$ nepakliuvusių veiksnių poveikį vertina per paklaidą - ekonomikos teorija išskiria tik pagrindinius veiksnius darydama *ceteris paribus* prielaidą, t.y. kitą poveikį tiesiog ignoruoja. Be paminėtų praleistų veiksnių regresijos liekaną taip pat formuoja duomenų matavimo klaidos, neteisingai parinkta funkcinė forma $f(x)$ ir pan. Pagaliau patys kintamieji gali būti traktuojami kaip tokie atsitiktiniai dydžiai, kurių susieti deterministine funkcija negalima, t.y. pats ryšys yra regresinis ir paklaida būtų, nepriklausomai nuo to, ar teisingai specifikuotas funkcinis ryšys, parinkti kintamieji, išmatuoti rodikliai ir t.t.

Kitas matematinės ekonomikos silpna vieta praktiko požiūriu yra ta, kad joje parametrinės funkcijos $f(x)$ parametrų reikšmės dažniausiai nėra žinomos ir, paprastai, ekonomikos teorijos požiūriu įdomios tik tiek, kiek jos leidžia spręsti apie modelių stabilumą ir pan. Tai akivaizdžiai nėra pakankama, norint modelius taikyti praktikoje – parametrų reikšmės turi būti žinomos. Matematinės statistikos ir tikimybių teorijos rezultatų panaudojimas ekonometriniame modeliavime kaip tik ir leidžia tam tikrais metodais įvertinti nežinomus ekonometrinių modelių parametrus[1] naudojant empirinius duomenis[2].

Pagrindinis makroekonominių statistinių duomenų šaltinis yra stebimos laiko eilutės. Kaip suvokti stebimus laike išdėstytus duomenis? Kokios įtakos atskirų kintamųjų bei jų tarpusavio ryšių modeliavimui ir parametrų įvertinimui turi tokie jų ypatumai kaip didelis net ir tiesinis priklausomumas (koreliuotumas) ar nestacionarumas (laiko eilutės savybės priklausymas nuo konkretaus nagrinėjamo laiko momento)? Kaip tik šie klausimai toliau ir nagrinėjami, taip pat supažindinant su kai kuriomis pagrindinėmis laiko eilučių sąvokomis.

1.2 Stochastinis procesas ir jo realizacija

Ekonometrikoje stebimi duomenys yra suvokiami kaip tam tikro atsitiktinio proceso realizacijos. Laiko eilučių ekonometrikos ypatumas tik tas, kad atsitiktinis procesas išdėstomas laike.

[1] Galiojant tam tikroms prielaidoms (pvz., klasikinės regresijos prielaidoms apie ε), įverčiai tenkina tam tikras pageidaujamas parametrų įverčių savybes (nepaslinktumą, efektyvumą, suderinamumą, asimptotinį efektyvumą bei normalumą ir pan.)

[2] Kraštinė alternatyva būtų taikyti neparametrinius metodus.

Apibrėžimas. Pagal laiko indeksą t išdėstyta atsitiktinio kintamojo X_t seka $\{X_t\}$ yra vadinama *laiko eilute*.

Bendru atveju tokia laiko eilutė gali būti begalinė, t.y. atsitiktinio kintamojo X_t seka $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}=\{\dots,X_{t-1},X_t,X_{t+1},\dots\}$ išdėstoma pagal laiko indeksą $t=-\infty,\dots,\infty$. Tačiau bet kokia baigtinė seka $\{X_t\}_{t=1}^{T}=\{X_1,\dots,X_t,\dots,X_T\}$ taip pat yra laiko eilutė.

$\{X_t\}$ žymi bendrą stochastinį procesą, kuris gali generuoti daugelį realizacijų.

Apibrėžimas. Pagal laiko indeksą t išdėstyta laiko eilutės $\{X_t\}$ generuotų stebėjimų seka $\{x_t\}$ yra vadinama laiko eilutės *realizacija*.

Atskira i-oji proceso $\{X_t\}$ realizacija žymima $\{x_t^{(i)}\}$. Atskiras i-osios realizacijos stebėjimas laiko momentu t tada būtų žymimas $x_t^{(i)}$, o paties proceso laiko momentu t žymėjimas - X_t. Realizacijų ryšį su stochastiniu procesu lengviausia suvokti pasitelkiant eksperimento analogiją. Sąlygos, nulemiančios eksperimento rezultatus, atitiktų stochastinį procesą, o konkretūs eksperimento, kurį galima kartoti daugelį kartų, rezultatai – realizacijas. Kartodami tokį eksperimentą gautume atskiras proceso realizacijas $\{x_t^{(1)}\},\{x_t^{(2)}\},\dots$. Pačių realizacijų reikšmių realizavimasis priklauso nuo stochastinio proceso $\{X_t\}$ tikimybinių charakteristikų.

Bendrai proceso $\{X_t\}$ tikimybines charakteristikas nusako jo simultaninis skirstinys. Praktiškai apibūdinti daugiamatį stochastinį procesą simultaniniu skirstiniu yra komplikuota, todėl, kalbant apie parametrinėmis tankio funkcijomis nusakomus stochastinius procesus, įprasta naudoti pirmuosius du momentus:

(4) **Matematinė viltis:** $\mu_{Xt} = E(X_t)$

(5) **Dispersija:** $\sigma_{Xt}^2 = E\{[X_t - E(X_t)]^2\}$

(6) **Autokovariacija:** $\gamma_{Xt,Xt-k}=E\{[X_t-E(X_t)][X_{t-k}-E(X_{t-k})]\},\ k\neq 0$

Jei X_t yra pasiskirstęs pagal *normalųjį skirstinį* (toks procesas vadinamas *Gauss'o procesu*), tai pirmų dviejų momentų visiškai pakanka charakterizuoti stochastinio proceso tikimybines savybes.

Tačiau praktikoje šie momentai nėra žinomi ir juos tenka vertinti pagal turimas realizacijas – stebimi ekonominiai laike išdėstyti duomenys kaip tik ir yra viena mums nežinomo proceso realizacija. Tai, kitaip nei fizikoje ar chemijoje, kur kartojant eksperimentą galima gauti daugelį realizacijų, sudaro didelį keblumą, norint iš realizacijos įvertinti stochastinio proceso charakteristikas. Pagal turimą vienintelę realizaciją, turinčią T stebimų $\{x_t\}_{t=1}^{T}=\{x_1,\dots,x_T\}$, reikia įvertinti bendro T-mataus stochastinio proceso $\{X_t\}_{t=1}^{T}=\{X_1,\dots,X_T\}$ momentus: T matematinių vilčių, T dispersijų ir $T(T-1)/2$ kovariacijų. Jei kiekvienu laiko momentu atsitiktinio kintamojo X_t stochastinės savybės skiriasi, iš viso reikėtų įvertinti $2T+T(T-1)/2$ parametrų. To padaryti turint tik T stebėjimų akivaizdžiai negalima. Todėl papildomai reikalingos tam tikros - stacionarumo bei asimptotinio nepriklausomumo - prielaidos apie laiko eilučių elgesį.

1.3 Stacionarus ir silpnai stacionarus procesas. Proceso ergodiškumas

Viena priežasčių, kodėl turime tiek daug vertintinų parametrų yra ta, jog proceso savybės (4)-(6) priklauso nuo laiko, t.y. kiekvieno stebėjimo pasiskirstymas yra nevienodas ir paties proceso stochastinės savybės kinta laike.

Apibrėžimas. Atsitiktinis procesas, kurio tikimybinės charakteristikos laike nekinta yra vadinamas *stacionariu*.

Jei nagrinėjamas tik pirmųjų momentų pastovumas laike, tada naudojama laiko eilutės *silpno stacionarumo* (dar vadinamo *kovariacijų stacionarumu*) sąvoka.

Apibrėžimas. Laiko eilutė, kurios pirmi du momentai egzistuoja ir nepriklauso nuo laiko, yra *silpnai stacionari*.

Silpno stacionarumo reikalavimai momentams yra tokie:

(7) $\forall t \quad E(X_t) = \mu_x < \infty$

(8) $\forall t \quad \sigma_{Xt}^2 = \sigma_x^2 < \infty$

(9) $\forall t \quad \gamma_{Xt,Xt-k} = \gamma_k < \infty$

Norint pabrėžti, kad *visos* stochastinio proceso tikimybinės charakteristikos nepriklauso nuo laiko naudojama *griežto stacionarumo* sąvoka.

Apibrėžimas. Laiko eilutė, kurios simultaninis skirstinys nepriklauso nuo laiko, yra *griežtai stacionari*.

Praktikoje dažniausiai naudojamas silpno stacionarumo reikalavimas, tačiau jis yra pakankamas griežtam stacionarumui, jei nagrinėjamas Gauss'o procesas.

Jei silpno stacionarumo sąlyga tenkinama, tada (4)-(6) apibrėžtos savybės nepriklauso nuo laiko ir, turint *T*-lypį stochastinį procesą, užtenka vertinti *T+1* parametrą[3]. Nepaisant stacionarumo sąlygos vertintinų parametrų skaičius vis dar viršija turimos *T* stebėjimų realizacijos apimtį, todėl to fiziškai negalima padaryti, nekalbant apie įverčių patikimumą – tam būtina sąlyga yra nedidelis vertintinų parametrų skaičius, lyginant su stebėjimų skaičiumi. Todėl be stacionarumo sąlygos papildomai reikalaujama, jog būtų tenkinama ir realizacijos stebėjimų asimptotinio nepriklausomumo sąlyga.

Apibrėžimas. Realizacijos stebėjimai yra asimptotiškai nepriklausomi, jei be galo tolstant vienam nuo kito jie tampa nepriklausomi.

Silpniausia tokio asimptotinio nepriklausomumo sąlyga, tenkinanti tiesinį nepriklausomumą, yra ergodiškumas.

Apibrėžimas. Procesas yra ergodišku, jei jis yra stacionarus ir tenkina sąlygą

(10) $$\lim_{T\to\infty}\left(T^{-1}\sum_{k=1}^{T}\operatorname{cov}(y_t, y_{t+k})\right) = 0.$$

Jei augant stebėjimų skaičiui stebėjimų nepriklausomumas pasireiškia pakankamai greitai arba turimas stebėjimų skaičius *T* yra pakankamai didelis, tada vertinti reikia mažiau nei *T+1* tiriamo proceso parametrų ir *T* stebėjimų realizacija yra pakankama. Tą dar paprasčiau suprasti nagrinėjant ne (10), o pakankamą, bet nebūtiną ergodiškumo sąlygą:

(11) $$\lim_{k\to\infty}\operatorname{cov}(y_t, y_{t+k}) = 0,$$

sakančią, jog, augant *k,* dalis *T-1* kovariacijų gali būti laikomos artimomis nuliui.

1.4 Klaidingoji regresija ir jos pasekmės

1.2 ir 1.3 skirsniuose apibūdintos sąvokos yra sietinos su atskira laiko eilute. Tačiau ekonominiuose procesuose labai dažnai mus domina ryšiai tarp skirtingų kintamųjų - kelių laiko eilučių. Klasikinėje regresinėje analizėje modelio adekvatumas dažnai vertinamas pagal determinacijos koeficientą R^2 ar jo analogus, o išvada apie kintamųjų ryšio statistinį reikšmingumą daroma naudojant *t*, *F* statistikas. Tačiau pasirodo, jog analizuojant nestacionarias laiko eilutes dažnai susiduriama su klaidinga regresija, kai standartiniais

[3] Kadangi nagrinėjami momentai nepriklauso nuo laiko, tai lieka vertinti vieną matematinę viltį, vieną dispersiją ir T-1 kovariacijų.

testais nustatomas statistiškai reikšmingas ryšys tarp visiškai nesusijusių nestacionarių kintamųjų.

Apibrėžimas. Empirinis rezultatas, kai standartinių t, F testų pagalba tarp nepriklausomų nestacionarių kintamųjų nustatomas statistiškai "reikšmingas" regresinis ryšys, vadinamas *klaidinga regresija*.

Pastebėtina, kad klaidingos regresijos išvada išlieka galioti ir asimptotiškai – net ir be galo augant stebėjimų skaičiui atrodo, kad statistinis ryšys reikšmingas.

Klaidingų regresijų pavyzdžiais gali būti tokie atvejai. Tegu dvi laiko eilutės yra modeliuojamos pagal lygtis

(12) $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim nid(0, \sigma_\varepsilon^2)$

(13) $x_t = x_{t-1} + v_t,\ v_t \sim nid(0, \sigma_v^2)$,

kur ε_t ir v_t yra tarpusavyje nepriklausomi bei normaliai ir nepriklausomai (n.i.d. – angl. *normally and independently distributed*) pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Tada Phillips(1986) parodė, jog regresijos

(14) $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + u_t$

mažiausių kvadratų metodo įverčiais paremtos statistikos t, F, R^2 neturi standartinių skirstinių ir žymiai dažniau nei leistų atitinkamas reikšmingumo lygmuo įgyja reikšmes, didesnes už atitinkamą kritinę reikšmę. Dėl to labai dažnai būtų klaidingai daroma išvada, jog y_t ir x_t yra tiesiškai priklausomi! Tam tikru indikatoriumi, jog turimas klaidingas ryšys, yra artima nuliui Durbin-Watson statistikos (DW) reikšmė.

Jei iš tų pačių normaliai ir vienodai pasiskirsčiusių bei nepriklausomų dydžių konstruotume kitas dvi laiko eilutes, kurių modeliai turėtų konstantas

(15) $y_t = c_y + y_{t-1} + \varepsilon_t$

(16) $x_t = c_x + x_{t-1} + v_t$

tai (14) lygties įvertis α_1 konverguotų pagal tikimybę į santykį c_y/c_x (Entfort, 1992; Maddala ir Kim, 1999), tačiau vėlgi tai būtų reikšmė, niekaip nesusijusi su tikrąją y_t ir x_t sąsaja, t.y. neparodanti, kad jie yra nepriklausomi!

Pirmu atveju būtų gautas atsitiktinis kintamųjų priklausomybės įvertinimas daug kartų dažniau nekorektiškai teigiant, kad reikšmingas ryšys yra; antru atveju būtų tiesiog įvertintas ryšys tarp nagrinėjamų kintamųjų trendų ir nieko daugiau. Tačiau tam tikrais atvejais tradicinės nestacionarių kintamųjų regresinės analizės procedūros gali būti neklaidingos. Taip yra tada, kai kintamieji yra kointegruoti.

1.5 Integruotumo ir kointegruotumo sampratos

Ekonomikoje dauguma procesų netenkina stacionarumo sąlygos, todėl, dėl aukščiau minėtos klaidingos regresijos galimybės, iškyla klausimas, kaip modeliuoti ryšius tarp nestacionarių laiko eilučių? Jei kintamieji nėra kointegruoti, tada reikia taikyti tam tikras transformacijas, kurios užtikrintų nagrinėjamų kintamųjų stacionarumą ir tik tada analizuoti ryšius tarp tokių transformuotų kintamųjų. Tačiau esant kointegruotiems kintamiesiems, tiesioginė jų regresija nėra klaidinga. Kad galėtume apibrėžti kointegruotumo sąvoką, pirmiausia apibrėžkime atskiro kintamojo integruotumo eilės sąvoką.

Apibrėžimas. X_t vadinamas integruotu eile d (žymima $X_t \sim I(d)$), jei jo d eilės skirtuminė transformacija yra stacionari, t.y. $\Delta^d X_t \sim I(0)$.

Čia Δ^d žymi d-eilės skirtuminę transformaciją $\Delta^d X_t = \Delta^{d-1} X_t - \Delta^{d-1} X_{t-1}$. Pavyzdžiui, kai $d=1$, $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$.

Dėmesio! Stacionarus kintamasis yra integruotas nuline eile. Tačiau nestacionarus kintamasis nebūtinai yra integruotas, t.y. į stacionarų paverčiamas skirtuminiu būdu.

Tačiau tolimesnėje kurso medžiagoje apsiribosime daugiausiai tik dėl integruotumo nestacionarių procesų analize.

Ekonominiai kintamieji dažniausiai yra integruoti pirma, rečiau antra eile[4]. Iš principo keli nestacionarūs procesai gali būti integruoti skirtingomis eilėmis, tačiau tam tikrais atvejais jie gali kointegruoti.

Apibrėžimas. Jei egzistuoja integruotų kintamųjų nenulinė tiesinė kombinacija, kuri yra integruota žemesne eile, tokie kintamieji vadinami kointegruotais.

Dažniausiai kointegruotumas galimas tarp kintamųjų, integruotų vienoda eile, o turint tik du kintamuosius, - tai yra būtina sąlyga. Pavyzdžiui, tegu turime du kintamuosius $y_t \sim I(d)$ ir $x_t \sim I(d)$, kur $d>0$ ir egzistuoja tiesinė jų kombinacija $\alpha y_t+\beta x_t \sim I(d-b)$, kur $b>0$; tada sakoma, kad kintamieji y_t ir x_t yra kointegruoti ir žymima $(y_t,x_t) \sim CI(d,b)$. Jei turime daugiau nei du kintamuosius, tada kointegruotumas tam tikrais atvejais galimas ir tarp skirtinga eile integruotų kintamųjų, bet tik tada, jei yra bent pora kintamųjų, integruotų aukščiausia eile. Pavyzdžiui, tegu turimi trys kintamieji, $y_t \sim I(2)$, $x_t \sim I(2)$ ir $z_t \sim I(1)$; tada gali būti, kad y_t ir x_t kointegruoja į $I(1)$ dydį, kurį pažymėkime $w_t=\alpha y_t+\beta x_t \sim I(1)$, o šis naujas dydis kointegruoja su z_t, t.y. $\delta w_t+\gamma z_t \sim I(0)$.

Dėmesio! Klaidingos regresijos išvengiama tik tuo atveju, jei kintamieji kointegruoti taip, kad jų tiesinė transformacija yra stacionari - integruota nuline eile!

Kadangi dauguma ekonominių kintamųjų yra integruoti pirma eile, tai, kai jie kointegruoja, klaidingos regresijos yra išvengiama.

1.6 Granger priežastingumas. Egzogeniškumo alternatyvos dinaminiuose regresiniuose modeliuose

Analizuojant kelių kintamųjų ryšius dažnai iškyla klausimas, kuris iš jų yra kurio priežastis? Šiuo metu nėra statistinių procedūrų, leidžiančių patikimai patvirtinti loginį kintamųjų priežastingumą, tačiau, kai analizuojamos laiko eilutės, Granger pasiūlė tikrinti bent jau būtiną priežastingumo sąlygą - priežastis turi būti ankstesnė nei pasekmė. Tam Granger pasiūlė vadinamąjį *Granger priežastingumą*.

Apibrėžimas. Jei kintamasis x_t yra naudingas prognozuojant kintamojo y_t ateitį, tai x_t yra vadinamas kintamojo y_t *Granger priežastimi*.

Granger priežastingumas žymimas $x_t \mapsto y_t$. Matematinė *Granger priežastingumo* formuluotė dažniausiai užrašoma pasitelkiant vidutinės kvadratinės paklaidos kriterijų (MSE – angl. *Mean Square Error*[5]):

(17) $x_t \mapsto y_t$, jei $\exists h>0 \quad MSE[\tilde{\ } \qquad \tilde{\ } \qquad \leq t)]$,

kur $\tilde{y}_{t+h}$ yra atitinkama y_{t+h} prognozė, I_t – informacijos aibė laiko momentu t, naudojama prognozuoti kintamojo y_{t+h} reikšmes laikotarpį $t+h$, o MSE($\tilde{y}_{t+h}$ |•) žymi sąlyginę vidutinę kvadratinę paklaidą, t.y. paklaidą, kuri gaunama naudojant konrečią duotą informaciją. Šis užrašas gali būti skaitomas taip: x_t yra laikomas y_t priežastimi, jei egzistuoja koks nors ateities laikotarpis h, kurį prognozė $\tilde{y}_{t+h}$ yra tikslesnė naudojant visą informaciją, nei būtų gauta, kai naudojama informacija be kintamojo x_t dabarties ir praeities reikšmių.

Dėmesio! *Granger priežastingumas* nėra loginis priežastingumas!

[4] neretai negalima atmesti hipotezės, jog kainų kintamieji yra integruoti antra eile

[5] $MSE(\tilde{\ } \qquad \tilde{\ }$

Apibrėžimas. Jei $x_t \mapsto y_t$ ir $y_t \mapsto x_t$, tai sistema, apimanti šiuos kintamuosius, vadinama *grįžtamojo ryšio sistema*.

Su priežastingumu dinaminiuose modeliuose taip pat yra susijusios kintamųjų *egzogeniškumo* sąvokos. Bendrai sistemoje egzogeniniu laikomas tas kintamasis, kurio reikšmės yra determinuojamos už sistemos ribų. Engle, Hendry ir Richard (1983) papildomai išskyrė tris egzogeniškumo formas (*silpną*, *griežtą* ir *super egzogeniškumą*), kurias parametriniuose dinaminiuose modeliuose tam tikrais atvejais galima empiriškai patikrinti.

Kad pateiktume atitinkamus egzogeniškumų apibrėžimus, pirmiausiai užrašykime dviejų, galimai vektorinių, atsitiktinių kintamųjų Y_t ir X_t simultaninės tankio funkcijos ($F_{Y,X}$) išskaidymą į sąlyginę ($F_{Y|X}$) ir marginaliąją (F_X) tankio funkcijas:

(18) $$F_{Y,X}\left(y_t, x_t \mid I_t, \theta\right) = F_{Y|X}\left(y_t \mid x_t, I_t, \theta_1\right) F_X\left(x_t \mid I_t, \theta_2\right),$$

kur $I_t=\{y_{t-1},y_{t-2},\ldots,x_{t-1},x_{t-2},\ldots\}$ yra nagrinėjamų kintamųjų istorinės informacijos aibė, θ - simultaninę tankio funkciją $F_{Y,X}$ nusakantis parametrų vektorius, θ_1 – sąlyginę tankio funkciją $F_{Y|X}$ nusakantis parametrų vektorius, θ_2 – marginaliąją tankio funkciją F_X nusakantis parametrų vektorius, o y_t, x_t – atitinkamų atsitiktinių kintamųjų reikšmės.

Apibrėžimas. Jei mus dominantys parametrai λ gali būti išreikšti tik kaip sąlyginės tankio funkcijos parametrų θ_1 funkcija, t.y. λ=g(θ_1), ir parametrų θ_2 reikšmės neriboja galimų θ_1 reikšmių, tai parametrų λ atžvilgiu kintamasis x_t yra *silpnai egzogeninis* kintamajam y_t.

Apibrėžimas. Jei kintamasis x_t yra *silpnai egzogeninis* kintamajam y_t ir y_t nėra *Granger priežastimi* kintamajam x_t, tai parametrų λ atžvilgiu kintamasis x_t yra *griežtai egzogeninis* kintamajam y_t.

Apibrėžimas. Jei kintamasis x_t yra *silpnai egzogeninis* kintamajam y_t ir pasikeitusi marginalioji tankio funkcija F_X nesąlygoja sąlyginės tankio funkcijos $F_{Y|X}$ pasikeitimo (18) lygtyje, tai parametrų λ atžvilgiu kintamasis x_t yra *super egzogeninis* kintamajam y_t.

Kam jų reikia?

Silpno egzogeniškumo – efektyviam mus dominančių parametrų λ įvertinimui pasinaudojant tik sąlyginiu modeliu.

Griežto egzogeniškumo – efektyviam y_t prognozavimui be marginaliojo modelio: jei $y_t \mapsto x_t$, tai ignoruojant marginalųjį modelį bus prarasta naudinga informacija, leidžianti patikslinti x_t prognozes, kas atitinkamai lems ir prastesnes y_t prognozes.

Super egzogeniškumo – sąlyginio modelio nejautrumui egzogeninių kintamųjų struktūriniams lūžiams ir pan. (ekonominiu požiūriu – išvengti vadinamosios *Lucas kritikos*).

Kurso skyriuje *Daugialypių stacionarių laiko eilučių modeliai* bus nagrinėjami atitinkami pavyzdžiai bei aptariamos egzogeniškumo formų patikrinimo problemos[6].

1.7 Nestacionarumas. Deterministinis ir stochastinis trendai.

Kaip 1.3 skirsnyje buvo apibrėžta, bent silpnam stacionarumui reikia, jog pirmieji du laiko eilutės momentai nepriklausytų nuo laiko. Priklausomai nuo to, kuris iš momentų nėra pastovus, laiko eilutes galėtume skirti į nestacionarias dėl matematinės vilties nestacionarumo ar, jei pastarasis nuo laiko nepriklauso, dėl dispersijos ir kovariacijų nestacionarumo.

Dauguma makroekonominių procesų netenkina jau ir pirmojo momento stacionarumo reikalavimo. Kai nestacionarumą sąlygoja matematinės vilties priklausomybė nuo laiko,

[6] Pavyzdžius, kaip suprasti pateiktus egzogeniškumo apibrėžimus konkrečių modelių atvejais, žr. Straipsnių rinkinyje Ericsson N.R. ir J.S. Irons (1994) *Testing Exogeneity*, p.7; vadovėlyje Johnston J. ir J. DiNardo (2001) *Econometric Methods*, p.253.

sakoma, kad nestacionarumą sąlygoja trendas. Tačiau modeliavimui aktualu, kokio tipo trendas sąlygoja nestacionarumą - deterministinis ar stochastinis?

Apibrėžimas. Glodi laiko funkcija yra vadinama *deterministiniu trendu*.
Apibrėžimas. Sistemingas bet neprognozuojamas kintamojo kitimas, atsirandantis dėl proceso integruotumo, vadinamas *stochastiniu trendu*.

Laiko eilutės, kurios nestacionarumą sąlygoja deterministinis trendas, stebėjimai gali būti nusakomi taip:

$x_t = f(t) + u_t,\ u_t \sim I(0),$

kur $f(t)$ yra deterministinė trendo funkcija. Matyti, kad kintamasis, gautas iš x_t atėmus trendą $f(t)$, t.y. $z_t = x_t - f(t)$, būtų stacionarus.

Apibrėžimas. *Trendo atžvilgiu stacionariu* vadinamas toks procesas, iš kurio pašalinus trendą, procesas tampa stacionariu.

Laiko eilutės, kurios nestacionarumą sąlygoja stochastinis trendas, stebėjimai gali būti nusakomi taip:

$(1-\varphi_1 L-\ldots-\varphi_p L^p)x_t = c + u_t,\ u_t \sim I(0),$

kur L yra toks vėlavimo (lago) operatorius, kad $L^p x_t = x_{t-p}$, φ ir c yra konstantos, ir egzistuoja bent viena tokia atvirkštinio charakteringojo polinomo $1-\varphi_1 z-\ldots-\varphi_p z^p=(1-\lambda_1 z_1)\ldots(1-\lambda_p z_p)=0$ šaknis z_i, kad $|z_i| = 1$.

Apibrėžimas. Procesas, kurio bent viena charakteringojo polinomo šaknis yra vienetinė, vadinamas *vienetinės šaknies procesu*.

Dėmesio! Vienetinės šaknies šaknies procesai ir yra nestacionarūs integruoti procesai, kurie stacionariais paverčiami taikant skirtumines transformacijas.
Dėmesio! Jei kintamieji yra nestacionarūs dėl deterministinio trendo, tai tiriant jų tarpusavio ryšį pakanka į regresiją įtraukti trendą ir regresija yra korektiška. Jei kintamieji yra integruoti bet nekointegruoti, tai įtraukus trendą į regresiją, pastaroji išlieka *klaidinga*.

1.8 Autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos funkcijos

Vienas pagrindinių taikomosios laiko eilučių ekonometrikos uždavinių – pagal atskirą stebimą realizaciją identifikuoti procesą, kuris generuoja stebimus duomenis. Tuo tikslu nagrinėjamos tam tikros stebimos realizacijos charakteristikos, kurios padeda atrinkti galimą procesą. Vienalypių procesų charakterizavimo-identifikavimo pagrindiniais instrumentais laiko srityje yra autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos funkcijos.

Tegu turima laiko eilutė $X_1,\ldots,X_T$. Tada tiesinis ryšys tarp kelių atsitiktinių dydžių laiko momentais t ir $t-k$ gali būti vienareikšmiškai nusakytas koreliacijos tarp X_t ir X_{t-k} matu

$corr(X_t,X_{t-k}) = \mathrm{E}\left[\left(\frac{X_t - \mathrm{E}(X_t)}{\sigma_{X_t}}\right)\left(\frac{X_{t-k} - \mathrm{E}(X_{t-k})}{\sigma_{X_{t-k}}}\right)\right]$, kuris vadinamas *koreliacijos koeficientu*.

Apibrėžimas. Koreliacijos koeficientas, kuriuo matuojama vienos laiko eilutės skirtingų stebėjimų tiesinė priklausomybė, vadinamas *autokoreliacijos koeficientu*.

Kai autokoreliacija nepriklauso nuo laiko ir akivaizdu, kokia laiko eilutė yra nagrinėjama, k-ojo vėlavimo autokoreliacijos koeficientas gali būti žymimas trumpai - $\rho(k)$.

Dėmesio! Kai procesas X_t yra stacionarus, jo dispersija nepriklauso nuo laiko, t.y. $\sigma_{Xt}^2 = \sigma_{Xt-k}^2 = \gamma_0$, ir atitinkamai

(19) $$corr(X_t,X_{t-k}) = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}.$$

Apibrėžimas. Funkcija, parodanti nagrinėjamų stochastinio proceso atsitiktinių dydžių X_t ir X_{t-k} autokoreliacijos koeficiento priklausomybę nuo vėlavimo k, vadinama *autokoreliacijos funkcija*.

Jei nagrinėjamieji laiko eilutės atsitiktiniai dydžiai nutolę laike daugiau nei per vieną stebėjimą, t.y. $|k|>1$, tai papildomai galima išskirti dar bent vieną jų ryšio atvejį – *dalinę autokoreliaciją*, $corr(X_t^*, X_{t-k})$, kur $X_t^* = \begin{cases} X_t, |k| \leq 1 \\ X_t - E(X_t \mid X_{t-1}, ..., X_{t-(k-1)}), |k| > 1 \end{cases}$, o $E(X_t|\bullet)$ žymi sąlyginę matematinę viltį.

Apibrėžimas. Koreliacijos koeficientas, kuriuo matuojama vienos laiko eilutės skirtingų stebėjimų tiesinė priklausomybė eliminavus tarpinių narių poveikį, vadinamas *daliniu autokoreliacijos koeficientu*.

Apibrėžimas. Funkcija, parodanti stochastinio proceso dalinės autokoreliacijos koeficiento priklausomybę nuo vėlavimo k tarp nagrinėjamų atsitiktinių dydžių X_t ir X_{t-k}, vadinama *dalinės autokoreliacijos funkcija*.

Dėmesio! Autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos koeficientų reikšmės, kai $k=0$, t.y. tiriant to paties stebėjimo koreliaciją su juo pačiu, yra lygios vienetui. Tuo atveju, kai $|k|=1$, tarpinių narių tarp tiriamų stebėjimų nėra, todėl autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos koeficientų reikšmės yra vienodos!

Procesams identifikuoti dažnai naudojamos grafinės autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos funkcijų išraiškos - autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos grafikai. Kai kalbama apie abu kartu, dažnai naudojamas trumpas pavadinimas – *(auto)korelogramos*.

2 Vieno kintamojo stacionarių laiko eilučių tiesiniai modeliai

Šio skyriaus uždaviniai:
1) susipažinti su pagrindiniais vienalypių stacionarių laiko eilučių tiesiniais procesais (jų modeliais);
2) nusakyti šiems procesams būdingas autokorelogramas;
3) išsiaiškinti Box-Jenkins procedūrą – praktinę modelio sudarymo schemą.

2.1 Vienalypių laiko eilučių ryšiai su vektoriniais ekonominiais modeliais

Struktūrinio modeliavimo šalininkai, kurdami modelius, griežtai remiasi ekonomikos teorijos teiginiais ir taiko struktūrinius modelius, kuriuose vienalaikiai ryšiai tarp kintamųjų yra būtini, nes nusako rinkų pusiausvyros sąlygas ir pan.

Apibrėžimas. Modelis, kuris atvaizduoja pirminius ekonomikos teorijos nusakomus ryšius tarp kintamųjų, vadinamas *struktūriniu modeliu*.

Tačiau laiko eilučių ekonometristai pastebi, kad ekonomikos teorijoje daugelis teiginių prieštarauja, teorijos yra grubios ir negriežtos. Todėl jie pabrėžia, kad gali būti geriau naudoti jau redukuotus ryšius tarp kintamųjų, kurie gali atitikti daugelį struktūrinių modelių ir atitinkamai yra suderinami su daugeliu teorinių požiūrių. Be to, dažnai netgi galima tikėtis, kad, norint korektiškai prognozuoti kokio nors atskiro kintamojo kitimą, gali visiškai užtekti nagrinėti tik jo paties dinamiką.

Pavyzdžiui, tegu trimis lygtimis apibrėžiamas paprastas uždaros ekonomikos struktūrinis modelis

(20) $C_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t,$

(21) $I_t = \beta(Y_{t-1}-Y_{t-2}) + \eta_t,$

(22) $Y_t = C_t + I_t,$

nusakantis uždaros ekonomikos vartojimo (C) ir investicijų (I) elgesį bei prekių ir paslaugų rinkos pusiausvyrą (Y – bendrojo vidaus produkto (BVP) apimtis), kur α ir β yra teigiami parametrai, o ε_t ir η_t yra vienodai ir nepriklausomai pasiskirsčiusios nekoreliuotos paklaidos. Įsistačius į (22) pusiausvyros sąlygos lygtį ilgalaikės Keynes'o paklausos (20)-ą ir investicijų "akseleratoriaus" (21)-ą lygtis, būtų gautas paprastas bendrojo vidaus produkto laiko eilutės modelis

(23) $Y_t = (\alpha+\beta)Y_{t-1} - \beta Y_{t-2} + v_t,\ v_t = \varepsilon_t + \eta_t.$

Tarkime išnagrinėjus duomenis pasirodo, kad (23) lygtis korektiškai aprašo duomenis. Tada, jei mus domina tik BVP prognozė, remiantis vien (23) lygtimi galima sėkmingai prognozuoti BVP reikšmes. Lyginant su (20)-(22) sistema (23) lygtis turėtų tą privalumą, kad reikėtų mažiau informacijos (nereikėtų duomenų apie rodiklius C ir I) ir, svarbiausia, (23) yra suderinamas su daugeliu teorinių-struktūrinių modelių, iš kurių (20)-(22) sistema yra tik vienas galimų variantų! Todėl, jei duomenys suderinami su (23) lygties modeliu, jis bus adekvatus, jei struktūrinis (20)-(22) lygtimis nusakomas modelis yra korektiškas, bet gali būti korektiškas net ir tada, kai toks struktūrinis modelis negalioja, o teisingas yra visiškai kitas, - tačiau toks, kuris taip pat redukuojasi į (23) lygties tipo pavidalą (su dviem vėluojančiais nariais), pavyzdžiui:

(24) $C_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t,$

(25) $I_t = \beta(C_t-C_{t-1}) + \eta_t,$

(26) $Y_t = C_t + I_t,$

kuri Y_t atžvilgiu redukuojasi į

(27) $Y_t = \alpha(1+\beta)Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2} + u_t,\ u_t = \varepsilon_t + \eta_t + \beta(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}).$

Matyti, jog (27) lygtis, bent jau modeline dalimi, nuo (23) būtų neatskiriama, t.y. modelyje yra du Y_t vėlavimai ir koeficientų ženklai tokie patys.

Visa tai rodo, jog atskirų kintamųjų modeliavimas, vien stengiantis identifikuoti grynai statistinį duomenis generuojantį procesą ir nesigilinant į ekonominę reiškinių prigimtį, taip pat gali būti naudingas ir, kai tikslas yra prognozuoti, o ne atlikti imitacinį vienų kintamųjų pokyčio įtakos kitiems vertinimą, gali turėti tam tikrų pranašumų prieš daugelio kintamųjų sąryšiais besiremiantį struktūrinį modeliavimą.

Toliau kurse nagrinėjami tokie pagrindiniai tiesiniai vienalypių laiko eilučių modeliai:

AR(p) – p eilės autoregresinis procesas (*auto-regression*)

MA(q) – q eilės slenkamojo vidurkio procesas (*moving average*)

ARMA(p,q) – mišrusis p eilės autoregresinis ir q eilės slenkamųjų vidurkių procesas (*autoregressive moving average*)

ARMA$_s$(p,q)(P,Q) - mišrusis s periodiškumo sezoninis autoregresinis slenkamųjų vidurkių procesas, kurio nesezoninės dalies ARMA eilės yra p ir q, sezoninės autoregresinės dalies eilė yra P, o sezoninės slenkamojo vidurkio eilė yra Q.

ARMAX(p,q) – ARMA procesas su papildomais aiškinančiaisiais kintamaisiais.

ARIMA(p,d,q) – nestacionaraus proceso $X_t \sim I(d)$ stacionarios skirtuminės transformacijos $\Delta^d X_t \sim I(0)$ ARMA procesas.

2.2 Baltasis triukšmas. Wold'o išdėstymas.

Visų laiko eilučių modelių pagrindas yra vadinamasis *baltojo triukšmo* procesas. Iš fizikos kilęs pavadinimas pabrėžia tokio proceso nenuspėjamumą – "triukšmas".

Apibrėžimas. Nulinės matematinės vilties nekoreliuotas ir homoskedastiškas procesas yra vadinamas (*silpnu*) *baltuoju triukšmu*.

Jei ε_t yra baltasis triukšmas (žymima $\varepsilon_t \sim WN$, nuo angl. *White Noise*, ar, naudojant lietuviškuosius trumpinimus, $\varepsilon_t \sim b.t.$), jis tenkina savybes:

Matematinė viltis: $\mu_\varepsilon = E(\varepsilon_t) = 0$

Dispersija: $\gamma_0 = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$

Kovariacijos: $\gamma_k = 0$.

Dėmesio! Akivaizdu, jog *baltasis triukšmas* yra stacionarus procesas.

Apibrėžimas. Nulinės matematinės vilties nepriklausomas ir homoskedastiškas procesas yra vadinamas *griežtu baltuoju triukšmu*.

Žymima $\varepsilon_t \sim SWN$ (nuo angl. *Strict White Noise)* ar $\varepsilon_t \sim g.b.t.$ *(*liet. trumpinimas*)*. Kadangi koreliuotumas parodo tiesinę priklausomybę, tai akivaizdu, jog *gieštas baltasis triukšmas* tenkina ir *baltojo triukšmo* savybes, bet ne atvirkščiai. Tačiau, jei $\varepsilon_t \sim WN$ ir dar yra *Gauss'o procesas*, t.y. pasiskirstęs pagal *normalųjį skirstinį*, tai toks procesas kartu tenkina ir *griežtojo baltojo triukšmo* savybes.

Kadangi *baltasis triukšmas* yra tiesiškai neprognozuojamas, tai jį galima suprasti kaip stacionaraus proceso X_t liekaną, kuri lieka eliminavus jo tiesinę prognozę, gautą pasinaudojant visa X_t praeities informacija, t.y.

(28) $\varepsilon_t = X_t - E(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots)$.

Pats būdamas bent tiesiškai neprognozuojamas *baltasis triukšmas* sudaro pagrindą konstruoti visus stacionarius procesus, kurių reikšmės jau yra tiesiškai priklausomos ir todėl gali būti prognozuojamos. Stacionarių procesų sąsajos su *baltuoju triukšmu* pagrindas yra vadinamasis *Wold išdėstymas*.

Teiginys (*Wold išdėstymas*). Bet koks nulinės matematinės vilties silpnai stacionarus procesas X_t gali būti išreikštas kaip tiesinis begalinis baltojo triukšmo ε_t filtras:

(29) $X_t - \mu = \Sigma_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}, \psi_0 = 1$ ir $\Sigma_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$,

kur μ yra deterministinė modelio dalis, o ψ_i yra tam tikri parametrai.

Pavyzdžiui, kai $\psi_i = \begin{cases} -\theta, i = 1 \\ 0, i > 1 \end{cases}$, iš karto gaunamas pirmos eilės *slenkamųjų vidurkių procesas*:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}.$$

Kai $\psi_i = \varphi^i$, pasinaudojant tuo, kad $X_{t-1} - \mu = \varepsilon_{t-1} + \varphi\varepsilon_{t-2} + \varphi^2\varepsilon_{t-3} + ...$, iš

(30) $X_t - \mu = \varepsilon_t + \varphi\varepsilon_{t-1} + \varphi^2\varepsilon_{t-2} + ... = \varepsilon_t + \varphi(\varepsilon_{t-1} + \varphi\varepsilon_{t-2} + ...) = \varphi(X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$

nesunkiai gaunamas standartinis pirmos eilės *autoregresinio proceso* užrašymas:

(31) $X_t = c + \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t, c = \mu(1-\varphi)$.

Dėmesio! Visi toliau nagrinėjami procesai yra atskiri *Wold'o išdėstymo* atvejai.

Toliau nagrinėjant pagrindinius tiesinius laiko eilučių procesus svarbu išmokti ir suprasti tris dalykus:

a) proceso apibrėžimą – **koks yra proceso modelis?**
b) proceso stacionarumo sąlygas – **kada toks procesas yra stacionarus?**
c) kokios korelogramos (autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos grafikai) būdingos procesui – **kaip identifikuoti procesą?**

Akcentuojant šiuos tris aspektus toliau ir nagrinėjami pagrindiniai tiesiniai vienalypių laiko eilučių procesai. Papildomai, norint pagrįsti c) dalį, nustatomos ir procesų pirmųjų momentų (matematinės vilties, dispersijos ir kovariacijų) išraiškos.

2.3 Autoregresinis procesas ir jo savybės

2.3.1 Pirmos eilės autoregresinis procesas

Apibrėžimas. Procesas X_t, tenkinantis išraišką

(32) $X_t = c + \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$,

vadinamas *pirmos eilės autoregresiniu procesu* ir žymimas AR(1). Čia $c, \varphi, \sigma_\varepsilon^2$ yra pastovūs parametrai.

Dėmesio! Pirmos eilės autoregresinis procesas yra stacionarus, jei $|\varphi| < 1$.

Kaip rodo (19)-a išraiška, norint nustatyti AR(1) proceso korelogramų pavidalą, reikia žinoti kovariacijų (dalinių kovariacijų) bei dispersijos išraiškas, o šioms nustatyti, paprastai dar reikia ir proceso matematinės vilties. Todėl toliau, ieškant koreliacijos ir dalinės autokoreliacijos funkcijų, naudojamasi šiais rezultatais:

Teiginys. Stacionaraus AR(1) momentai:

(33) $\mu_x = \dfrac{c}{1-\varphi}$

(34) $\gamma_0 = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}$

(35) $\gamma_k = \varphi\gamma_{k-1} = \varphi^k \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}$

Dėmesio! Stacionaraus AR(1) proceso $X_t = c+\varphi X_{t-1}+\varepsilon_t$ autokovariacijos kinta pagal analogišką deterministinę, t.y. pirmos eilės, schemą: $\gamma_k = \varphi\gamma_{k-1}$.

Įrodymas.
Tegu turimas stacionarus AR(1) procesas (32), tada jo nesąlyginiai centriniai momentai:

(Matematinė viltis) imant (32) lygties nesąlyginę matematinę viltį gaunama
$\mu_X=E(X_t)=c+\varphi E(X_{t-1})$ ir
$\mu_X=c/(1-\varphi)$,
kur pasinaudota: a) c ir φ yra pastovūs parametrai; b) stacionaraus proceso matematinė viltis nepriklauso nuo laiko, t.y. $E(X_t)=E(X_{t-1})=\mu_X$; c) baltojo triukšmo matematinė viltis lygi nuliui, t.y. $E(\varepsilon_t)=0$.

(Dispersija) iš matematinės vilties išraiškos (33) išreikštą c įsistatant į proceso lygtį (32) ir, sutraukus panašius narius, gaunama
$X_t-\mu_X = \varphi(X_{t-1}-\mu_X) + \varepsilon_t$.
Keliant gautos lyties abi puses kvadratu ir imant atitinkamo rezultato matematinę viltį gaunama
$\gamma_0=E(X_t-\mu_X)^2 = E\,[\varphi^2(X_{t-1}-\mu_X)^2 + 2\varphi(X_{t-1}-\mu_X)\varepsilon_t + \varepsilon_t^2]$,
$\gamma_0=\varphi^2\gamma_0+\sigma_\varepsilon^2$ ir
$\gamma_0=\sigma_\varepsilon^2/(1-\varphi^2)$
kur pasinaudota: a) φ pastovumu; b) stacionaraus proceso dispersija nepriklauso nuo laiko, t.y. $E[(X_t-\mu_X)^2]= E[(X_{t-1}-\mu_X)^2]=\gamma_0$; c) $E(\varepsilon_t^2)=\sigma_\varepsilon^2$; d)$E[(X_{t-1}-\mu_X)\varepsilon_t]=0$.
Paskutinis teiginys, t.y. d), grindžiamas tuo, jog baltojo triukšmo nenulinės kovariacijos yra lygios nuliui, o rekursyviai įsistatant proceso išraišką vietoje X_{t-1} į $E[(X_{t-1}-\mu_X)\varepsilon_t]$ gaunama: $E[(X_{t-1}-\mu_X)\varepsilon_t]= E\{[\varphi(X_{t-2}-\mu_X)+\varepsilon_{t-1}]\varepsilon_t\}=\ldots=E[(\varepsilon_{t-1}+\varphi\varepsilon_{t-2}+\varphi^2\varepsilon_{t-3}+\ldots)\varepsilon_t]=0$.

(Kovariacijos) iš matematinės vilties išraiškos (33) išreikštą c įsistatant į proceso lygtį (32) ir, sutraukus panašius narius, gautą išraišką dauginant iš $(X_{t-k}-\mu_X)$ bei imant šios sandaugos matematinę viltį gaunama
$\gamma_k=E[(X_t-\mu_X)(X_{t-k}-\mu_X)] = \varphi\, E[(X_{t-1}-\mu_X)(X_{t-k}-\mu_X)] + E\,[(X_{t-k}-\mu_X)\varepsilon_t]$ ir
$\gamma_k=\varphi\gamma_{k-1}=\varphi^k\sigma_\varepsilon^2/(1-\varphi^2)$
kur pasinaudota: a) $\gamma_{k-1}=E[(X_{t-1}-\mu_X)(X_{t-k}-\mu_X)]$; b) $\forall k>0\ E[(X_{t-k}-\mu_X)\varepsilon_t]=0$, pastarąjį rezultatą pagrindžiat taip pat kaip ir ieškant AR(1) proceso dispersijos; c) $\varphi\gamma_{k-1}=\varphi^2\gamma_{k-2}=\varphi^k\gamma_0$ ir $\gamma_0=\sigma_\varepsilon^2/(1-\varphi^2)$.

Remiantis šiais rezultatais ir (19)-u sąryšiu toliau gaunamos autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos išraiškos.

Teiginys. Stacionaraus AR(1) proceso autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos koeficientai:

(36) $\rho_k = \varphi^k$;

(37) $\rho_k^* = \begin{cases} \varphi, k=1 \\ 0, k>1 \end{cases}$.

Įrodymas.
Tegu turimas stacionarus AR(1) procesas (32), tada jo autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos koeficientai:

(Autokoreliacijos koeficientai) pasinaudojant (19) sąryšiu ($\rho_k=\gamma_k/\gamma_0$), dalinant (35) lygybę $\gamma_k=\varphi\gamma_{k-1}$ iš γ_0 gaunama
$\rho_k=\varphi\rho_{k-1}$ ir
$\rho_k=\varphi^k\rho_0=\varphi^k$
kur remiamasi: a) $\varphi\rho_{k-1}=\varphi^2\rho_{k-2}=\varphi^k\rho_0$; b) $\rho_0=1$.

(Dalinės autokoreliacijos koeficientai) pagal *dalinės autokoreliacijos* apibrėžimą, $\rho_k^*=corr(X_t^*, X_{t-k})$, *žr. 1.8 skirsnį.* AR(1) proceso $X_t=c+\varphi X_{t-1}+\varepsilon_t$ atveju:

$X_t^*=X_t$, kai $k=0,1$ ir

$X_t^*=X_t - E(X_t|X_{t-1},\ldots, X_{t-k+1})=X_t - c-\varphi X_{t-1}=\varepsilon_t$, kai $k>1$.

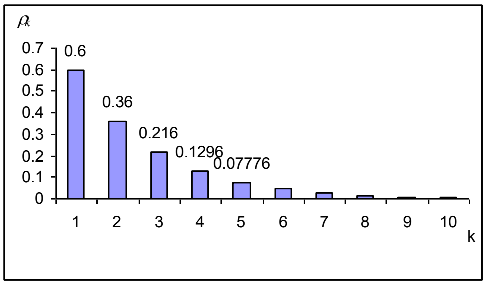
Tada $corr(X_t^*, X_{t-k})=\begin{cases} Corr(X_t, X_t)=1, k=0 \\ Corr(X_t, X_{t-1})=\varphi, k=1 \\ Corr(\varepsilon_t, X_{t-k})=0, k\geq 2 \end{cases}$,

kur pasinaudota jau anksčiau pagrįstu rezultatu, jog $\forall k>0\ E[(X_{t-k}-\mu_X)\varepsilon_t]=0$.

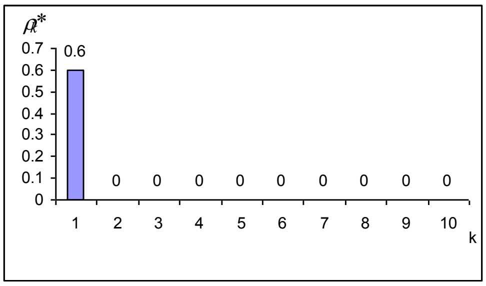
Dėmesio! AR(1) procesas identifikuojamas pagal tai, kad jo dalinė autokoreliacija tik pirmą vėlavimą nelygi nuliui, o autokoreliacijos funkcija gesta eksponentiškai. Jei $\varphi>0$, tai autokoreliacija ženklo nekeičia; kai $\varphi<0$, autokoreliacija gesta kaitaliodama ženklus.

AR(1) proceso autokoreliacijos funkciją (ACF) ir dalinės autokoreliacijos funkciją (PACF), kai $\varphi>0$, atitinka šios korelogramos

1 grafikas AR(1) proceso ACF ($\varphi=0.6$)



2 grafikas AR(1) proceso PACF ($\varphi=0.6$)



Užduotis. Patikrinkite, ar pateiktos korelogramos atitinka AR(1) procesą, kai $\varphi=0.6$?

2.3.2 *p*-os eilės autoregresinis procesas

Apibrėžimas. Procesas X_t, tenkinantis išraišką

(38) $X_t=c + \varphi_1X_{t-1} + \ldots + \varphi_pX_{t-p} + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2)$,

vadinamas *p*-os eilės autoregresiniu procesu ir žymimas AR(p). Čia $c,\varphi_1,\ldots,\varphi_p,\sigma_\varepsilon^2$ yra pastovūs parametrai.

Dėmesio! *p*-os eilės autoregresinis procesas yra stacionarus, jei atvirkštinio charakteringojo polinomo $(1-\varphi_1z - \ldots - \varphi_pz^p)=0$ šaknų z_i, $i=1,\ldots,p$ moduliai $|z_i|>1$.

Teiginys. Stacionaraus AR(p) momentai:

(39) $\mu_X = \dfrac{c}{1-\varphi_1-\ldots-\varphi_p}$

(40) $\gamma_0 = \varphi_1\gamma_1+\ldots+\varphi_p\gamma_p + \sigma_\varepsilon^2$

(41) $\gamma_k = \varphi_1\gamma_{k-1}+\ldots+\varphi_p\gamma_{k-p},\ k\neq 0$

Dėmesio! Stacionaraus AR(p) proceso $X_t = c+\varphi_1X_{t-1}+\ldots+\varphi_pX_{t-p}+\varepsilon_t$ autokovariacijos kinta pagal analogišką deterministinę, t.y. *p*-os eilės, schemą: $\gamma_k= \varphi_1\gamma_{k-1}+\ldots+\varphi_p\gamma_{k-p}$.

Įrodymas.

Analogiškas AR(1) atvejui, todėl paliekamas savarankiškam darbui.

Remiantis šiais rezultatais ir (19)-u sąryšiu toliau gaunamos autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos išraiškos.

Teiginys. Stacionaraus AR(p) proceso autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos koeficientai:

(42) $\rho_k = \varphi_1\rho_{k-1}+\ldots+\varphi_p\rho_{k-p}$;

(43) $\rho_k^* = \begin{cases} \neq 0, k \leq p \\ 0, k > p \end{cases}$.

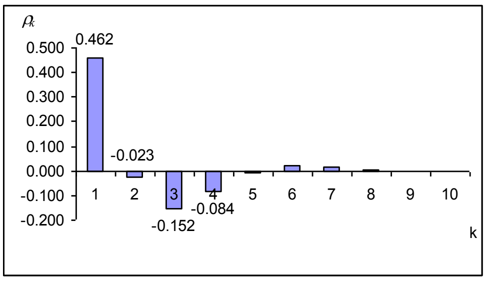
Įrodymas.

Analogiškas AR(1) atvejui, todėl paliekamas savarankiškam darbui.

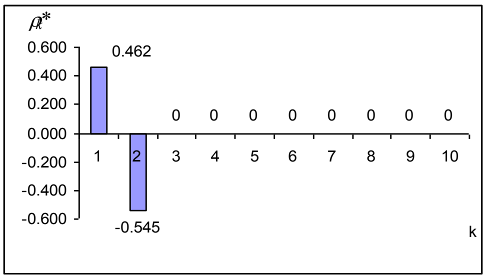
Dėmesio! AR(p) procesas identifikuojamas pagal tai, kad jo dalinė autokoreliacija p vėlavimų nelygi nuliui, o autokoreliacijos funkcija greitai gesta - yra eksponentiškai mažėjančių p funkcijų suma (tą galite parodyti naudodami toliau aptariamas *Yule-Walker lygtis*).

AR(2) proceso autokoreliacijos funkciją (ACF) ir dalinės autokoreliacijos funkciją (PACF), kai φ_1=0.6, φ_2=-0.3 ir σ_ε^2=1 atitinka šios korelogramos:

3 grafikas AR(2) proceso ACF



4 grafikas AR(2) proceso PACF



Užduotis. Pasinaudodami toliau apibūdinamomis Yule-Walker lygtimis patikrinkite, ar pateiktos korelogramos atitinka AR(2) procesą, kurio parametrai φ_1=0.6 ir φ_2=-0.3? Ar toks AR(2) procesas stacionarus? Ar ρ_2^* teisingas ir kokia jo išraiška?

Apibrėžimas. Lygčių sistema, užrašyta naudojant koreliacijos koeficientų sąryšio lygtis (42), kai $k=1,2,\ldots$, yra vadinama *Yule-Walker lygčių sistema*.

Dėmesio! *Yule-Walker lygčių sistema* leidžia surasti nežinomus koreliacijos koeficientus, kai žinomi AR(p) proceso parametrai ir atvirkščiai – apskaičiuoti parametrus, kai žinomos koreliacijos koeficientų reikšmės.

Pavyzdys. Tegu turimas AR(2) procesas $X_t = -0.6X_{t-1} + 0.3X_{t-2} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2)$. Kadangi tai stacionarus procesas (patikrinkite!), jo autokoreliacijos nusakomos bendru sąryšiu $\rho_k = -0.6\rho_{k-1}+0.3\rho_{k-2}$, iš kurio gaunama

$\rho_1 = -0.6\rho_0 + 0.3\rho_{-1} \Rightarrow \rho_1 = -0.6/(1-0.3)$, kadangi $\rho_1=\rho_{-1}$ ir $\rho_0=1$.

$\rho_2 = -0.6\rho_{k-1} + 0.3\rho_0 \Rightarrow \rho_2 = -0.6^2/(1-0.3) + 0.3$

ir t.t.

2.4 Slenkamųjų vidurkių procesas ir jo savybės

2.4.1 Pirmos eilės slenkamųjų vidurkių procesas

Apibrėžimas. Procesas X_t, tenkinantis išraišką

(44) $X_t = c + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1},\ \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2)$,

vadinamas *pirmos eilės slenkamųjų vidurkių procesu* ir žymimas MA(1). Čia $c, \theta, \sigma_\varepsilon^2$ yra pastovūs parametrai.

Dėmesio! Baigtinės eilės slenkamųjų vidurkių procesas visada yra stacionarus.

Kaip rodo (19)-a išraiška, norint nustatyti MA(1) proceso korelogramų pavidalą, reikia žinoti kovariacijų (dalinių kovariacijų) bei dispersijos išraiškas, o šioms nustatyti, dar reikia ir proceso matematinės vilties. Todėl toliau, ieškant koreliacijos ir dalinės autokoreliacijos funkcijų, naudojamasi šiais rezultatais:

Teiginys. Stacionaraus MA(1) momentai:

(45) $\mu_x = c$

(46) $\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2\left(1+\theta^2\right)$

(47) $\gamma_k = \begin{cases} -\theta\sigma_\varepsilon^2, & k=1 \\ 0, & k>1 \end{cases}$.

Įrodymas.

Tegu turimas MA(1) procesas (44), tada jo nesąlyginiai centriniai momentai:

(Matematinė viltis) imant (44) lygties nesąlyginę matematinę viltį gaunama

$E(X_t) \equiv \mu_X = c$,

kadangi $E(\varepsilon_t)=E(\varepsilon_{t-1})=0$.

(Dispersija) kadangi pagal (45) $E(X_t)=c$, tai nesąlyginė X_t dispersija

$Var(X_t)=E[X_t-c]^2=E(\varepsilon_t-\theta\varepsilon_{t-1})^2=E(\varepsilon_t^2-2\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}+\theta^2\varepsilon_{t-1}^2)=\sigma_\varepsilon^2(1+\theta^2)$,

kur pasinaudota: a) (44) lytimi apibrėžiamu sąryšiu $X_t-c=\varepsilon_t-\theta\varepsilon_{t-1}$; b) *baltojo triukšmo* proceso ε_t nekoreliuotumu, t.y. $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})=0$.

(Kovariacijos) pasinaudojant proceso stacionarumu, (45) lygybe ir (44) lygties nusakomu sąryšiu $X_t-c=\varepsilon_t-\theta\varepsilon_{t-1}$, kovariacija tarp X_t ir X_{t-k} $cov(X_t,X_{t-k})=E\{[X_t-E(X_t)][X_{t-k}-E(X_{t-k})]\}$ supaprastėja į

$cov(X_t,X_{t-k})=E\,[(\varepsilon_t-\theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k}-\theta\varepsilon_{t-k-1})] = E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k} - \theta\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k} - \theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1} + \theta^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1}) = \begin{cases} -\theta\sigma_\varepsilon^2, & k=1 \\ 0, & k>1 \end{cases}$,

kadangi baltojo triukšmo ε_t kovariacijos $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-j})=0\ \forall j\neq 0$.

Remiantis šiais rezultatais ir (19)-u sąryšiu toliau gaunamos autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos išraiškos.

Teiginys. MA(1) proceso autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos koeficientai:

(48) $\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta}{\left(1+\theta^2\right)}, & k=1 \\ 0, & k>1 \end{cases}$;

(49) $\rho_k^* = \dfrac{-\theta^k}{1+\theta^2}, k \geq 1$.

Įrodymas.

Tegu turimas MA(1) procesas (44), tada:

(Autokoreliacijos koeficientai) įsistačius γ_k bei γ_0 išraiškas (47) ir (46) į autokoreliaciją nusakantį (19) sąryšį ($\rho_k=\gamma_k/\gamma_0$) iš karto gaunamas (48) pateiktas rezultatas.

(Dalinės autokoreliacijos koeficientai) norint surasti dalinės autokoreliacijos koeficientus tikslinga MA(1) lygtį (44) išreikšti ε_t atžvilgiu, tada rekursiškai išreiškiant ε_{t-i} gaunama

$$\varepsilon_t = X_t - c + \theta\varepsilon_{t-1} = X_t - c + \theta(X_{t-1}-c) + \theta^2\varepsilon_{t-2} = X_t - c + \theta(X_{t-1}-c) + \theta^2(X_{t-2}-c) + \ldots,$$

kurią išsprendus X_t atžvilgiu turima

$$X_t = c + \varepsilon_t - \theta(X_{t-1}-c) - \theta^2(X_{t-2}-c) - \ldots .$$

Tada, pagal *dalinės autokoreliacijos* apibrėžimą, $\rho_k^* = corr(X_t^*, X_{t-k})$, *žr. 1.8* skirsnį, MA(1) proceso $X_t = c + \varepsilon_t - \theta(X_{t-1}- c) - \theta^2(X_{t-2}- c) - \ldots$ atveju:

$X_t^* = X_t$, kai $k=0,1$ ir

$X_t^* = X_t - E(X_t|X_{t-1}) = X_t - c + \theta(X_{t-1}- c) = \varepsilon_t - \theta^2(X_{t-2}- c) - \theta^3(X_{t-3}- c) - \ldots = \varepsilon_t - \theta^2(\varepsilon_{t-2}-\theta\varepsilon_{t-3}) - \theta^3(\varepsilon_{t-3}-\theta\varepsilon_{t-4}) - \ldots$, kai $k=2$

$X_t^* = X_t - E(X_t|X_{t-1}, X_{t-2}) = X_t - c(1-\theta-\theta^2-\ldots) + \theta(X_{t-1}- c) + \theta^2(X_{t-2}- c) = \varepsilon_t - \theta^3(X_{t-3}- c) - \ldots = \varepsilon_t - \theta^3(\varepsilon_{t-3}-\theta\varepsilon_{t-4}) - \ldots$, kai $k=3$

ir t.t.

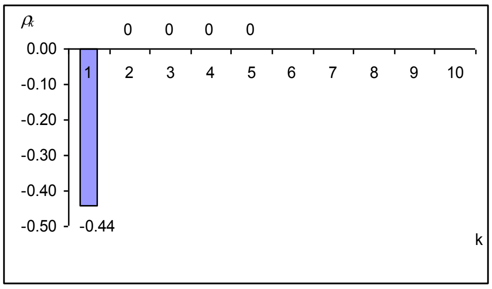
Atitinkamai $corr(X_t^*, X_{t-k}) = \begin{cases} Corr(X_t, X_t) = 1, k = 0 \\ Corr(X_t, X_{t-k}) = \dfrac{-\theta^k}{1+\theta^2}, k \geq 1 \end{cases}$

gaunamas pasinaudojant: a) $X_{t-k} - c = \varepsilon_{t-k} - \theta\varepsilon_{t-k-1}$ ir b) baltojo triukšmo ε_t savybėmis $E(\varepsilon_t^2)=\sigma_\varepsilon^2$ ir $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-j})=0$ $\forall j\neq 0$.

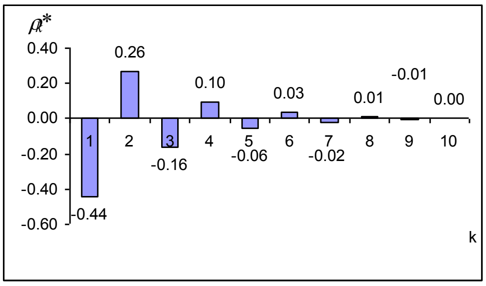
Dėmesio! MA(1) procesas identifikuojamas pagal tai, kad jo autokoreliacija tik pirmą vėlavimą nelygi nuliui, o dalinės autokoreliacijos funkcija gesta eksponentiškai. Jei $\theta<0$, tai dalinė autokoreliacija ženklo nekeičia; kai $\theta>0$, - dalinė autokoreliacija gesta kaitaliodama ženklus.

MA(1) proceso autokoreliacijos funkciją (ACF) ir dalinės autokoreliacijos funkciją (PACF), kai $\theta>0$, atitinka šios korelogramos

5 grafikas MA(1) proceso ACF ($\theta=0.6$)



6 grafikas MA(1) proceso PACF ($\theta=0.6$)



Užduotis. Patikrinkite, ar pateiktos korelogramos atitinka MA(1) procesą, kai $\theta=0.6$?

2.4.2 *q*-os eilės slenkamųjų vidurkių procesas

Apibrėžimas. Procesas X_t, tenkinantis išraišką

(50) $X_t = c + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q\varepsilon_{t-q}, \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2)$,

vadinamas *q-os eilės slenkamųjų vidurkių procesu* ir žymimas MA(q). Čia $c, \theta_1, \ldots, \theta_q, \sigma_\varepsilon^2$ yra pastovūs parametrai.

Dėmesio! Kaip ir bet koks kitas baigtinės eilės slenkamųjų vidurkių procesas, jis yra stacionarus.

Teiginys. MA(q) momentai:

(51) $\mu_x = \mathrm{c}$

(52) $\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2\left(1+\theta_1^2+\ldots+\theta_q^2\right)$

(53) $$\gamma_k = \begin{cases} \left(-\theta_k+\theta_{k+1}\theta_1+\ldots+\theta_q\theta_{q-k}\right)\sigma_\varepsilon^2, & k \le q \\ 0, & k > q \end{cases}.$$

Įrodymas.
Analogiškas MA(1) atvejui, todėl paliekamas savarankiškam darbui.

Remiantis šiais rezultatais ir (19)-u sąryšiu gaunamos autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos išraiškos.

Teiginys. MA(q) proceso autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos koeficientai:

(54) $$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_k+\theta_{k+1}\theta_1+\ldots+\theta_q\theta_{q-k}}{1+\theta_1^2+\ldots+\theta_q^2}, & k \le q \\ 0, & k > q \end{cases};$$

(55) ρ_k^* - eksponentiškai mažėjančių procesų suma.

Įrodymas.
(54) - analogiškas MA(1) atvejui, todėl paliekamas savarankiškam darbui. Bendra (55) išraiška gana komplikuota, todėl pakanka pasinagrinėti MA(2) atvejį keliems vėlavimams, pvz., $k=2$ ir $k=3$.

Galima MA(q) proceso dalinės autokoreliacijos proceso išraiškos nustatymo idėja gali būti tokia. Pirmiausiai MA(q) procese keičiami $\varepsilon_{t-j}, j=1,\ldots,k-1$ (bet ne $j \geq k$!) rekursiškai pagal atitinkamą išraišką $\varepsilon_{t-j} = X_t - c + \theta_1\varepsilon_{t-j-1} + \theta_2\varepsilon_{t-j-2} + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-j-q}$. Tada skaičiuojant $X_t^* = X_t - E(X_t \mid X_{t-1}, \ldots, X_{t-(k-1)})$, X_t^* išreiškiamas tik per baltojo triukšmo narius, kadangi pirmame žingsnyje įvesti nariai $X_{t-1}, \ldots, X_{t-(k-1)}$ susiprastina. Toliau belieka apskaičiuoti konkrečias dalinės autokovariacijos $cov(X_t^*, X_{t-k})$ bei atitinkamas dalinės autokoreliacijos išraiškas pasinaudojant baltojo triukšmo nekoreliuotumo savybe.

Dėmesio! MA(q) procesas identifikuojamas pagal tai, kad jo autokoreliacija k≤q vėlavimą nelygi nuliui, o dalinės autokoreliacijos funkcija greitai (kaip eksponentiškai mažėjančių procesų suma) artėja link nulio.

2.5 Autoregresinis slenkamųjų vidurkių procesas ir jo savybės

Aukščiau apibrėžti autoregresinis bei slenkamųjų vidurkių procesai gali būti apjungti į vieną, gaunant vadinamąjį *autoregresinį slenkamųjų vidurkių procesą* (ARMA).

2.5.1 ARMA(1,1) procesas

Apibrėžimas. Procesas X_t, tenkinantis išraišką

(56) $X_t = c + \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1},\ \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2),$

vadinamas *pirmos eilės autoregresiniu ir slenkamųjų vidurkių procesu* bei žymimas ARMA(1,1). Čia $c, \varphi, \theta, \sigma_\varepsilon^2$ yra pastovūs parametrai.

Dėmesio! ARMA(1,1) yra stacionarus, jei $|\varphi|<1$.

2.5.2 ARMA(p,q) procesas

Apibrėžimas. Procesas X_t, tenkinantis išraišką

(57) $\Phi(L)X_t = c + \Theta(L)\varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2),$

kur $\Phi(L)=1-\varphi_1 L-\ldots-\varphi_p L^p,$

$\Theta(L)=1-\theta_1 L-\ldots-\theta_q L^q$

vadinamas *p,q-eilių autoregresiniu ir slenkamųjų vidurkių procesu* bei žymimas ARMA(p,q). Čia $c, \varphi_1, \ldots, \varphi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q, \sigma_\varepsilon^2$ yra pastovūs parametrai.

Dėmesio! ARMA(p,q) yra stacionarus, kai atvirkštinio charakteringojo polinomo $(1-\varphi_1 z - \ldots - \varphi_p z^p)=0$ šaknų z_i, $i=1,\ldots,p$ moduliai $|z_i|>1$.

2.6 Kiti ARMA išplėtimai

2.6.1 Sezoninis $ARMA_S$ procesas

Daugeliui procesų, kurių stebėjimai yra didesnio dažnumo nei metiniai, gali būti būtingas sezoniškumas. Į ARMA modelius sezoniškumą įprasta įkomponuoti multiplikatyviu požiūriu, t.y. kaip pagrindinės (nesezoninės) ir sezoninės proceso dalių sandaugą.

Apibrėžimas. S periodiškumo procesas X_t, tenkinantis išraišką

(58) $(1-\varphi_1 L-\ldots-\varphi_p L^p)(1-\Phi_1 L^S-\ldots-\Phi_P L^{PS})(X_t-\mu_x)=(1-\theta_1 L-\ldots-\theta_q L^q)(1-\Theta_1 L^S-\ldots-\Theta_Q L^{QS})\varepsilon_t,\quad \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2),$

vadinamas *p,q-eilių autoregresiniu ir slenkamųjų vidurkių procesu su P,Q sezoninėmis eilėmis*. Toks procesas žymimas $ARMA_S$(p,q)(P,Q). Čia $\mu_x, \varphi_1, \ldots, \varphi_p, \Phi_1, \ldots, \Phi_P, \theta_1, \ldots, \theta_q, \Theta_1, \ldots, \Theta_Q, \sigma_\varepsilon^2$ yra pastovūs parametrai.

Dėmesio! $ARMA_S$(p,q)(P,Q) yra stacionarus, jei atvirkštinių charakteringųjų polinomų $(1-\varphi_1 z-\ldots-\varphi_p z^p)=0$ ir $(1-\Phi_1 Z-\ldots-\Phi_P Z^P)=0$ šaknų z_i, $i=1,\ldots,p$ ir Z_j, $j=1,\ldots,P$ moduliai $|z_i|>1$ ir $|Z_j|>1$. Jei $|z_i|>1$, o $\exists j$ tokia, kad $|Z_j|=1$, tai procesas vadinamas *sezoniškai nestacionariu* (dar kitaip - *integruoto sezoniškumo procesu*).

2.6.2 ARMAX procesas

Ekonomikoje dažnai norima panaudoti ne tik konkretaus kintamojo istoriją, bet ir papildomus kitus veiksnius. Jei pastarieji yra stacionarūs, jie tiesiogiai gali būti įtraukti į ARMA išraišką, priešingu atveju, pirmiausiai papildomus aiškinančiuosius veiksnius reikėtų stacionarizuoti.

Apibrėžimas. Procesas Y_t, tenkinantis išraišką

(59) $\Phi(L)Y_t = c + \Theta(L)\varepsilon_t + \beta' X_t,\ \ \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2),$

kur $\Phi(L)=1-\varphi_1L-\ldots-\varphi_pL^p,$

$\Theta(L)=1-\theta_1L-\ldots-\theta_qL^q,$

$X_t \sim I(0)$ – stacionarus (gali būti vektorinis) vienalaikių papildomų aiškinančiųjų kintamųjų procesas,

vadinamas *p,q-eilių autoregresiniu ir slenkamųjų vidurkių procesu su aiškinančiaisiais kintamaisiais* bei žymimas ARMAX(p,q). Čia $c, \varphi_1, \ldots, \varphi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q, \sigma_\varepsilon^2$ ir vektorių β' sudarantys parametrai yra pastovūs.

Dėmesio! Kai $X_t \sim I(0)$, ARMAX(p,q) stacionarus, jei atvirkštinio charakteringojo polinomo $(1 - \varphi_1 z - \ldots - \varphi_p z^p)=0$ šaknų z_i, $i=1,\ldots,p$ moduliai $|z_i|>1$.

2.6.3 ARIMA procesas

Bendru atveju nagrinėjamas procesas X_t gali būti nestacionariu. Ar šiuo atveju ARMA modeliai gali būti naudingi? Taip, - skirtuminiu būdu pirmiausiai nestacionarus *d* eile integruotas X_t, t.y. $X_t \sim I(d)$, transformuotinas į atitinkamą stacionarų kintamąjį $\Delta^d X_t$, o šį jau galima aprašyti ARMA modeliu.

Apibrėžimas. Procesas X_t, tenkinantis išraišką

(60) $\Phi(L)(1-L)^d X_t = c + \Theta(L)\varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2),$

kur $\Phi(L)=1-\varphi_1L-\ldots-\varphi_pL^p,$

$\Theta(L)=1-\theta_1L-\ldots-\theta_qL^q,$

vadinamas *p,q-eilių autoregresiniu ir slenkamųjų vidurkių procesu integruotu d eile* bei žymimas ARIMA(p,d,q). Čia $c, \varphi_1, \ldots, \varphi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q, \sigma_\varepsilon^2$ parametrai yra pastovūs.

Savarankiškam darbui paliekamas paprasto ARIMA modelio išplėtimas į sezoninį.

2.7 ARIMA proceso lygties interpretacija ir procesų savybių susisteminimas

Derinant tarpusavyje apibrėžtus procesų tipus būtų galima gauti įvairias ARIMA atmainas. Bene bendriausias tokiu būdu gautas procesas yra ARIMAX_S(p,q)(P,Q). Jo užrašymas bei atitinkami paaiškinimai pateikti žemiau.

$$\underbrace{(1-\phi_1L-\ldots-\phi_pL^p)}_{\text{Nesezoninė AR(p) dalis}}\underbrace{(1-\Phi_1L^S-\ldots-\Phi_PL^{SP})}_{\text{Sezoninė AR(P) dalis}}\underbrace{(1-L)^d}_{\text{Nesezoninis d kartų skirtuminis transformavimas}}\underbrace{(1-L^S)^D}_{\text{Sezoninis D kartų skirtuminis transformavimas}}(X_t-\mu)=\underbrace{(1-\theta_1L-\ldots-\theta_qL^q)}_{\text{Nesezoninė MA(q) dalis}}\underbrace{(1-\Theta_1L^S-\ldots-\Theta_QL^{SQ})}_{\text{Sezoninė MA(Q) dalis}}\varepsilon_t+\underbrace{\beta' Z_t}_{\text{Papildomi aiškinantieji kintamieji}}$$

Kadangi įvairiems ARIMA procesams būdingos skirtingos autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos funkcijos, tai leidžia empirines korelogramas naudoti atpažįstant procesus. 2 lentelėje susisteminamas pagrindinių aukščiau apibūdintų procesų korelogramų elgesys.

ARMA procesų ACF ir PACF elgesys **2 lentelė**

Procesas	ACF	PACF
AR(1)	Eksponentiškai mažėja; $\rho_k>0$, kai $\phi>0$, ρ_k keičia ženklus, kai $\phi<0$.	Kai $k>1$, $\rho^*_k=0$. Kai $k=1$, $\rho^*_k>0$, jei $\phi>0$, ρ^*_k neigiamas, jei $\phi<0$.
AR(p)	Eksponentiškai ar silpstančia sinusoide mažėja; konkreti forma priklauso nuo $\phi_1,\ldots,\phi_p$ ženklų.	Po p lagų lygi nuliui; nenulinių $\rho^*_1,\ldots,\rho^*_p$ pavidalas priklauso nuo $\phi_1,\ldots,\phi_p$ ženklų.
MA(1)	Po 1 lago lygi nuliui; $\rho_k>0$, kai $\theta<0$, ρ_k neigiamas, kai $\theta>0$.	Eksponentiškai mažėja; $\rho_k<0$, kai $\theta>0$, ρ_k keičia ženklus, kai $\theta>0$.
MA(q)	Po p lagų lygi nuliui; nenulinių $\rho^*_1,\ldots,\rho^*_q$ pavidalas priklauso nuo $\theta_1,\ldots,\theta_p$ ženklų.	Eksponentiškai ar silpstančia sinusoide mažėja
ARMA(p,q)	Kai $k>q$, ARMA(p,q) ACF lemiama tik AR(p) dalies; kai $k\leq q$ – visas ARMA(p,q) procesas.	Kai $k>p$, ARMA(p,q) PACF lemiama tik MA(q) dalies kai $k\leq p$ – visas ARMA(p,q) procesas.
AR_S(p) MA_S(q) $ARMA_S$(q)	Analogiškai kaip atitinkamiems AR, MA ir ARMA, tik ACF nenulinė yra tik $is, i=1,2,\ldots$ vėlavimams, kur s yra sezono periodiškumas; pvz., ketvirtinio periodiškumo atvejų, $s=4$.	Analogiškai kaip atitinkamiems AR, MA ir ARMA, tik PACF nenulinė yra tik $is, i=1,2,\ldots$ vėlavimams, kur s yra sezono periodiškumas; pvz., ketvirtinio periodiškumo atvejų, $s=4$.
I(1)	Analogiškai kaip atitinkamiems AR, MA ir ARMA, tik ACF nenulinė yra tik $is, i=1,2,\ldots$ vėlavimams, kur s yra sezono periodiškumas; pvz., ketvirtinio periodiškumo atvejų, $s=4$.	$\rho^*_1=1$, $\rho^*_k=0$, k>1.

2.8 Box-Jenkins modeliavimo procedūra

Aukščiau apibūdintas autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos elgesys yra būdingas procesams. Tačiau praktikoje turimos tik tam tikros procesų realizacijos (duomenys), kurių pagrindu stengiamasi nustatyti, koks procesas generavo duomenis? Box-Jenkins modeliavimo procedūra pateikia sisteminga požiūrį, kaip identifikuoti galimą duomenis generuojantį procesą - parinkti stebimiems duomenims adekvatų modelį.

Box-Jenkins procedūros etapai:

1. Stacionarumo užtikrinimas (integruotumo eilės d identifikavimas)
2. ARMA(p,q) identifikavimas
3. Parametrų įvertinimas.
4. Modelio adekvatumo tikrinimas.
5. Modelio panaudojimas

Atkreiptinas dėmesys į tai, kad iki šiol 2 skyriuje visur buvo nagrinėjami teoriniai procesų dydžiai X_t. Nuo šiol laikysime, kad dirbama su duomenimis x_t, $t=1,\ldots,T$, t.y. tam tikra proceso realizacija.

2.8.1 Stacionarumo užtikrinimas

Pirmas žingsnis formuojant ARIMA modelį yra identifikuoti nagrinėjamojo kintamojo x_t integruotumo eilę d modelyje ARIMA(•,d,•). Vėlesniuose skyriuose bus nagrinėjami specialūs tam skirti testai, tačiau neretai galima pasinaudoti tokiomis orientacinėmis taisyklėmis:

a) nenuline eile integruoto kintamojo, t.y. $x_t\sim I(d)$, $d>0$, autokoreliacija labai lėtai artėja prie nulio – lėtai "gesta";

b) jei $x_t \sim I(d)$, tai, dažniausiai, x_t kintamojo $d+k$ eilės skirtuminės transformacijos dispersija ($Var(\Delta^{d+k}x_t)$) yra mažiausia, kai $k=0$ - vadinamasis minimalios dispersijos testas.

Kai integruotumo eilė d yra nustatyta, toliau jau dirbama su kintamojo x_t d eilės skirtumine transformacija $\Delta^d x_t$.

2.8.2 ARMA identifikavimas

Norint identifikuoti proceso ARIMA(p,•,q) eiles p ir q, naudojamos pagal $\Delta^d x_t$ įvertintos autokoreliacijos ir dalinės autokoreliacijos funkcijos. Toliau pateikiamų išraiškų paprastumo dėlei pažymėjus $z_t=\Delta^d x_t$, autokoreliacijos ρ_k ir dalinės autokoreliacijos ρ^*_k įverčiai r_k ir r^*_k yra gaunami tokiu būdu:

(61) $$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{T}(z_t-\bar{z})(z_{t-k}-\bar{z})}{\sum_{t=1}^{T}(z_t-\bar{z})^2}, \quad kur\ \bar{z} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t \ ,$$

(62) $$r^*_k = \hat{\beta}_k, \text{ kur}$$

$\hat{\beta}_k$ yra k-asis (paskutinysis) regresijos $z_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 z_{t-1} + \ldots + \hat{\beta}_k z_{t-k} + \hat{v}_t$ koeficientas.

Įverčiai yra atsitiktiniai dydžiai, todėl apie jų artumą nuliui galima spręsti tik tikimybiškai (su tam tikra klaidos tikimybe). Šiuo tikslu yra tikrinamos nulinė ir alternatyvi hipotezės

(63) $$\begin{aligned} H_o &: r_k = 0 \\ H_1 &: r_k \neq 0 \end{aligned}$$

ir

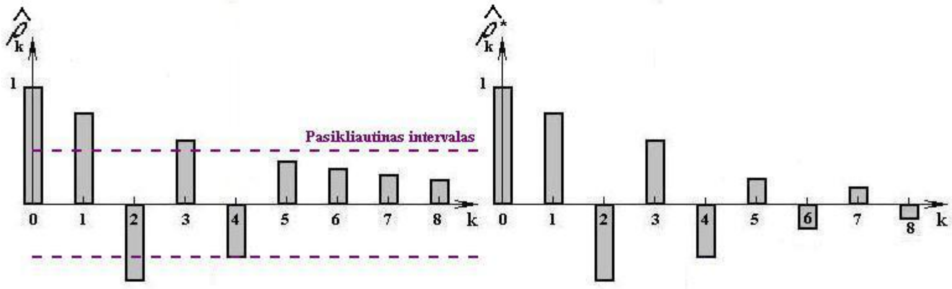
(64) $$\begin{aligned} H_o &: r^*_k = 0 \\ H_1 &: r^*_k \neq 0 \end{aligned},$$

atitinkamai hipotezei apie k-ojo vėlavimo autokoreliacijos koeficiento lygybę nuliui ir k-ojo vėlavimo dalinės autokoreliacijos koeficiento lygybę nuliui.

Esant teisingoms atitinkamoms nulinėms hipotezėms $\sqrt{T}r_k \overset{a}{\sim} N(0,1)$ ir $\sqrt{T}r^*_k \overset{a}{\sim} N(0,1)$, kur $\overset{a}{\sim}$ reiškia pasiskirstęs asimptotiškai (teoriškai - stebėjimams be galo augant, praktiškai - didelėse imtyse). Todėl, jei $|r_k|>2T^{1/2}$, $|r^*_k|>2T^{1/2}$, darytina išvada, kad 0.05 reikšmingumo lygmenyje[7] atitinkama H_0 atmestina ir atitinkamas koreliacijos koeficientas statistiškai reikšmingai skiriasi nuo nulio. Grafinis tokių hipotezių tikrinimas atliekamas tikrinant, ar (dalinės) koreliacijos koeficiento įverčiai neužeina už pasikliautino intervalo ribų (žr. 7 grafiką). Jei užeina – tai H_o atmetama, ir laikoma, kad (dalinė) autokoreliacija yra reikšminga; jei koeficientas patenka tarp pasikliovimo intervalų - H_0 atmestina ir laikoma, kad atitinkamas koeficientas nereikšmingai skiriasi nuo nulio.

[7] *Normaliojo standartinio skirstinio* kritinė reikšmė 2 šiuo atveju naudojama vietoje 1.96 norint atsižvelgti į asimptotinį statistikos pasiskirstymo pobūdį

7 grafikas Empirinės korelogramos ir $r_k = 0$ pasikliovimo intervalai



Pateiktame autokoreliacijos grafike reikšmingai nuo nulio skiriasi koeficientai r_1, r_2, r_3, o hipotezė apie kitų dalinės autokoreliacijos koeficientų lygybę nuliui negali būti atmesta.
Aptartos (63) ir (64) hipotezės praktikoje dažniausiai tikrinamos vėlavimams $k=1,2,\ldots, T^{1/2}$.

Dėmesio! Pasirinkdami potencialų modelį pagal korelogramas atkreipkite dėmesį ne tik į tai, kiek yra reikšmingai nuo nulio besiskiriančių koreliacijos koeficientų, bet ir jų kitimo tipą ("gesimo" pavidalą).
Dėmesio! Kadangi dirbama su realizacijomis, parinkinėdami potencialius modelius neapsiribokite kuriuo vienu, o susidarykite "modelių krepšelį".

2.8.3 Parametrų įvertinimas

Kai turimas AR procesas, paprasto mažiausių kvadratų metodo (MKM, angl. OLS – *ordinary least squares*) įverčiai yra paslinkti ($E[\hat{\varphi}_i] \neq \varphi_i$ - baigtinių imčių savybė), tačiau suderinti ($\lim_{T\to\infty} P\{|\hat{\varphi}_i - \varphi_i| < \xi\} = 1$ - asimptotinė savybė), todėl MKM yra plačiai naudojamas autoregresiniams procesams įvertinti.

Kai turimas MA ar ARMA procesas, MKM tikslo funkcija yra netiesinė ir įverčių rasti paprastu MKM negalime. Čia tenka naudoti netiesinius parametrų įvertinimo metodus apie kuriuos daug sužinosite kurse *Ekonometrinė analizė*.

2.8.4 Modelio adekvatumo tikrinimas

Turint įvertintą potencialų modelį reikia patikrinti jo adekvatumą, t.y. ar prielaidos apie modelinę dalį ir liekanas yra tenkinamos? Modelinės dalies adekvatumas Box-Jenkins procedūroje tikrinamas nagrinėjant ARMA modelio koeficientų reikšmingumus.

Dėmesio! Jei modelinė dalis parinkta korektiškai, visi koeficientai turi būti statistiškai reikšmingi.

Išvengti perteklinių parametrų modelinėje dalyje padeda informacinių kriterijų, pavyzdžiui Akaike (AIC) ar Schwarz (BIC), naudojimas.

(65)
$$\boxed{AIC(p,q) = \ln \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + \frac{2}{T}(p+q)}$$

(66)
$$\boxed{BIC(p,q) = \ln \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + \frac{\ln T}{T}(p+q)}$$

Kadangi augant parametrų skaičiui modelio paklaida ($\hat{\sigma}_\varepsilon^2$) nemažėja, tai pirmoji kriterijų dalis mažės, didinant parametrų skaičių p ar/ir q. Tačiau antroji šių kriterijų dalis baudžia už papildomą modelio parametrizavimą. Tada geriausias potencialus modelis (bei parametrų skaičius) bus tie, kurių kriterijų reikšmės bus mažiausios, t.y.

(67)
$$\hat{p},\hat{q} = \arg\min_{p,q} AIC(p,q)$$
$$\hat{p},\hat{q} = \arg\min_{p,q} BIC(p,q)$$

Dėmesio! Modelio parametrizavimas remiantis AIC ir BIC nebūtinai sutampa. BIC duoda suderintus p ir q įverčius, todėl teoriniu požiūriu jis geresnis. Remiantis AIC į modelį paprastai įtraukiama bent jau ne mažiau parametrų nei siūlytų BIC.

Visuose anksčiau apibrėžtuose modeliuose liekanos turi būti *baltasis triukšmas*, priešingas rezultatas liudytų apie neteisingą modelio specifikaciją – nepakankamai išplėstą modelinę dalį. Liekanų dalies adekvatumas tikrinamas analizuojant, ar liekanos nėra autokoreliuotos. Nors tą galima atlikti kiekvienam atskiram vėlavimui k tikrinant hipotezę (63), tačiau paprasčiau yra pradėti nuo jungtinės nulinės hipotezės, jog iki tam tikro vėlavimo (pavyzdžiui, $m=T^{1/2}$) visi autokoreliacijos koeficientai yra lygūs nuliui:

(68)
$$H_o: r_1 = \cdots \quad)$$
$$H_1: \exists k \; r_k \neq 0 \quad .$$

Tokią hipotezę galima patikrinti naudojant Box-Pierce ar Ljung-Box statistikas

(69) $QBP_m = T\, \Sigma_{k=1}{}^{m} r_k^2 \overset{a}{\sim} \chi^2$ ir

(70) $Q_m = T(T+2)\, \Sigma_{k=1}{}^{m} (T-k)^{-1} r_k^2 \overset{a}{\sim} \chi^2$.

Kai QBP_m ar Q_m yra didesnės už kritinę skirstinio χ^2 reikšmę χ_α^2, tai su α reikšmingumo lygmeniu nulinė hipotezė atmestina, t.y. bent vienas iš tirtų m autokoreliacijos koeficientų yra reikšmingas ir laikytinas nelygiu nuliui. Tada konkretaus vėlavimo k identifikavimui jau reikėtų tikrinti (63) tipo hipotezes.

Dėmesio! Jei nulinės hipotezės (68) negalima atmesti, tada laikytina, kad modelio liekanų dalis yra specifikuota korektiškai. Tačiau sakyti, kad ir modelinė dalis yra specifikuota korektiškai dar negalima, - tam reikia patikrinti, ar nėra nereikšmingų parametrų, ar prielaida apie tiesinę funkcinę formą yra korektiška ir pan.

2.8.5 Prognozavimas ARMA modeliu

Pagrindinis ARMA modelių panaudojimas – gauti trumpalaikes modeliuojamo kintamojo prognozes, todėl tikslinga išsiaiškinti, kaip prognozės skaičiuojamos, bei nustatyti kai kurias jų savybes.

Tegu turimi kintamojo x stebėjimai x_t, $t=1,\ldots,T$, t.y. x_T yra paskutinis turimas stebėjimas. Kintamojo x laikotarpiu $T+h$, $h>0$ reikšmių x_{T+h} prognozė $\tilde{x}_{T+h}$ yra sąlyginė x_{T+h} matematinė viltis, remiantis turimais stebėjimai x_t, $t=1,\ldots,T$:

(71) $\tilde{x}_{T+h} = E(x_{T+h}|x_T, x_{T-1}, x_{T-2},\ldots)$.

Prognozės paklaida yra skirtumas tarp faktinės ir prognozuojamosios reikšmių.

(72) $e_{T+h} = x_{T+h} - \tilde{x}_{T+h}$.

Dėmesio! Prognozės paklaida gali susidaryti dėl kelių priežasčių:
- neteisingai parinktas modelis
- netiksliai įvertinti parametrai
- dėl nežinomų ateities paklaidų ε_{T+h} (baltojo triukšmo) reikšmių

Tolimesnėje analizėje laikoma, kad modelis yra teisingai specifikuotas ir parametrų įvertinimo paklaidos nėra, todėl paklaida atsiranda tik dėl atsitiktinės nežinomų ateities paklaidų reikšmių ε_{T+h} dalies.

Pavyzdys. Turimas VAR(2) yra

$x_t = -0.5x_{t-1} + 0.2x_{t-2} + \varepsilon_t$, $t=1,\dots,T$.

Kintamojo ateities reikšmės laikotarpiais $T+1$ ir $T+2$ yra:

$x_{T+1} = -0.5x_T + 0.2x_{T-1} + \varepsilon_{T+1}$,

$x_{T+2} = -0.5x_{T+1} + 0.2x_T + \varepsilon_{T+2} = -0.5(-0.5x_T + 0.2x_{T-1} + \varepsilon_{T+1}) + 0.2x_T + \varepsilon_{T+2} = 0.45x_T - 0.1x_{T-1} + \varepsilon_{T+2} - 0.5\varepsilon_{T+1}$

Prognozuojamos reikšmės:

$\tilde{x}_{T+1} = E(x_{T+1} | x_T, x_{T-1}) = E(-0.5x_T + 0.2x_{T-1} + \varepsilon_{T+1} | x_T, x_{T-1}) = -0.5x_T + 0.2x_{T-1}$.

$\tilde{x}_{T+2} = E(x_{T+2} | x_T, x_{T-1}) = E(0.45x_T - 0.1x_{T-1} + \varepsilon_{T+2} - 0.5\varepsilon_{T+1} | x_T, x_{T-1}) = 0.45x_T - 0.1x_{T-1}$.

Jei $x_T = 0.1$, o $x_{T-1} = 0.5$, tai $\tilde{x}_{T+1} = 0.05$ ir $\tilde{x}_{T+2} = -0.005$.

Modelio prognozės paklaidos:

$e_{T+1} = x_{T+1} - \tilde{x}_{T+1} = -0.5x_T + 0.2x_{T-1} + \varepsilon_{T+1} - (-0.5x_T + 0.2x_{T-1}) = \varepsilon_{T+1}$

$e_{T+2} = x_{T+2} - \tilde{x}_{T+2} = -0.5(x_{T+1} - \tilde{x}_{T+1}) + 0.2(x_T - x_T) + \varepsilon_{T+2} = -0.5e_{T+1} + \varepsilon_{T+2} = -0.5\varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2}$

Prognozės paklaidų dispersijos:

$\mathrm{Var}(e_{T+1}) = E(e_{T+1}^2) = \sigma_\varepsilon^2$

$\mathrm{Var}(e_{T+2}) = E(e_{T+2}^2) = E[(-0.5\varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2})^2] = E[0.25\varepsilon_{T+1}^2 + \varepsilon_{T+2}^2)] = 1.25\sigma_\varepsilon^2$

kur pasinaudota *baltojo triukšmo* ε_t savybėmis.

3 Daugialypiai stacionarių laiko eilučių tiesiniai modeliai

Šio skyriaus uždaviniai:
1) susipažinti su vektorinės autoregresijos (VAR) modeliu;
2) parodyti modelio privalumus ir trūkumus lyginant su struktūriniais modeliais;
3) detalizuoti VAR modelio sudarymo etapus;
4) supažindinti su VAR modelio taikymo galimybėmis (prognozavimui, priežastingumo analizei, imitaciniam modeliavimui, skirtingų impulsų svarbos palyginimui);

3.1 Bendri pastebėjimai apie daugialypius laiko eilučių modelius

Dažnai ekonomistus domina ne atskiro kintamojo kitimas, o kelių jų dinamika, t.y. ne tik BVP, bet ir infliacijos, nedarbo lygio, palūkanų normų ir t.t. Nors naudojant vienalypes laiko eilutes galima atskirai prognozuoti kiekvieno šių kintamųjų reikšmes (kaip matėme nagrinėdami (20)-(22) lygtimis apibrėžtą struktūrinį modelį, redukuojant jį galima gauti (23)-ia lygtimi apibrėžiamą BVP kintamojo AR(2) modelį, kurį panaudojant nesunkiai gaunami ir kitų kintamųjų vienalypiai ARMA modeliai), tačiau efektyviau yra iš karto naudoti sąryšius tarp skirtingų kintamųjų, nes sumažinamas prielaidų skaičius, o prognozuojant galima panaudoti gausesnę informaciją.

Vektorinio modelio pavyzdžiu gali būti iš (24)-(26) lygtimis apibūdinto struktūrinio modelio gaunama sistema (tam reikia panaudoti (24)-ą lygtį (25)-oje ir jas abi - (26)-oje lygtyje):

(73) $C_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t,$

(74) $I_t = \alpha\beta Y_{t-1} - \beta C_{t-1} + v_t,\ v_t = \beta\varepsilon_t + \eta_t,$

(75) $Y_t = \alpha(1+\beta) Y_{t-1} - \beta C_{t-1} + w_t,\ w_t = v_t + \varepsilon_t,$

Primintina, kad C čia žymi privataus vartojimo išlaidas, I – bendrąsias investicijas, o Y –BVP apimtis; α ir β yra teigiami parametrai, o ε_t ir η_t yra vienodai ir nepriklausomai pasiskirsčiusios nekoreliuotos paklaidos.

Pastebėtina, kad vektoriniai laiko eilučių modeliai paprastai yra redukuoti bent tiek, kad vienalaikių ryšių juose nebūtų; vienalaikiai ryšiai galimi tik struktūriniuose laiko eilučių modeliuose. Tiesinio laiko eilučių modelio – kaip redukuoto modelio – paklaidos (ε_t, v_t ir w_t (73)-(75) lygtimis apibrėžtame modelyje) yra tiesinės struktūrinio modelio paklaidų kombinacijos (ε_t ir η_t, žr. (24)-(26) lygtimis apibūdintą struktūrinį modelį).

Apibrėžimas. Jei iš redukuoto modelio paklaidų ir parametrų galima vienareikšmiškai atstatyti struktūrinio modelio paklaidas ir parametrus, tai redukuotas laiko eilučių modelis yra vadinamas *tiksliai identifikuotu*.

Bendrai modelis gali būti neidentifikuotas, tiksliai identifikuotas ar peridentifikuotas (žr., pavyzdžiui, Johnston ir DiNardo, ??? ar Judge et al., ???), tačiau laiko eilučių analizėje paprastai aktualus tik tikslus identifikuojamumas.

Identifikuojamumo savybė vektorinėms laiko eilutėms aktuali tada, jei modelį norima panaudoti reakcijos į impulsus ir šokų svarbos, formuojant priklausomų kintamųjų reikšmes, analizei. Pavyzdžiui, (73)-(75) lygtimis apibrėžtame modelyje norint sužinoti, kiek dėl vartojimo išlaidoms atėjusio šoko (ε_t), kurį, pavyzdžiui, galėtų sukelti mokesčių mažinimas, pasikeis investicijos bei BVP, reikėtų žinoti (74) ir (75) lygtyse pateiktas v_t ir w_t išraiškas. Matyti, jog investicijos dėl vartojimo išlaidas įtakojusio šoko dar tą patį laikotarpį paaugtų dydžiu $\beta\varepsilon_t$, o BVP – $(1+\beta)\varepsilon_t$. Akivaizdu, kad norint atlikti tokią analizę, reikia gebėti identifikuoti redukuotą modelį, t.y. negalima redukuoto modelio paklaidų v_t ir w_t interpretuoti kaip impulsų investicijoms ir BVP, – tai impulsų vartojimui ir investicijoms deriniai! Atkreipkite dėmesį į tai, jog tiesinė skirtingų paklaidų priklausomybė nusako, jog redukuoto modelio vienalaikės paklaidos yra koreliuotos. Jei visos vienalaikės paklaidos būtų tarpusavyje nekoreliuotos, tai reikštų, kad paklaidas tiesiogiai galima interpretuoti kaip impulsus būtent jų priklausomiems kintamiesiems. Nagrinėto redukuoto modelio atveju, jei ε_t, v_t ir w_t būtų nekoreliuotos, tai per šias paklaidas ateinantys impulsai tiesiogiai galėtų būti priskiriami atitinkamai vartojimo išlaidoms, investicijoms ir BVP (pagalvokite, kada taip galėtų (ir ar galėtų) būti?).

Komentaras [VK1]: Nagrinėto redukuoto modelio atveju, jei ε_t, v_t ir w_t būtų nekoreliuotos, tai per šias paklaidas ateinantys impulsai tiesiogiai galėtų būti priskiriami atitinkamai vartojimo išlaidoms, investicijoms ir BVP. Tačiau, kad liekanos būtų nekoreliuotos, reikėtų, kad $\beta=0$, bet tada modelis būtų
(76) $C_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t,$
(77) $I_t = v_t,\ v_t=\eta_t,$
(78) $Y_t = \alpha Y_{t-1} + w_t,\ w_t= \eta_t+\varepsilon_t,$

Prieš pereinant prie tolimesnės vektorinių laiko eilučių modelių analizės apsibrėžkime pirmiausiai žymėjimus bei bendroje daugialypių tiesinių modelių aibėje pozicionuokime vektorinės autoregresijos (VAR) modelį, kuriam skirsime daugiausiai dėmesio nagrinėdami stacionarių daugialypių laiko eilučių modelius.

3.2 Žymėjimai ir kai kurios vektorinių modelių bei modeliavimo alternatyvos

3.2.1 Žymėjimai

Kadangi nagrinėjame daugialypius procesus, tai dabar stochastinis kintamasis Y_t ar atitinkama jo realizacija y_t bei paklaida ε_t ir konstantų vektorius c bus vektoriniai ir susidės iš n narių:

$$Y_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \vdots \\ Y_{nt} \end{bmatrix},\quad y_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{bmatrix},\quad \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix},\quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Pavyzdžiui, jei nagrinėjami keturi kintamieji ($n=4$) – BVP, infliacija, nedarbo lygis ir darbo užmokestis, – tai analizuojamas stochastinis kintamasis laiko momentu t atitinkamai būtų

$$Y_t = \begin{bmatrix} BVP \\ Infliacija \\ Nedarbo\ lygis \\ Darbo\ užmokestis \end{bmatrix}_t .$$

3.2.2 Stacionarių dinaminių modelių alternatyvos

Bene bendriausias stacionarių kintamųjų dinaminis stochastinis modelis yra *dinaminis sąlyginis struktūrinis modelis*:

(76) $A_0Y_t = c + A_1Y_{t-1} + \ldots + A_pY_{t-p} + B_0X_t + B_1X_{t-1} + \ldots + B_kX_{t-k} + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim WN(0,\Sigma_\varepsilon),$

kur stacionarūs Y_t ir ε_t yra vektoriniai n dimensijos aukščiau pateiktus užrašus tenkinantys procesai; A_i, $i=1,\ldots,p,$ yra kvadratinės $n\times n$ dimensijos, B_j, $j=1,\ldots,k,$ yra $n\times s$ dimensijos matricos (čia s yra egzogeninių kintamųjų skaičius); stacionarus X_t yra iš s egzogeninių aiškinančiųjų kintamųjų sudarytas vektorius; Σ_ε yra $n\times n$ dimensijos paklaidų ε_t vienalaikių kovariacijų matrica ($\Sigma_\varepsilon = E(\varepsilon_t\varepsilon_t')$), kuri tokiame modelyje paprastai laikoma diagonalia. Šis modelis yra *struktūrinis*, kadangi aprašo vienalaikius ryšius (juos nusako matrica A_0); jis yra *sąlyginis*, kadangi dalis kintamųjų yra egzogeniniai ($\Sigma_{j=0}^{k}B_jX_{t-j}$); modelis yra *dinaminis*, kadangi įtraukti autoregresiniai endogeninių kintamųjų nariai ($\Sigma_{i=1}^{p}A_iY_{t-i}$).

Dauginant iš kairės (76) lygtį iš atvirkštinės A_0 matricos (A_0^{-1}) būtų gauta redukuota *dinaminio sąlyginio struktūrinio modelio* forma, vadinama *dinaminiu sąlyginiu modeliu*:

(77) $Y_t = c + \Sigma_{i=1}^{p} \tilde{A}_iY_{t-i} + \Sigma_{j=0}^{k}\tilde{B}_jX_{t-j} + v_t$, kur $\tilde{A}_i=A_0^{-1}A_i$, $\tilde{B}_j=A_0^{-1}B_j$, $v_t=A_0^{-1}\varepsilon_t$.

Kaip nesunku matyti, šiame modelyje liekanos bus autokoreliuotos, nebent struktūriniame modelyje, kurio liekanos yra nekoreliuotos, galioja sąlyga $I\text{-}diag(A_0)=0$, t.y. A_0 yra diagonali ir vienalaikių ryšių (76) modelyje nėra.

Jei (76) lygtyje nebūtų egzogeninių aiškinančiųjų kintamųjų X_t ($\forall j\ B_j=0$), būtų gautas *struktūrinis vektorinės autoregresijos* (SVAR) modelis:

(78) $A_0Y_t = c + \Sigma_{i=1}^{p} A_iY_{t-i} + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim WN(0,\Sigma_\varepsilon).$

Jei pastarasis modelis dar būtų iš kairės padaugintas iš atvirkštinės A_0 matricos, tai galiausiai būtų gaunamas *vektorinės autoregresijos* (VAR) modelis:

(79) $Y_t = c + \Sigma_{i=1}^{p} \tilde{A}_iY_{t-i} + v_t$, kur $\tilde{A}_i=A_0^{-1}A_i,\ v_t=A_0^{-1}\varepsilon_t$.

Šie palyginimai leidžia matyti, kad VAR modelis yra dinaminis, tačiau jisai nėra nei sąlyginis (visi VAR kintamieji yra endogeniniai) nei struktūrinis (VAR neturi vienalaikių sąryšių). Tai dvi savybės, dėl kurių C.A. Sims labai propaguoja šį modelį (žr. tolesnį skirsnį).

Pateikta modelių klasifikacija apibendrinta 3-ioje lentelėje.

Pagrindinės stacionarių dinaminių modelių alternatyvos **3 lentelė**

Modelių tipai	Sąlyginiai	Nesąlyginiai
Struktūriniai	$A_0Y_t = c + \Sigma_{i=1}^{p} A_iY_{t-i} +\Sigma_{j=0}^{k}B_jX_{t-j} + \varepsilon_t$	$A_0Y_t = c + \Sigma_{i=1}^{p} A_iY_{t-i} + \varepsilon_t,$
Redukuoti	$Y_t = c + \Sigma_{i=1}^{p} \tilde{A}_iY_{t-i} + \Sigma_{j=0}^{k}\tilde{B}_jX_{t-j} + v_t$	$Y_t = c + \Sigma_{i=1}^{p} \tilde{A}_iY_{t-i} + v_t$

3.2.3 Metodologinės ekonometrinio modeliavimo alternatyvos

Iki aštuntojo dešimtmečio buvo vieningai sutariama, jog makroekonometrinis modeliavimas turi remtis struktūrinio modelio, kurio struktūrą nusako ekonomikos teorija, formulavimu. Redukuota modelio forma buvo naudojama tik nagrinėjant struktūrinio modelio identifikavimo problemą bei kaip galima parametrų įvertinimo priemonė. Antras išskirtinis tokios tradicinės makroekonometrinio modeliavimo metodologijos bruožas yra tai, kad ekonomikos teorijos nusakoma struktūra laikoma teisinga, net jei įvertinus modelio parametrus išaiškėja, jog modelis empiriškai neadekvatus: rekomenduojama modelyje palikti statistiškai nereikšmingus veiksnius (šalinami tik tada, jei netenkinami parametrų ženklų apribojimai), o nustačius, kad tam tikros statistinės prielaidos negalioja, taikomi kiti lygčių ir jų sistemų įvertinimo metodai, kurie užtikrina tam tikras pageidaujamas baigtinės imties ar asimptotines parametrų įverčių savybes (nepaslinktumą, suderinamumą ir pan.). Ši teorinė konstrukcija taikant praktiškai beveik visad buvo keičiama. Pirmiausia, praktikoje derinamos kelios teorijos iš karto (o ne analizuojant jas po vieną išrenkama labiausiai adekvati), be to, nagrinėjamas kintamųjų sąrašas dažniausiai yra ilgesnis nei sufleruotų konkretus ekonomikos teorijos modelis. Tokia praktika stiprinama argumentu, kad dėl įvairių priežasčių gali atsirasti atotrūkis tarp ekonomikos teorijoje naudojamų rodiklių ir empiriškai stebimų kintamųjų, - tuo atveju visi turimi kintamieji yra tik apytikslės teorinių rodiklių reprezentacijos ir todėl iš anksto nebūtinai aišku, kuris iš rodiklių naudotinas empiriniame modelyje. Neretai tinkamiausias kintamasis parenkamas atsižvelgiant į statistinį reikšmingumą.

Komentaras [VK2]: niekada negalima žinoti, kuri iš konkuruojančių ekonomikos teorijų turėtų būti teisinga, o konkuruojančių teorijų ar bent hipotezių visada galima rasti

Tačiau baigiantis aštuntajam dešimtmečiui vis labiau aiškėjo pagal šiuos principus sudarytų modelių empirinio adekvatumo stoka[8]. Reaguojant į tai, o taip pat į naujų ekonometrinių metodų, skirtų integruotų laiko eilučių analizei, kristalizavimąsi, pradėtos kurti naujos makroekonometrinio modeliavimo metodologijos.

Londono ekonomikos mokykloje buvo išvystyta vadinamoji „nuo bendro – prie dalinio" (angl. *general to specific*) metodologija, dažnai dar vadinama aktyviausiai ją

[8] Nemaža dalimi tą galėjo sąlygoti ir aštuntajame dešimtmetyje labiau pasireiškę pasiūlos pusės šokai (naftos kainų šuoliai dešimtmečio viduryje bei pabaigoje), kurie dar labiau atkreipė dėmesį į racionalių lūkesčių aktualumą, ypač makroekonominėje kainodaroje.

plėtojančio Jungtinės Karalystės mokslininko D.F. Hendry vardu (toliau tekste vartojama *Hendry metodologija*), kuri akcentuoja tai, kad bet kuris stochastinis empirinis modelis yra tik duomenų realizacijos pagrindu sudarytas modelis (žr. D.F. Hendry ir J.-F. Richard, 1983). Pastarasis privalo tenkinti visas statistinio modeliavimo prielaidas, tik tada galima manyti, kad tikėtinai žinoma, koks stochastinis procesas generuoja duomenis. Vertinant struktūrinio ir redukuoto modelio formų santykio aspektu, šioje metodologijoje pirmiausiai yra surandamas adekvatus – statistines prielaidas tenkinantis - redukuotas dinaminis modelis. Pasirinkimas grindžiamas tuo, jog redukuotas modelis atitinka daugelį struktūrinių modelio pavidalų. Jei net redukuotas dinaminis modelis netenkina modeliuojant daromų statistinių prielaidų, tai joks jį atitinkantis identifikuojamas struktūrinis modelis taip pat netenkins šių prielaidų. Tik po šio pirmo svarbaus adekvataus redukuoto modelio suformavimo žingsnio, papildomai darant tam tikras identifikuojamumo prielaidas, redukuotas modelis gali būti performuluotas į atitinkamą struktūrinį modelį. Kadangi ekonominiai modeliai paprastai yra peridentifikuoti, tai jie atitinkamai apriboja redukuoto modelio pavidalą, tačiau šio apribojimo empirinį adekvatumą jau galima statistiškai patikrinti. Ekonomikos teorijos paskirtis šioje metodologinėje struktūroje yra tik nusakyti potencialius identifikavimo apribojimų rinkinius.

Komentaras [VK3]: , kurių empirinis adekvatumas būtų patikrintas statistiškai, įvertinant, ar šie teiginiai atitinka faktinius duomenis

Lyginant tradicinę Cowles komisijos metodologiją su Hendry metodologija matyti, jog antrojoje svarbiausias reikalavimas yra statistinių prielaidų ir ekonomikos teorijos pagrindu nusakomų apribojimų adekvatumas empiriniams duomenims. Jei Cowles komisijos požiūryje pirmiausia tikima ekonomikos teorijos modeliu, o tada pastarasis yra įvertinamas (kai reikia, parenkant tokį parametrų įvertinimo būdą, kuris leistų gauti pageidaujamų savybių įverčius), tai Hendry metodologijoje ekonomikos teorija yra tik galimus apribojimus nusakantis šaltinis (E.S. Janson, 2002).

Vertinant Hendry metodologijos realų taikymą galima pastebėti, kad praktikoje visada daroma prielaida, jog daugialypis stochastinis pastovių parametrų procesas generuoja nepriklausomas vienodai ir normaliai pasiskirsčiusias realizacijas. Ši prielaida yra Hendry metodologijos aksioma, nuo kurios priklauso visų tolesnių išvadų galiojimas. Tačiau bet koks ekonominei analizei aktualių rodiklių rinkinys nebūtinai turi tenkinti šią prielaidą. Kadangi ekonomikos teorijos nusakomas modelis nėra modeliavimo pagrindas Hendry metodologijoje, tai struktūrinis modelis nevaidina pagrindinio vaidmens. Vis dėlto, šioje metodologijoje išlieka požiūris, kad teorijos nusakomi apribojimai gali būti naudingi formuojant ekonomikos struktūrą atitinkantį struktūrinį modelį.

Trečioji devinto dešimtmečio pradžioje atsiradusi vadinama *Sims metodologija* apskritai neigia struktūrinių modelių naudą makroekonometrinio modeliavimo praktikai. 1980 m. JAV ekonomistas C. A. Sims akcentavo, jog ekonomikos teorijos nusakomi struktūriniai modeliai yra pernelyg paprasti ir realioms ekonomikos sistemoms visiškai neadekvatūs. Be to, realioje ekonomikoje viskas yra vienaip ar kitaip susiję, todėl kintamųjų skirstymas į egzogeninius ir endogeninius yra nepagrįstas - visi modelio kintamieji turi būti endogeniniai. Laikydamasis šių principų Sims pasiūlė ekonomiką modeliuoti taikant neapribotos vektorinės autoregresijos modelį (VAR). Šis modelis visiškai atitinka Sims metodologijos principus, kadangi visi VAR modelio kintamieji priklauso nuo savo paties ir visų kitų kintamųjų vėlavimų - jie visi yra endogeniniai; tarp kintamųjų nėra vienalaikių ryšių ir nėra taikomi jokie parametrų apribojimai - VAR yra neapribotas redukuotas dinaminis modelis.

Nors Sims metodologijoje ekonomikos teorijos svarba makroekonometrinio modelio sudarymui neigiama, tačiau išties jos išvengti nepavyksta. Pirmiausia, norint sudaryti VAR, reikia atsakyti į klausimą, kokius kintamuosius įtraukti į modelį. Akivaizdu, kad modelyje privalo būti modeliavimui aktualūs kintamieji, kuriuos nusako modeliavimo tikslas, bet šių kintamųjų dažniausiai nepakanka sudaryti empiriškai adekvatų modelį. Per didelio kintamųjų skaičiaus į VAR įtraukti taip pat nepavyksta, kadangi parametrams įvertinti būtinų stebėjimų skaičius auga ypač greitai[9]. Ekonomikos teorija tampa dar aktualesnė sprendžiant, kokia tvarka išdėstyti kintamuosius VAR modelyje[10]. Tai lemia VAR modelio reakcijos į impulsus funkcijų elgesį – modelio ekonominį elgesį. Jei kintamųjų sąrašą dar gali padėti formuoti modeliavimo tikslas, tai kintamųjų išdėstymą sąlygoja tik ekonominiai samprotavimai apie kintamųjų egzogeniškumą. Kaip pažymi A. Pagan (1994), neatrodo, jog VAR metodologija pasiūlytų ką nors naują sprendžiant empirinio modeliavimo problemas. Greičiau ji tik užmaskuoja teorinę ekonominės modelio struktūros problemą, perkeldama ją iš akivaizdžios kintamųjų egzogeniškumo problemos struktūrinėje formoje į redukuoto modelio liekanose paslėptus komplikuotus ryšius.

Nepaisant šių kritinių pastabų, VAR yra vienas plačiausiai šiuo metu praktikoje taikomų stacionarių vektorinių laiko eilučių modelių (jei ne kaip galutinis, tai bent kaip pradinis modeliavimo etapas ar kaip pagalbinis modelis). Dėl to toliau didelis dėmesys skiriamas klausimams, kaip sudaryti, įvertinti bei praktiškai panaudoti VAR modelį.

Pastebėtina, kad VAR yra tiesiog AR modelio principų taikymas kintamųjų vektoriui. Analogiškai būtų galima išplėsti ir MA bei ARMA modelius iki VMA ar VARMA modelių, tačiau dėl jų parametrų įvertinimo ir kitų keblumų (žr. Lutkepohl, 1993, p. ???) praktikoje tokie modeliai naudojami retai. Šiame kurse taip pat apsiribojama beveik vien VAR tipo modelių aptarimu.

3.3 Vektorinė autoregresija (VAR) ir jos tipai

3.3.1 Vektorinė autoregresija

Apibrėžimas. Procesas Y_t, tenkinantis išraišką

(80) $Y_t = c + \Sigma_{i=1}^{p} A_i Y_{t-i} + v_t,\ v_t \sim WN(0,\Sigma_v),\ p>0,$

vadinamas *p-eilės vektorine autoregresija* ir žymimas VAR(p). Čia Y_t, c ir v_t yra atitinkamai n dimensijos endogeninių kintamųjų, konstantų ir baltojo triukšmo paklaidų vektoriai; Σ_v ir A_i, $i=1,\dots,p$, yra kvadratinės $n\times n$ dimensijų paklaidų vienalaikių kovariacijų ir parametrų matricos; p – autoregresijos eilė.

Vektorinėje autoregresijoje visi kintamieji yra aprašomi vien tik kaip jų pačių ir kitų sistemos kintamųjų vėlavimų tiesinės regresinės funkcijos.

Dėmesio! Vektorinė autoregresija yra stacionari tada, kai determinanto lygties $|I-\Sigma_{i=1}^{p}A_i z^i|=0$ šaknys moduliu yra didesnės už vienetą, t.y. $|z_i|>1$, $i=1,\dots,p$.

Pavyzdys. Tegu stochastinį kintamąjį Y_t, kurį sudaro du nariai, t.y. $Y_t = (Y_{1t}, Y_{2t})'$, nusako tokia VAR(1)

$Y_t = c + AY_{t-1} + v_t,\ v_t \sim WN(0,\Sigma_v)$, kurią galima detalizuoti:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix} \sim \mathrm{WN}\left(\begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma \\ \sigma & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right).$$

Kad galiotų stacionarumo sąlyga reikia, jog

$$|I-A_1 z| = det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} z\right) = det\left(\begin{bmatrix} 1-a_{11}z & -a_{12}z \\ -a_{21}z & 1-a_{22}z \end{bmatrix}\right) = 1 - (a_{11}+a_{22})z + (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})z^2 = 0$$ šaknų

(atkreipkite dėmesį į tai, kad n dimensijos kintamųjų vektorius implikuoja n-ojo laipsnio polinomą su n šaknų)

[9] Turint n kintamųjų ir p vėlavimų eilės VAR(p) sistemą ir norint įvertinti atskirą jos lygtį, vien tik parametrų įvertinimui būtina turėti np+1 stebėjimą.

[10] Idealu būtų VAR sistemoje kintamuosius išdėstyti tokia tvarka, kad pirmuoju eitų nuo kitų kintamųjų nepriklausantis, antruoju – priklausantis tik nuo pirmojo ir taip toliau, t.y. modelis būtų rekursinis ir tenkintų Wold priežastingumą (žr. e.g. H. Lutkepohl, 1993, p.52).

$z_1, z_2 = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$, kur $a=-\frac{a_{11}+a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$ ir $b=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$, moduliai būtų didesni už vienetą. Tegu $a_{11}=0.7$, $a_{21}=-0.6$, $a_{12}=0.9$, $a_{22}=0.4$, tada a≈-1.34 b≈1.22 ir $z_1,z_2\approx -0.67\pm 0.88\sqrt{-1}$, o jų abiejų modulis $|z_1|=|z_2|\approx\sqrt{(-0.67)^2+(\pm 0.88)^2}\approx 1.22$, t.y. didesnis už vienetą, tad šis VAR procesas yra stacionarus.

Dėmesio! VAR visų nagrinėjamų kintamųjų reikšmės yra determinuojamos sistemoje, todėl visi kintamieji yra endogeniniai.

3.3.2 Vektorinės autoregresijos tipai

Galima išskirti tris (nestruktūrinės) vektorinės autoregresijos tipus:

a) stacionari – nestacionari;
b) baigtinė – begalinė;
c) apribota – neapribota.

Kaip matyti iš aukščiau pateikto apibrėžimo, VAR stacionarumas priklauso nuo determinanto $|I-\Sigma_{i=1}^{p}A_i z^i|$ šaknų modulių $|z_i|$. Kadangi šiame skyriuje nagrinėjami tik stacionarūs procesai, tai toliau apsiribojama tik stacionaria VAR, t.y. laikoma, kad $|z_i|>1$.

Jei eilė p yra baigtinė, tokiu atveju VAR yra baigtinė ir žymima VAR(p), priešingu atveju - VAR yra begalinė. Begalinės eilės VAR pavyzdžiu gali būti apgręžiamas VARMA procesas, išreikštas tik per VAR dalį (žr. po VARMA apibrėžimu pateiktą pavyzdį).

Apibrėžimas. Procesas Y_t, tenkinantis išraišką

(81) $A(L)(Y_t-\mu)=\Theta(L)v_t,\ v_t\sim WN(0,\Sigma_v)$,

kur $A(L)=I-\Sigma_{i=1}^{p}A_iY_{t-i}$, $\Theta(L)=I-\Sigma_{i=1}^{q}\Theta_j v_{t-j}$,

vadinamas *vektoriniu p-eilės autoregresijos ir q-eilės slenkamųjų vidurkiu procesu;* žymimas VARMA(p,q). Čia Y_t, μ ir v_t yra atitinkamai n dimensijos endogeninių kintamųjų, matematinių vilčių ir baltojo triukšmo paklaidų vektoriai; Σ_v ir A_i, $i=1,...,p$, yra kvadratinės $n\times n$ dimensijų paklaidų vienalaikių kovariacijų ir parametrų matricos; p – autoregresijos eilė.

Dėmesio! VARMA yra apgręžiamas, jei determinanto lygties $|I-\Sigma_{i=1}^{q}\Theta_j z^j|=0$ šaknys moduliu yra didesnės už vienetą, t.y. $|z_j|>1, j=1,...,q$.

Pavyzdys. Tegu turimas stacionarus ir apgręžiamas VARMA(1,1) procesas

$(I-AL)Y_t=(I-\Theta L)v_t,\ v_t\sim WN(0,\Sigma_v)$.

Apręžus VARMA į VAR ir pasinaudojant tuo, kad $(I-\Theta L)^{-1}=(I+\Theta L+\Theta^2L^2+...)$, nesunku matyti, jog gaunamas begalinės eilės VAR procesas

$(I+\Theta L+\Theta^2L^2+...)(I-AL)Y_t=v_t$.

Kadangi pakankamai ilgu p galima norimu tikslumu aproksimuoti ir apgręžiamus VARMA[11], o VAR įvertinimas yra žymiai paprastesnis, tai praktikoje labai dažnai apsiribojama tik VAR analize. Tas pats toliau daroma ir šiose paskaitose.

Kai reikalaujama, jog dalis parametrų įgytų tam tikras reikšmes (dažniausiai nulį – vadinamieji nuliniai apribojimai, pašalinantys aiškinančiojo kintamojo ar jo vėlavimo poveikį), tokia VAR(p) vadinama apribota. Jei jokie išankstiniai parametrų apribojimai (paprastai nuliniai) nėra uždedami VAR sistemai, tai ji yra vadinama neapribota.

Pavyzdys. Jei 3.3 poskyrio pradžioje nagrinėtame pavyzdyje būtų iš anksto nusakoma, kad parametrai $c_1=0$ ir $a_{21}=0$, turėtume tokią apribotą VAR:

[11] Neapgręžiama MA dalis rodytų, kad kintamasis per daug kartų skirtuminių būdų transformuotas arba, kad korektiškas modelis yra kointegruota VAR, o ne stacionari VAR

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix} \sim \mathrm{WN}\left(\begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma \\ \sigma & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \right).$$

Tegu $a_{11}=0.7$, $a_{12}=-0.9$, $a_{22}=0.4$, ar ji stacionari?

Išankstinis parametrų apribojimas turi trūkumų ir privalumų. Kadangi nuliniai apribojimai mažina vertintinų parametrų skaičių, tai apribota VAR turėtų būti efektyvesnė. Tačiau VAR yra redukuotas modelis, todėl visiškai neaišku, kokiu pagrindu turėtų būti remiamasi uždedant šiuos (nulinius) apribojimus? Tai, kad įverčio reikšmė yra artima nuliui (statistiškai nereikšminga) dar nėra pakankamas pagrindas, nes redukuotame modelyje parametrai yra komplikuotos struktūrinių modelių tiesinės kombinacijos (svoriai čia gaunami apvertus vienalaikius ryšius apibūdinančią matricą), ir nėra pagrindo manyti, kad jie būtinai turi būti statistiškai reikšmingi. Todėl VAR, kitaip nei SVAR, modelyje taikyti nulinius apribojimus nėra pagrindo.

Dėl visų aukščiau aptartų priežasčių toliau yra apsiribojama stacionaria baigtinės p eilės neapribota VAR(p).

3.3.3 VAR nuokrypių nuo vidurkio formoje

3.3.4 Lydinčioji VAR forma

Dažnai esminių analizės rezultatų nekeičia tai, ar analizuojama VAR(1) ar bendresnė VAR(p). Tai nėra atsitiktinai – kiekvieną VAR(p) modelį galima perrašyti į VAR(1) pavidalą, naudojant tam tikrą kintamųjų peržymėjimą.

Apibrėžimas. VAR(1) pavidalas, kuriuo išreiškiamas VAR(p) procesas naudojant kintamųjų peržymėjimą, vadinamas VAR(p) *lydinčiąja forma*.

Lydinčioji forma yra patogi tuo, jog užuot analizavus komplikuotas VAR(p) išraiškas, be esminio turinio praradimo galima naudoti žymiai paprastesnį VAR(1) modelį. O apie kokį peržymėjimą kalbama?

Tegu turima VAR(p)

$$Y_t = c + \Sigma_{i=1}^{p} A_i Y_{t-i} + v_t,\ v_t \sim WN(0,\Sigma_v).$$

Nesunku įsitikinti, kad ją lengva perrašyti į *lydinčiąją formą*

$$\tilde{Y}_t = \tilde{c} + \tilde{A}\tilde{Y}_{t-1} + \tilde{v}_t,\ \tilde{v}_t \sim WN(0,\tilde{\Sigma}_v),\ \text{kur}$$

$$\tilde{Y}_t = \begin{bmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-p+1} \end{bmatrix},\ \tilde{c} = \begin{bmatrix} c_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & \\ I & 0 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix},\ \tilde{v}_t = \begin{bmatrix} v_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \tilde{\Sigma}_v = \begin{bmatrix} \Sigma_v & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \end{bmatrix}.$$

Šioje formoje pirmoji vektorių bei matricų eilutė kaip tik ir duos VAR(p), o likusieji nariai tiesiog užtikrina kairės ir dešinės lydinčiosios formos lygybės adekvatumą.

3.4 VAR modelio sudarymas

3.4.1 Modelio formavimo etapai

Norint VAR modeliu aprašyti empirinius duomenis, panašiai kaip ir Box-Jenkins procedūroje taikomi tokie modelio sudarymo etapai (pastebėtina, kad 3, 4 ir 5-as VAR formavimo etapai yra labai susiję ir beveik vienalaikiai):

1) kintamųjų (vektoriaus Y_t komponentų) parinkimas bei duomenų surinkimas
2) kintamųjų stacionarumo užtikrinimas
3) parametrų įvertinimas
4) VAR vėlavimų eilės *p* parinkimas
5) modelio adekvatumo analizė

Kintamųjų vektorių paprastai sufleruoja nagrinėjamas konkretus uždavinys ir ekonomikos teorija bei bendri ekonominiai samprotavimai. Atkreiptinas dėmesys į tai, kad galimybę įtraukti daug kintamųjų į VAR sistemą labai riboja turimų duomenų kiekis, – VAR modelio parametrų skaičius labai greitai auga.

Dėmesio! Turint *n* kintamųjų ir *p* vėlavimų eilės VAR(p) sistemą ir norint įvertinti atskirą jos lygtį, vien tik parametrų įvertinimui būtina turėti $np+1$ stebėjimą. Tačiau norint gauti tam tikras "geras" įverčių savybes dar būtina, jog stebėjimų skaičius gerokai viršytų vertintinų parametrų skaičių.

Todėl praktikoje į VAR dažniausiai įtraukiami tik patys svarbiausi rodikliai. Norint modeliuoti daugiau kintamųjų, jie skaidomi (naudojant ekonominius samprotavimus ir pan.) į posistemes, kurioms jau sudaromi VAR modeliai.

Nors VAR kintamieji gali būti ir nestacionarūs (žr. integruotų kintamųjų analizės skyrius), tačiau šiame skyriuje apsiribojama tik stacionarių kintamųjų VAR. Todėl, jei *minimalios dispersijos* ar kiti testai rodo, kad kintamieji yra nestacionarūs, juos skirtuminiu būdu reikėtų transformuoti į stacionarius, kaip buvo aprašyta 2.8 poskyryje.

Kaip iš ankstesnių ekonometrijos kursų Jūs gerai žinote, atskiros autoregresinės lygties MKM įverčiai yra visada paslinkti – pageidaujama baigtinių imčių savybė nėra tenkinama. Tačiau asimptotinė (didelių imčių) suderinamumo savybė $plim(\hat{\theta}-\theta)=1$ sakanti, kad augant stebėjimų skaičiui įvertis vis mažiau ir mažiau skirsi nuo parametro reikšmės su kiek norimai vienetui artima tikimybe, yra tenkinama, jei autoregresijos paklaidos nėra autokoreliuotos (kaip matyti iš VAR apibrėžimo, taip ir yra, nes liekanos yra *baltasis triukšmas*). Atkreipkite dėmesį ir į jau 3.2.2 skirsnyje minėtą VAR savybę, – VAR neturi vienalaikių ryšių, todėl kiekviena jos lygtis gali būti nagrinėjama atskirai. Kaip prisimenate iš ankstesnių ekonometrijos kursų, vienalaikiškumas lemtų, kad parametrų įverčiai nebūtų suderinti nepriklausomai nuo paklaidų savybių (suderintiems įverčiams gauti esant vienalaikiškumo problemai naudojamas instrumentinių kintamųjų metodas). Šios dvi savybės leidžia MKM gauti suderintus VAR lygčių parametrų įverčius.

Dėmesio! VAR nėra vienalaikiškumo problemos, kuri sąlygoja parametrų įverčių nesuderinamumą vertinant parametrus MKM. Todėl kiekvieną VAR lygtį galima įvertinti atskirai nuo likusių sistemos lygčių taikant MKM ir, kadangi VAR liekanos yra *baltasis triukšmas*, taip gauti suderintus parametrų įverčius.

Turint kintamuosius ir tinkamą parametrų įvertinimo metodą bei parinkus tinkamą VAR modelio vėlavimų eilę *p*, jau gaunamas praktinis įvertintas VAR modelis. Tačiau modelio gerumas bei visos juo grindžiamos tolimesnės išvados priklauso nuo tinkamai parinkto vėlavimo. Jei *p* per mažas, tai dalis ryšių "nusės" paklaidose ir ne tik pats modelis nebus korektiškas, bet ir jo parametrų įverčiai bent jau dėl paklaidų autokoreliuotumo bus nesuderinti, nekalbant apie praleistų kintamųjų poveikį. Jei *p* per didelis, tai (nemaža) dalis vertinamų parametrų VAR modelyje yra lygūs nuliui, o tai blogina įverčių efektyvumą, nes papildomų parametrų įvertinimas mažina laisvės laipsnių skaičių. Dėl šių priežasčių būtina parinkti tinkamą *p*.

Parinkti tinkamą *p* palengvina modelio adekvatumo analizė, kuri susideda bent iš dviejų dalių. Pirma, VAR apibrėžimui adekvataus modelio paklaidos yra *baltasis triukšmas*. Tada minimalus reikalavimas, kurį formuojamo VAR modelio liekanos turėtų tenkinti, yra jų neautoreliuotumas. Antra, adekvataus modelio paskutiniojo vėlavimo p parametrų matrica A_p turi būti nenulinė. Matyti, kad adekvatumo tikrinimas ir vėlavimo eilės parinkimas yra glaudžiai susiję, o nekorektiškas modelio suformavimas atitinkamai įtakoja ir parametrų įverčių savybes. Todėl formuojant VAR visa tai reikia suvokti kaip vienalyti procesą.

3.4.2 VAR vėlavimų eilės *p* parinkimas

Du pagrindiniai būdai, naudojami parenkant VAR(p) eilę, remiasi: a) nuoseklaus hipotezės apie paskutinio vėlavimo parametrų matricos nereikšmingumą tikrinimu; b) informaciniais kriterijais. Toliau šie požiūriai detalizuojami.

3.4.2.1 Nuoseklus hipotezių apie paskutinio vėlavimo parametrų matricos nereikšmingumą tikrinimas

Šio metodo idėja yra tokia. Jei tikroji nežinoma VAR(p) turi p vėlavimų, tai sudarius VAR(m) modelį, kur $m>p$ turėtume

$$Y_t = c + \Sigma_{i=1}^{p} A_i Y_{t-i} + \Sigma_{j=p+1}^{m} A_j Y_{t+j} + v_t,\ \forall j\ A_j=0.$$

Tada parinkus m pakankamai didelį (dažnai $m=int[T^{1/2}]$, kur T yra stebėjimų skaičius, o operatorius $int[\bullet]$ išskiria sveikąją skaičiaus dalį) yra tikrinama tokia hipotezių apie parametrų matricas $A_m, A_{m-1},\ldots$ seka:

$$\begin{array}{lll}
H_0^{(1)}: A_m=0 & H_1^{(1)}: A_m\neq 0 & \\
H_0^{(2)}: A_{m-1}=0 & H_1^{(1)}: A_{m-1}\neq 0 & \mid A_m=0 \\
\vdots & & \\
H_0^{(i)}: A_{m-i+1}=0 & H_1^{(i)}: A_{m-i+1}\neq 0 & \mid A_m=\ldots A_{m-i+2}=0 \\
\vdots & & \\
H_0^{(m)}: A_1=0 & H_1^{(m)}: A_1\neq 0 & \mid A_m=\ldots A_2=0
\end{array}$$

Jei i-ajame žingsnyje atmetama $H_0^{(i)}$, tai vėlavimų skaičiaus p įvertis $\hat{p}=m-i+1$. Jei jau pirmame žingsnyje $H_0^{(1)}$: $A_m=0$ atmetama, tada tikslinga patikrinti $H_0^{(2)}$: $A_{m+1}=0$, t.y. hipotezę, ar didesnės eilės vėlavimo ($m+1$) parametrų matrica yra nulinė. Jei taip, tai $\hat{p}=m$, jei ne, tikrinimas tęsiamas didinant vėlavimų eilę tol, kol $H_0^{(i)}$: $A_{m+i}=0$, o tada $\hat{p}=m+i-1$.

Darant prielaidą apie gausišką VAR(m) paklaidų vektorių, i-ąją hipotezę $H_0^{(i)}$ galima tikrinti šia tikėtinumo santykio statistika

$$\lambda_{LR}(i)= T[ln|\hat{\Sigma}_v(m-i)|- ln|\hat{\Sigma}_v(m-i+1)|] \overset{H_0}{\sim} \chi^2(n^2), \tag{82}$$

kur T yra stebėjimų skaičius; $\hat{\Sigma}_v(\bullet)$ – atitinkamos VAR($\bullet$) MTM (ar MKM, kai paklaidos gausiškos) liekanų pagrindu įvertinta paklaidų vienalaikių kovariacijų matrica; n – vektorinio kintamojo Y_t dimensija (atkreipkite dėmesį į tai, kad $\forall l\ A_l$ yra kvadratinė ir turi n^2 elementų). Kaip matyti, ši statistika prie nulinės hipotezės yra pasiskirsčiusi pagal χ^2 skirstinį su n^2 laisvės laipsnių skaičiumi.

Kai $\lambda_{LR}(i)> \chi_\alpha^2(n^2)$, kur α yra pasirinktas reikšmingumo lygmuo, tai nulinė hipotezė yra atmetama. Pastebėtina, jog išskyrus pirmąją hipotezę, tolesnės remiasi prielaida, kad prieš ją patikrintose hipotezėse padaryta teisinga išvada. Dėl šios priežasties, norint padaryti korektišką išvadą apie sąlygines hipotezes α nominalaus reikšmingumo lygmenyje, pavyzdžiui, $\alpha=0.05$, reikšmingumo lygmenį $r(\alpha)$, kuris naudojamas sąlyginei hipotezei tikrinti reikia keisti tokiu būdu (plačiau žr., pavyzdžiui, Lutkepohl, 1993, p.126)

$$r_i(\alpha) = \begin{cases} \alpha, \text{ i=1} \\ 1-(1-\alpha)[1-r_{i-1}(\alpha)], \text{ i=2,3,...} \end{cases}, \tag{83}$$

kur i yra žingsnio numeris aukščiau apibrėžtoje procedūroje.

Dėmesio! Kadangi, išskyrus pirmąją hipotezę, toliau tikrinamos sąlyginės hipotezės, tai korektiškas reikšmingumo lygmuo, tikrinant kiekvieną vėlesnę hipotezę auga ir yra didesnis nei nominalusis reikšmingumo lygmuo α.

Pavyzdys. Tegu užsibrėžtas nominalus reikšmingumo lygmuo yra 0.05. Tada korektiškos išvados apie nulines hipotezes aukščiau apibūdintoje nuoseklaus hipotezių tikrinimo procedūroje būtų gaunamos naudojant tokius reikšmingumo lygmenis atitinkamame žingsnyje, t.y. tikrinant i-ąją hipotezę:

$i=1,\ r(\alpha) = 0.05;$

$i=2,\ r(\alpha) = 1-(1-0.05)(1-0.05) = 0.0975;$

$i=3,\ r(\alpha) = 1-(1-0.05)(1-0.0975) = 0.142625;$

ir t.t.

Kadangi išvados apie sąlyginę nulinę hipotezę reikšmingumo lygmuo auga, tai, esant pakankamai dideliam m, visada atsiras toks žingsnis i, kai nulinė hipotezė bus atmesta. Tai rodo, kaip svarbu tinkamai parinkti maksimalią nagrinėjamą vėlavimų eilę m. Su nominalaus reikšmingumo lygmeniu susijusio probleminio aspekto neturi toliau aptariamas vėlavimų parinkimo būdas, tačiau jis yra ir kiek mažiau griežtas.

3.4.2.2 Vėlavimų eilės parinkimas pagal informacinius kriterijus

Toliau aptariami informacijos kriterijai skirti įvertinti, ar tikslinga modelį papildomai parametrizuoti padidinant vėlavimų eilę p? Šių informacinių kriterijų idėja apibūdinta 2.8 poskyryje. Vektoriniai AIC (Akaike informacinis kriterijus), BIC/SC (Schwarz informacinis kriterijus ar kitaip Bajeso informacinis kriterijus) ir HQ (Hannan-Quin informacijos kriterijus) informacinių kriterijų analogai yra tokie:

(84) $$\boxed{AIC(i) = \ln\left|\hat{\Sigma}_v(i)\right| + \frac{2}{T} in^2}$$

(85) $$SC(i) = \ln\left|\hat{\Sigma}_v(i)\right| + \frac{\ln T}{T} in^2$$

(86) $$HQ(i) = \ln\left|\hat{\Sigma}_v(i)\right| + \frac{2\ln\ln T}{T} in^2 .$$

Primintina, kad kiekvieno kriterijaus (KR) atveju parenkamas toks $\hat{p}$, jog

(87) $$\hat{p}(KR) = \arg\min_i \left(KR(i)\right),\ i=1,\dots,m,$$

kur paprastai $m= int[T^{1/2}]$ mažose ir $m= int[T^{1/3}]$ didelėse imtyse, nors teoriškai tam tikras optimalumo savybes geriau tenkina Schwert siūloma taisyklė $m=int[12[T/100]^{1/4}]$.

Pavyzdys. ???

Dėmesio! Primintina, kad SC kaip ir HQ duoda suderintą, o AIC – nesuderintą vėlavimų įvertį $\hat{p}$. Tačiau imitacinė analizė rodo, kad mažose imtyse AIC neretai duoda geresnius rezultatus vidutinės kvadratinės paklaidos prasme.

Tarp skirtingais kriterijai įvertintos vėlavimų eilės galioja tokie sąryšiai:

$\hat{p}\ (SC) \le \hat{p}\ (AIC),\ T \ge 8$

$\hat{p}\ (SC) \le \hat{p}\ (HQ),\ \forall T$

$\hat{p}\ (HQ) \le \hat{p}\ (AIC),\ T \ge 16$

Taigi didesnėse imtyse AIC parinktų didžiausią, o SC – mažiausią vėlavimų eilę.

3.4.3 Modelio adekvatumo tikrinimas

VAR modelio sudarymui labai svarbus vėlavimo eilės parinkimas, tačiau adekvataus modelio, kaip nusako VAR apibrėžimas, paklaidos yra *baltasis triukšmas*. Tam būtina sąlyga, – kad paklaidos neautokoreliuotų. Pastarojo reikalavimo tenkinimas savo ruožtu yra būtinas suderintiems parametrų įverčiams gauti. Visa tai rodo, jog be VAR vėlavimų eilės p parinkimo būtina atsižvelgti ir į paklaidų savybes.

Sakykime, kad turimas (88) lygtimi nusakomas įvertintas VAR(p) modelis

(88) $$y_t = \hat{c} + \sum_{i=1}^{p} \hat{A}_i y_{t-i} + \hat{v}_t \,,$$

kur y_t yra atitinkama vektorinio kintamojo Y_t realizacija (stebimi duomenys), o kepurėlės žymi atitinkamus įverčius. Tokio modelio liekanų i-ojo vėlavimo (auto)kovariacijų bei (auto)koreliacijų matricų C_i ir R_i įverčiai yra

$$C_i = T^{-1}\Sigma_{t=i+1}^{T} \hat{v}_t \hat{v}_t{}' ,\quad R_i = D^{-1}C_iD^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11,i} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1,i} & \cdots & \end{bmatrix},\ i=1,\ldots,h, \text{ kur } D = \begin{bmatrix} \sqrt{c_{11,0}} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \end{bmatrix},$$

o $r_{kl,i} = \dfrac{c_{kl,i}}{\sqrt{c_{kk,0}c_{ll,0}}}$.

Čia mažosios raidės žymi atitinkamų matricų atskirus elementus ir primintina, kad $r_{kl,i} \equiv \hat{\rho}_{kl,i}$.

Modelio paklaidų autokoreliuotumą galima tikrinti tiriant atskirus liekanų autokoreliacijos koeficientus ar jungtinę nulinę hipotezę, kad visos tiriamos paklaidų autokoreliacijos lygios nuliui. Adekvatumo tikrinimo procedūros realizavimo paprastumo požiūriu tikslinga pradėti nuo antrosios hipotezės, o ją atmetus (tai reikštų, kad egzistuoja bent viena reikšminga autokoreliacija), pereiti prie tą lėmusių konkrečių $r_{kl,i}$ identifikavimo.

Jungtinė hipotezė, kad visi elementai $\rho_{kl,i}$ visose iki h vėlavimų (praktikoje dažnai taikoma $h=T^{1/2}$) autokoreliacijos koeficientų matricose yra lygūs nuliui prieš alternatyvą, kad egzistuoja bent vienas nenulinis elementas, kurios formalizuojamos taip

(89) H_0: $\forall k,l\ \rho_{kl,i} = 0,\ i=1,\ldots,h$ $\quad H_1$: $\rho_{kl,i} \neq 0$,

tikrinama vektoriniais Box-Pierce ar Ljung-Box statistikų analogais

$$BP(h) = T\Sigma_{i=1}^{h}\, tr(R_i'R_0^{-1}R_iR_0^{-1}) \overset{a}{\sim} \chi^2[(h-p)n^2],\ h>p;$$

$$LB(h) = T^2\Sigma_{i=1}^{h}\, (T-i)^{-1} tr(R_i'R_0^{-1}R_iR_0^{-1}) \overset{a}{\sim} \chi^2[(h-p)n^2],\ h>p.$$

Jei BP(h) $>\chi_\alpha^2[(h-p)n^2]$ ar LB(h) $>\chi_\alpha^2[(h-p)n^2]$, tai nulinė hipotezė atmetama ir tenka aiškintis, kuris konkretus (ar konkretūs) vėlavimas lėmė tokį rezultatą.

Hipotezė apie atskiro koreliacijos matricos elemento $\rho_{kl,i}$ nereikšmingumą prieš jo reikšmingumo alternatyvą

(90) H_0: $\rho_{kl,i} = 0$ $\quad H_1$: $\rho_{kl,i} \neq 0$

tikrinama pasinaudojant tuo, kad, esant gausiškoms paklaidoms, koreliacijos yra asimptotiškai pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį, tiksliau $T^{1/2}r_{kl,i} \overset{a}{\sim} N(0,1)$. Todėl (90) apibrėžta nulinė hipotezė yra atmetama $\alpha=0.05$ reikšmingumo lygmenyje, jei $|r_{kl,i}| > 2T^{-1/2}$.

Pavyzdys. Įvertinus trijų kintamųjų VAR(1) modelį gautos tokios koreliacijų matricos

$$R_1 = \begin{bmatrix} -0.197 & 0.103 & 0.128 \\ 0.190 & 0.20 & 0.228 \\ -0.047 & 0.150 & -0.089 \end{bmatrix},\ R_2 = \begin{bmatrix} -0.045 & 0.067 & 0.097 \\ 0.119 & 0.079 & 0.009 \\ 0.225 & -0.355 & 0.179 \end{bmatrix}.$$

Kai $T = 100$, tai $2T^{-1/2} = 0.2$, todėl penkių procentų reikšmingumo lygmenyje statistiškais reikšmingais laikytume $\rho_{23,1}$, $\rho_{31,2}$, ir $\rho_{32,2}$ koreliacijas, kadangi $|r_{23,1}|$=0.228>0.2, $|r_{31,2}|$=0.225>0.2, ir $|r_{32,2}|$=0.355>0.2. Todėl darytume išvadą kad sudarytasis modelis nėra adekvatus teorinei VAR(1), kadangi teorinio modelio paklaidos turėtų būti neautokoreliuotos. Todėl duomenų pagrindu sudarytas modelis neadekvatus teoriniam, o jo parametrų įverčiai yra nesuderinti dėl liekanų autokoreliuotumo.

3.5 VAR modelio taikymai

Sudarius adekvatų VAR modelį belieka jį panaudoti. Plačiausiai VAR modeliai taikomi *skaičiuojant prognozes* bei vadinamajai *Granger priežastingumo* analizei, kurioje tikrinama, ar vieno kintamojo reikšmės naudingos prognozuojant kito kintamojo ateitį. Tačiau VAR modelį taip pat galima taikyti ir imitaciniam modeliavimui – *reakcijos į impulsus tyrimui*, kuriame nagrinėjama, kaip VAR sistemos kintamųjų reikšmės kinta po to, kai į sistemą ateina tam tikri impulsai. Be to, VAR galima panaudoti ir identifikuojant, kurio kintamojo(-ųjų) šokai labiausiai įtakoja visų VAR sistemos kintamųjų reikšmes (turi didžiausią įtaką jų formavimuisi). Tokia analizė vadinama *prognozės paklaidų dispersine analize*. Pastebėtina, kad išraiškų parastumo vardan toliau dirbama su VAR(1), tačiau primintina, jog VAR(p) visada gali būti išreikšta kaip VAR(1) panaudojant jos *lydinčiąją formą* (žr. 3.3.4 skirsnį).

3.5.1 Prognozavimas VAR modeliu

Kaip ir analizuojant prognozių savybes ARMA modeliais, toliau laikoma, kad prognozės paklaida atsiranda tik dėl nežinomų paklaidų reikšmių ateityje, t.y. v_{t+h}, $h>0$, o ne dėl nekorektiškai sudaryto modelio ar parametrų įverčių paklaidų, t.y. prognozuojama adekvačiu VAR modeliu. Taigi tegul stebimas toks VAR(p) modelis

(91) $y_t = c + Ay_{t-1} + v_t,\ t=1,\dots,T.$

Tada ateities reikšmės y_{T+h}, išreikštos pasinaudojant VAR modeliu per paskutinį stebėjimą y_T ir ateities paklaidas, yra

$$y_{T+1} = c + Ay_T + v_{T+1},\ \text{kai}\ h=1$$
$$y_{T+2} = c + Ay_{T+1} = c+A(c+Ay_T+v_{T+1})+v_{T+2} = c + Ac + A^2y_T + Av_{T+1} + v_{T+2},\ \text{kai}\ h=2$$
$$y_{T+3} = (I+A+A^2)c + A^3y_T + A^2v_{T+1} + Av_{T+2} + v_{T+3}\ \text{kai}\ h=3$$
$$\vdots$$

(92) $y_{T+h} = (I+A+A^2+\dots+A^{h-1})c + A^hy_T + A(L)v_{T+h},\ \forall\ h>0,$
kur $A(L) = (I+AL+ A^2L^2+\dots+A^hL^h),$

o ateities reikšmių y_{T+h}, $h>0$ taškinės prognozės $\tilde{y}_{T+h}$ nusakomos lygtimi

(93) $\tilde{y}_{T+h} = E(y_{T+h}|y_T,y_{T-1},\dots) = (I+A+A^2+\dots+A^{h-1})c + A^hy_T,\ \forall\ h>0.$

Atitinkamai, jei (91) paklaidos v_t yra gausiškos, prognozės paklaidos e_{T+h}

(94) $e_{T+h} = y_{T+h} - \tilde{y}_{T+h} = \Sigma_{i=0}^{h} A^iL^i v_{T+h-i} \sim N(0,\Sigma_{e,h}),$

kur $\Sigma_{e,h}$ yra prognozės paklaidų kovariacijų matrica apibrėžiama lygtimi

$$\Sigma_{e,h} = E\{A(L)v_T[A(L)v_T]'\} = A(L)\Sigma_v A(L)'.$$

Tada pasinaudojant (94) rezultatu, taškinės prognozės vektoriaus $\tilde{y}_{T+h}$ atskiro k-ojo elemento ($\tilde{y}_{k,T+h}$) pasikliovimo intervalai būtų gaunami iš

$$\frac{y_{k,T+h} - \tilde{.}}{\sigma_{k,h}} \sim N(0,1),$$

kur $\sigma_{k,h}$ yra prognozės paklaidų kovariacijų $\Sigma_{e,h}$ matricos atitinkamo k-ojo diagonalės elemento kvadratinė šaknis, pagal

$$\tilde{y}_{k,T+h} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{k,h},$$

kur $z_{\alpha/2}$ yra atitinkama *normaliojo skirstinio* procentilė, užduodanti norimą reikšmingumo lygmenį α.

Praktikoje, nežinomi kovariacijų matricų dydžiai keičiami į jų atitinkamus įverčius, dėl to keičiant *normaliojo skirstinio* procentiles į atitinkamas *Studento skirstinio* procentiles.

Pavyzdys. ???

3.5.2 Granger priežastingumo tikrinimas

Vektorinė autoregresija yra patogus instrumentas tikrinti 1.6 poskyryje apibrėžtą *Granger priežastingumą*. Tegu tiriamas kintamųjų y_{1t} ir y_{2t} tarpusavio Granger priežastingumas. Tam pirmiausiai reikia sudaryti VAR, kuri apimtų šiuos kintamuosius, t.y. vektorius $y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \ldots)'$. Priklausomai nuo to, kokia informacijos aibė I_t nagrinėjama, į VAR sistemą gali būti įtraukti ir kiti kintamieji (tai toliau aptariamos analizės principo nekeičia), tačiau pateikimo paprastumo dėlei, tegu I_t sudaro tik tie kintamieji, kurių priežastingumas tiriamas, t.y. $I_t = (y_{1t-1}, y_{1t-2}, \ldots, y_{2t-1}, y_{2t-2}, \ldots)$. Sakykime, kad yra suformuotas adekvatus aktualių kintamųjų VAR(p) modelis, kuris išplėstiniame pavidale atrodytų taip

$$(95)\qquad \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11,1} & a_{12,1} \\ a_{21,1} & a_{22,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} a_{11,p} & a_{12,p} \\ a_{21,p} & a_{22,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t-p} \\ y_{2t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix}.$$

Jei y_{2t} nėra y_{1t} Granger priežastimi, tada, y_{2t} praeitis turi būti nenaudinga prognozuojant y_{1t} ir pastarasis turi priklausyti tik nuo savo praeities. Kadangi sudarytas adekvatus VAR(p) modelis, jis leidžia šią sąlygą užrašyti taip

$$E(y_{1t}|I_t) = c_1 + a_{11,1}\, y_{1t-1} + \ldots + a_{11,p}\, y_{1t-p}.$$

Tai, kad y_{2t} nėra y_{1t} Granger priežastimi (95) lygtimi nusakytai VAR(p) sistemai uždeda apribojimą $a_{12,i}=0,\ i=1,\ldots,p$. Jei $y_{2t} \mapsto y_{1t}$, tada y_{2t} praeitis yra "naudinga" prognozuojant y_{1t}, vadinasi bent vienas su y_{2t-i}, $i>0$ poveikiu kintamajam y_{1t} susijęs koeficientas turėtų būti statistiškai reikšmingas.

Nulinė *Granger nepriežastingumo* hipotezė, kad y_{2t} nėra y_{1t} *Granger priežastimi*, (95) lygtimi nusakytoje VAR(p) sistemoje formuluojama taip

$$(96)\qquad H_0\!: a_{12,1} = \ldots = a_{12,p} = 0 \qquad\qquad H_1\!: \exists i\ a_{12,i} \neq 0.$$

Darant prielaidą apie gausiškas VAR(p) paklaidas, statistiškai šią jungtinę nulinę hipotezę galima patikrinti taikant standartinį F testą. Prie nulinės hipotezės jo statistika

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_U)/p}{RSS_U/(T-2p-1)} \sim F(p,T\text{-}2p\text{-}1)$$

yra asimptotiškai pasiskirsčiusi pagal *F skirstinį* (čia RSS_R ir RSS_U atitinkamai žymi apriboto ir neapriboto modelio liekanų kvadratų sumas). Jei $F > F_\alpha(p,T\text{-}2p\text{-}1)$, tai nulinė hipotezė, jog y_{2t} nėra y_{1t} *Granger priežastimi* atmetama alternatyvos $y_{2t} \mapsto y_{1t}$ naudai.

Pavyzdys. ???

Nors *Granger priežastingumo* tikrinimas VAR sistemoje yra labai paprastas, tačiau svarbu atkreipti dėmesį į tokius jo trūkumus:

- Tai statistinis informatyvumas, o ne loginis priežastingumas, galintis atsirasti, pavyzdžiui, dėl *trečiosios priežasties*. Todėl ekonominėms išvadoms pagrįsti *Granger priežastingumas* naudotinas labai atsargiai;
- Išvados apie *Granger priežastingumą* jautrios informacijos aibės struktūrai, t.y. kitų kintamųjų įtraukimui į VAR modelį;
- Išvados apie *Granger priežastingumą* taip pat jautrios duomenų dažnumui ir sezoniniam jų išlyginimui, t.y. naudojant metinius duomenis gali būti gauti vieni rezultatai, o ketvirtinius – kiti; be to, naudojant ketvirtinius išvados galėtų skirtis priklausomai nuo to, ar naudoti pirminiai duomenys, ar sezoniškai išlyginti duomenys;
- Vėlavimo eilės parinkimas taip pat įtakoja išvadas apie *Granger priežastingumą*, tam būtina iš anksto suformuoti korektišką VAR(p) modelį.

3.5.3 Reakcijos į impulsus analizė

Be aukščiau apibūdintų taikymų, VAR dažnai naudojama *reakcijos į impulsus analizėje*. Pastarosios tikslas – nusakyti, kaip kis VAR sistemą sudarančių kintamųjų reikšmės po to, kai sistemą paveiks tam tikri šokai (*impulsai*). Tai pasiekiama tarpusavyje lyginant kiekvieno kintamojo reikšmes situacijose su impulsu ir be impulso, – konkretaus kintamojo *reakcija į impulsą* tada nustatoma kaip skirtumas tarp jo reikšmių, kai sistemą veikia impulsai ir be impulsų.

Gebant tiksliai priskirti impulsus konkretiems kintamiesiems ir turint adekvatų VAR modelį, tokią analizę atlikti nesudėtinga. Sakykime sudarytas adekvatus VAR modelis (ar jo lydinčioji forma) yra

(97) $y_t = c + Ay_{t-1} + v_t,\ t=1,\ldots,T.$

Tegu S žymi laiko momentą, po kurio į sistemą ateina impulsai, y^*_{S+h} – kintamųjų reikšmes su impulsais, y_{S+h} – kintamųjų reikšmės be impulsų, abi matuojamos nuo laiko momento S, kai $h>0$.

Kintamųjų reikšmes be impulso nusako tokia (97) lygties pagrindu gauta funkcija, kurioje laiko indeksas t pakeistas į $S+h$, t.y. laikas matuojamas nuo šokų atėjimo momento,

(98) $y_{S+h} = c + Ay_{S+h-1} + v_{S+h},\ h>0.$

Kintamųjų reikšmes su impulsais nusako tokia funkcija

(99) $y^*_{S+h} = c + Ay_{S+h-1} + v_{S+h} + v^*_{S+h},\ h>0,$

gauta (98) lygtį papildant impulsų funkcija v^*_{S+h}

(100) $$v^*_{S+h} = \begin{cases} v^*_{S+h}, h = 1,\ldots,k \\ 0,\ \ h > k \end{cases}.$$

Tada kintamųjų atsakas (r_{S+h}) į impulsus yra skirtumas tarp y_t reikšmių su impulsais ir be jų, t.y.

(101) $r_{S+h} = y^*_{S+h} - y_{S+h} = A(L)\, v^*_{S+h}.$

Dešinioji lygybės pusė nesunkiai gaunama prisiminus 3.5.1 gautą prognozuojamų reikšmių išraišką (92), kuriai analogiški y_{S+h} ir y^*_{S+h} išskaidymai yra

(102) $y_{S+h} = (I+A+A^2+\ldots+A^{h-1})c + A^h y_S + A(L)v_{S+h}$ ir

(103) $y^*_{S+h} = (I+A+A^2+\ldots+A^{h-1})c + A^h y_S + A(L)v_{S+h} + A(L)\,v^*_{S+h}$,

kur $A(L)=I+AL+A^2L^2+\ldots+A^hL^h$.

Vektorinė funkcija r_{S+h} ir yra reakcijos į impulsus funkcija, parodanti, kaip pasikeičia kintamųjų reikšmės dėl sistemą veikiančių impulsų v^*_{S+h}, lyginant jas su įprastinėmis kintamųjų reikšmėmis be šokų.

Pavyzdys. Tegu turimas dviejų kintamųjų VAR(1) modelis

$$y_t = c + Ay_{t-1} + v_t,$$

kurio išplėstinis užrašas yra toks

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix}.$$

Tegu tik laikotarpį $S+1$ ateina vienetinis impulsas kintamajam y_{1t}, t.y. $v^*_{S+h} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, h=1; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, h>1 \right.$. Tada reakcijos į impulsus funkcijos reikšmės bus:

$$r_{S+1} = \begin{bmatrix} y^*_{1S+1} - y_{1S+1} \\ y^*_{2S+1} - y_{2S+1} \end{bmatrix} = v^*_{S+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

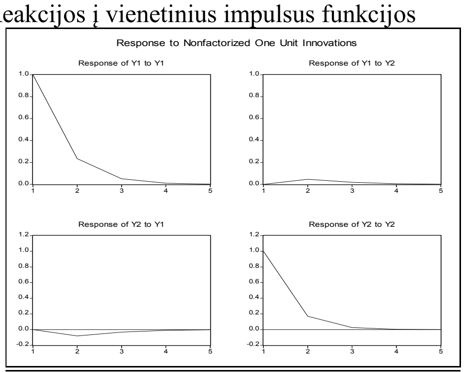
$$r_{S+2} = \begin{bmatrix} y^*_{1S+2} - y_{1S+2} \\ y^*_{2S+2} - y_{2S+2} \end{bmatrix} = v^*_{S+2} + \mathrm{A}\,v^*_{S+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.1 \end{bmatrix};$$

$$r_{S+3} = \begin{bmatrix} y^*_{1S+3} - y_{1S+3} \\ y^*_{2S+3} - y_{2S+3} \end{bmatrix} = v^*_{S+3} + \mathrm{A}\,v^*_{S+2} + \mathrm{A}^2\,v^*_{S+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.09 \end{bmatrix}$$

ir t.t.

Dažnai reakcijos į impulsus funkcijos pateikiamos grafiniu pavidalu, pavaizduojant kintamųjų vektoriaus (y_t) k-ojo elemento (y_{kt}) reakcijos į j-ąjį impulsą (r_{jS+h}) kitimą, bėgant laikui po impulso (h). Toks vizualus instrumentas yra patogus palyginant vienetinio dydžio (dažnai ne absoliučia, o vienetinės standartinės paklaidos prasme) impulsų svarbą VAR sistemos kintamiesiems. 8 grafike pateikiamas kintamųjų y_{1t} ir y_{2t} reakcijos į vienetinius (absoliutiniu dydžiu) impulsus funkcijų reikšmių kitimas iki 5-ojo laikotarpio po impulso. Šios reakcijos į impulsus funkcijos sudarytos modeliui, generuotam pagal aukščiau pavyzdyje pateiktą VAR(1) modelį laikant, kad nekoreliuotos liekanos yra pasiskirsčiusios pagal *normalųjį skirstinį*.

8 grafikas Reakcijos į vienetinius impulsus funkcijos



Viršutinė kairioji diagrama vaizduoja kintamojo y_{1t} reakciją po 1-ąjį laikotarpį atėjusio vienetinio impulso jam pačiam. Apatinė kairioji diagrama vaizduojam, kaip dėl to paties šoko pasikeičia y_{2t} reikšmės. Dešinioji viršutinė diagrama atitinkamai rodo, y_{1t} reakciją į 1-ąjį laikotarpį atėjusį vienetinį impulsą kintamajam y_{2t}, o apatinė y_{2t} – reakciją į jį patį paveikusį impulsą.

Pateiktos reakcijų į impulsus funkcijų diagramos leidžia matyti, kad į sistemą atėję impulsai keturis laikotarpius nemenkai (bent jau autoregresinis poveikis yra nemažas) įtakoja atitinkamų kintamųjų reikšmes, tačiau vėliau jų poveikis nuslopsta. Kokybinis aspektas: y_{2t} didinantys impulsai taip pat nuo kito laikotarpio padidina ir y_{1t} reikšmes, tačiau y_{1t} didinantys impulsai y_{2t} reikšmes, lyginant su tomis, kurios būtų be impulso, mažina.

Liekanų vienalaikio koreliuotumo problema ir paklaidų ortogonalizavimo procedūra

Nors aukščiau išdėstyta reakcijos į impulsus procedūra yra labai paprasta, tačiau norint ją panaudoti praktiškai dažnai susiduriama su papildoma problema. Jei pradiniame (97) modelyje paklaidos v_t yra vienalaikiai koreliuotos tarpusavyje (neortogonalios), t.y. jų vienalaikių kovariacijų matrica nėra diagonali, ar galima neatsižvelgti į tokį koreliuotumą ir tiesiogiai priskirti tik vienam kintamajam impulsą v^*_{S+h}? Jei pradiniame modelyje paklaidos v_t komponentai koreliuoja tarpusavyje, tai reiškia, jog impulsai kartu ateina iš karto į keletą (ar net visus) sistemos kintamuosius, – tai priklauso nuo koreliuotumo struktūros. Pavyzdžiui, žinant, kad modelyje valdžios išlaidų ir BVP lygčių paklaidos yra, tarkim, neigiamai koreliuotos, būtų nekorektiška analizuoti valdžios išlaidų didinimo poveikį modeliuojamai ekonomikos sistemai laikant, kad padidinus išlaidas šokas ateina tik valdžios išlaidoms, – juk išlaidų finansavimo poreikis kartu išstumia privatų sektorių.

Dėmesio! VAR paklaidų koreliuotumo struktūros ignoravimas, skaičiuojant reakcijos į impulsus funkcijas, duoda nekorektiškus rezultatus.

Aukščiau aprašyta reakcijos į impulsus analizė bus visiškai korektiška, jei paklaidos VAR modelyje nekoreliuos. Priešingu atveju tenka galvoti, kaip atskirti ar priskirti tam tikrus šokus konkretiems kintamiesiems. Yra įvairių kelių, tačiau VAR analizėje plačiai naudojama *paklaidų ortogonalizavimo (paklaidų matricos diagonalizavimo) procedūra*, kuri remiasi toliau aptariamu paklaidų kovariacijų matricos *Cholesky dekomponavimu.*

Tegu turima VAR regresija

(104) $y_t = c + A_1 y_{t-1} + \ldots + A_p y_{t-p} + v_t,\ E(v_t v_t') = \Sigma_v.$

Padauginus iš W^{-1} (104) lygtį iš kairės, gaunama

(105) $W^{-1}y_t = W^{-1}c + W^{-1}A_1 y_{t-1} + \ldots + W^{-1}A_p y_{t-p} + u_t,\ u_t = W^{-1}v_t,$

kur $W = PD^{-1}$ yra kvadratinė atitinkamos dimensijos apatinė *trikampė* matrica (virš diagonalės esantys elementai lygūs nuliui), kurios diagonalėje yra vienetai. D yra diagonali matrica, kurios diagonalės elementai yra tokie patys kaip ir matricos P, o matrica P yra gaunama iš v_t vienalaikių kovariacijų matricos Σ_v *Cholesky dekomponavimo* būdu $\Sigma_v = PP'$. Toks teigiamai apibrėžtos matricos Σ_v visada galimas.

Apibrėžimas. *Teigiamai apibrėžta kvadratinė $n \times n$ matrica A* yra tokia matrica, kuri, esant bet kokiam nenuliniui *n dimensijos* vektoriui d, tenkina sąlygą $d'Ad>0$.

Kadangi $\Sigma_v = PP' = WDD'W' = W\Lambda W'$, kur $\Lambda = DD'$, nesunku matyti, $E(u_t u_t') = E[W^{-1}v_t v_t'(W^{-1})'] = W^{-1}\Sigma_v(W')^{-1} = \Lambda$, jog pastaroji transformacija užtikrina transformuotų vienalaikių paklaidų vektoriaus u_t komponentų nekoreliuotumą (vietoje W^{-1} (105) lygtyje tiesiogiai naudojant P^{-1} būtų pasiektas toks pats paklaidų ortogonalumo rezultatas, tačiau tai uždėtų papildomą apribojimą paklaidoms, – visų jų dispersija būtų vienetinė, nes $P^{-1}\Sigma_v(P')^{-1} = I$). Dėl nekoreliuotumo transformuotas paklaidas jau galima laikyti struktūrinėmis, t.y. galima tiesiogiai priskirti kaip impulsus tam tikriems kintamiesiems, ir atitinkamai lygtį (105) naudoti reakcijoms į impulsus skaičiuoti.

Kad būtų geriau suvokta, ką tokia transformacija padaro, tikslinga (105) lygtį kiek pertvarkytį prie abiejų pusių pridedant narį y_t ir atimant $W^{-1}y_t$

(106) $y_t = \Gamma y_t + W^{-1}c + \Sigma_{i=1}^{p} W^{-1}A_i\, y_{t-i} + u_t,\ \Gamma=(I-W^{-1})$.

Kadangi matrica W yra apatinė trikampė, jos atvirkštinė matrica taip pat turės tokį pavidalą. Kadangi W diagonalėje yra vienetai, tai $\Gamma=I-W^{-1}$ bus apatinė trikampė matrica, kurios diagonalėje yra nuliai. Tada (106) išplėstinėje formoje atrodys taip

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & \\ \gamma_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \\ \gamma_{n1} & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{bmatrix} + W^{-1}c + \Sigma_{i=1}^{p} W^{-1}A_i\, y_{t-i} + u_t.$$

Bet juk tai *rekursinė sistema* su papildomais dinaminiais nariais!

Apibrėžimas. *Vienalaikių tiesinių lygčių sistema*, kurios priklausomų kintamųjų vektorių galima išdėstyti tokiu būdų, kad pirmas kintamasis nepriklausytų nuo likusių vienalaikių kintamųjų, antrasis priklausytų nuo pirmojo, bet ne nuo likusiųjų ir t.t., vadinama r*ekursine vienalaikių tiesinių lygčių sistema*.

Taigi praktiškai, taikant *Cholesky dekomponavimu* pagrįstą paklaidų ortogonalizavimo procedūrą pradinė VAR lygtis yra transformuojama į struktūrinę lygtį su griežta rekursine struktūra, kur pirmasis kintamasis yra laikomas egzogeniniu likusiųjų kintamųjų atžvilgiu, antrasis – egzogeniniu visų, išskyrus pirmąjį kintamąjį, ir t.t. Taip pertvarkytos VAR lygties kintamųjų priežastingumas turi ir savo specialų pavadinimą – *Wold'o priežastingumas*.

Apibrėžimas. *Rekursine sistema* nusakomas pertvarkytos VAR lygties kintamųjų priežastingumas vadinamas *Wold* priežastingumu.

Gautas rezultatas turi labai svarbių implikacijų praktiniams tyrimams. Kadangi *Cholesky dekomponavimu* pagrįstas paklaidų ortogonalizavimas automatiškai sudaro rekursinę lygčių sistemą, kurioje viršutinis narys yra praktiškai laikomas egzogeniniu, tai, formuojant VAR, vadovaujantis ekonominiais samprotavimais kintamuosius reikėtų išdėstyti pagal numanomą priežastingumą atitinkama tvarka.

Dėmesio! Sudarant VAR modelį, kurį vėliau numatoma panaudoti ne tik prognozėms skaičiuoti, bet ir struktūrinei analizei (reakcijoms į impulsus modeliuoti, kintamųjų svarbos analizei taikant prognozės paklaidos dispersijos išskaidymą ir pan.) tikslinga kintamuosius išdėstyti jų egzogeniškumo mažėjimo tvarka.

3.5.4 Prognozės paklaidų dispersijos išskaidymas

Reakcijos į impulsus analizė leidžia matyti, kaip įvairūs šokai "nuvilnija" per sistemą. *Prognozės paklaidų dispersijos išskaidymas* yra kitokio pobūdžio. Ši analizė leidžia nustatyti, kokią rezultatinio kintamojo dispersijos dalį paaiškina skirtingus kintamuosius veikiantys impulsai.

Iš pirmo žvilgsnio gali pasirodyti keista, kodėl tokios analizės, kuri skirta įvertinti skirtingų šokų svarbą formuojant konkretaus *kintamojo reikšmes*, vadinama *prognozės paklaidų dispersijos išskaidymu* (ar *prognozės paklaidų dispersine analize*). Tačiau primintina, kad čia nagrinėjama stacionarių kintamųjų VAR. Kaip matėme 2.8 poskyryje, stacionaraus atskiro kintamojo AR proceso prognozės paklaida asimptotiškai artėja prie to kintamojo dispersijos! Nesunku parodyti, kad tas pats galioja ir vektorinės autoregresijos prognozės paklaidai (pabandykite savarankiškai). Šia savybe ir pasinaudojama analizuojant šokų svarbą skirtingų kintamųjų reikšmių formavimui, kadangi prognozės paklaidų dispersijos analitinės išraiškos, kurios toliau pateikiamos, yra paprastesnės. Taigi kaip nustatyti, kiek svarbūs skirtingi impulsai formuojant kintamųjų reikšmes?

Tegu turima tokia VAR (čia paprastumo dėlei konstanta praleista, bet tai aptariamų rezultatų neįtakoja, užtenka (107) suvokti kaip VAR nuokrypių nuo vidurkio formoje)

(107) $A(L)y_t = v_t$, kur $E(v_t v_t')=\Sigma_v$, $A(L)=I - A_1L - A_2L^2 - \ldots - A_pL^p$.

Jei VAR stacionari, tai ji turi VMA išraišką

(108) $y_t = \Psi(L)v_t$, kur $\Psi(L) = A(L)^{-1}$.

Tada (108) galima perrašyti

(109) $y_t = \Psi(L)PP^{-1}v_t = \Theta(L)u_t$, $\Theta(L) = \Psi(L)P$, $u_t = P^{-1}v_t$,

kur P yra apatinė trikampė matrica iš *Cholesky dekomponavimo*, t.y. $\Sigma_v = PP'$.

Kaip nesunku matyti, $E(u_tu_t') = E[P^{-1}v_t\ v_t'(P^{-1})'] = P^{-1}\Sigma_v\ (P')^{-1} = I$, pastaroji transformacija užtikrina, kad vienalaikės liekanos yra nekoreliuotos, todėl jas galima laikyti struktūrinėmis, t.y. galima tiesiogiai priskirti kaip impulsus tam tikriems kintamiesiems. Tada (109) lygtyje nuo laiko momento T skleidžiant begalinės eilės polinomą $\Theta(L)$ gaunama

(110) $y_{T+h} = \Theta(L)u_{T+h} = \Theta_0u_{T+h}+\Theta_1u_{T+h-1}+\ldots+\Theta_{h-1}u_{T+1}+\Theta_hu_T+\ldots$,

(111) $\tilde{y}_{T+h} = E(y_{T+h}|y_T,y_{T-1},\ldots) = \Theta_hu_T+\Theta_{h+1}u_{T-1}+\ldots$,

ir atitinkamai prognozės paklaida

(112) $e_{T+h} = y_{T+h} - \tilde{y}_{T+h} = \Theta_0u_{T+h}+\Theta_1u_{T+h-1}+\ldots+\Theta_{h-1}u_{T+1}$.

Iš išskleistos (112) formos

$$\begin{bmatrix} \\ e_{j,T+h} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ \theta_{0,j1} & \cdots & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{1,T+h} \\ \vdots \\ u_{n,T+h} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} & & \\ \theta_{h-1,j1} & \cdots & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{1,T+1} \\ \vdots \\ u_{n,T+1} \end{bmatrix}$$

nesunku matyti, kad atskiro prognozės paklaidų vektoriaus e_{T+h} j-ojo komponento atitinkamas išskaidymas yra

(113) $e_{jT+h} = y_{jT+h} - \tilde{y}_{jT+h} = \Sigma_{i=1}^{n}(\theta_{0,ji}u_{iT+h}+\ldots+\theta_{h-1,ji}u_{iT+1})$.

Pasinaudojant u_i nekoreliuotumu ir neautokoreliuotumu nesunku matyti, kad e_{jT+h} dispersija, kuri h→∞ lygi kintamojo y_{jT+h} dispersijai, yra

(114) $Var(e_{jT+h}) = E(e_{jT+h}^2) = \Sigma_{i=1}^{n}(\theta_{0,ji}^2u_{iT+h}^2+\ldots+\theta_{h-1,ji}^2u_{iT+1}^2)$.

Tada tai, kokią procentinę dalį kintamojo y_{jT+h} dispersijos (o tiksliau, jo prognozės paklaidos dispersijos) paaiškina i-ojo kintamojo šokai, gaunama nagrinėjant santykį

(115) $FEVS_{ji}=(\theta_{0,ji}^2u_{iT+h}^2+\ldots+\theta_{h-1,ji}^2u_{iT+1}^2)/\,Var(e_{jT+h})$.

Nors prognozės paklaidų dispersijos išskaidymą galima pateikti grafiškai, tačiau kitaip nei reakcijos į impulsus analizėje, jos dažniau pateikiamos (informatyvesnės) skaitine išraiška (žr. 4 lentelę, kurioje pateiktas prognozės paklaidų išskaidymas anksčiau pavyzdyje nagrinėtam modeliui).

Prognozės paklaidos dispersijos išskaidymas **4 lentelė**

Variance Decomposition of Y1:	$[\mathrm{Var}(e_{1T+h})]^{1/2}$	$FEVS_{11}$	$FEVS_{12}$
Period	S.E.	Y1	Y2
1	1.341748	100.0000	0.000000
2	1.366697	99.72945	0.270551
3	1.367828	99.67490	0.325104
4	1.367895	99.66857	0.331428
5	1.367899	99.66799	0.332012
Variance Decomposition of Y2:	$[\mathrm{Var}(e_{2T+h})]^{1/2}$	$FEVS_{21}$	$FEVS_{22}$
Period	S.E.	Y1	Y2
1	1.031200	0.631011	99.36899
2	1.065923	0.679880	99.32012
3	1.068222	0.686183	99.31382
4	1.068375	0.686791	99.31321
5	1.068385	0.686842	99.31316
Cholesky Ordering: Y1 Y2			

Šiuo konkrečiu atveju matome, kad beveik visus šimtą procentų kiekvienam kintamajam lemia šokai jam pačiam, o ne kitiems VAR sistemos kintamiesiems.

Pagrindinis tokios analizės trūkumas, lygiai kaip ir *reakcijos į impulsus analizės*, yra išvadų jautrumas paklaidų ortogonalizavimo procedūrai – sukeitę kintamuosius y_{1t} ir y_{2t} vietomis gautume kitokį *Cholesky dekomponavimo* rezultatą (matricą P) ir, galbūt, išvadas apie impulsų svarbą.

A.C. Sims šią problemą siūlo spręsti sudarant visų galimų kintamųjų derinių kombinacijas atitinkančius VAR ir nagrinėjant išvadų jautrumą šiems pakeitimams. Tai nebūtų sunku esant tik keletui kintamųjų, tačiau jų skaičiui augant tokia procedūra greitai tampa beveik neįmanoma. Tačiau yra ir kitas kelias tokio kintamųjų išdėstymo nevienareikšmiškumui apeiti. Šis kelias remiasi ekonomikos teorijos nusakomais apribojimais VAR sistemai – tai struktūrinė vektorinė autoregresija (SVAR).

3.6 Struktūrinė vektorinė autoregresija

4 Nestacionarių laiko eilučių tiesiniai modeliai

Šio skyriaus uždaviniai:

1) apibūdinti nestacionarumo tipus ir palyginti pagrindines stacionarių bei nestacionarių kintamųjų savybes
2) susipažinti su baziniais vienalypių nestacionarių kintamųjų modeliais;
3) išmokti naudoti kelis kintamųjų integruotumo eilės tikrinimo testus;
4) supažindinti su pagrindiniais kointegruotumo tikrinimo atskirose lygtyse bei lygčių sistemose testais;
5) nusakyti integruotų (galimai kointegruotų) kintamųjų modeliavimo alternatyvas ir jų privalumus bei trūkumus.

4.1 Nestacionarumo tipai bei jų implikacijos praktiniam modeliavimui

Kaip matėme 2 skyriuje, ARMA modeliu galima aprašyti bet kokį silpnai stacionarų procesą: *Wold teoremos* dėka žinome, jog bet kokį *silpnai stacionarų* procesą galima išreikšti per begalinį tiesinį baltojo triukšmo filtrą, t.y. begalinio MA pavidalu; jei pastarasis yra apgręžiamas, tai procesą galima išreikšti AR pavidalu; bendriau – ARMA pavidalu. O kokios yra nestacionarių kintamųjų išraiškos alternatyvos?

Galima išskirti du pagrindinius nestacionarių kintamųjų tipus (toliau laikoma, kad komponentas u_t yra stacionarus, $u_t \sim I(0)$, ir jo matematinė viltis lygi nuliui, $E(u_t) = 0$):

1) nestacionarūs, bet *deterministinio trendo atžvilgiu stacionarūs procesai*, kurių pavidalas yra $X_t = \mu_t+u_t$, μ_t – deterministinė laiko funkcija, pavyzdžiui, $\mu_t = \alpha+\beta t$;
2) *nestacionarūs integruoti* (*stochastinį trendą turintys*) *procesai*, kurių pavidalas yra $(1-L)^d X_t=\mu+u_t$, pavyzdžiui, $X_t = \mu+x_{t-1}+u_t$.

Pastaruosius apjungus nesunkiai gaunami komplikuotesni nestacionarūs modeliai, turintys pavidalą $(1-L)^d X_t = \mu_t + u_t$, pavyzdžiui, $X_t = \mu+\beta t+X_{t-1}+u_t$. Tačiau kuo praktiniam modeliavimui aktualus būtent šių tipų išskyrimas? Atsakymas – visiškai keičiasi modeliavimo procedūros ir standartinių testų statistikų skirstiniai.

Komentaras [VK4]: , ar būtų modeliuojamas atskiras kintamasis, ar kelių jų sąryšiai

Jei atskiras kintamasis yra stacionarus deterministinio trendo atžvilgiu, tai tinkama jo modeliavimo procedūra – įtraukti į modelį atitinkamą deterministinį trendą, o liekanas aprašyti ARMA modeliu. Aukščiau pateikto pavyzdžio $X_t = \alpha+\beta t+u_t$ atveju, atėmus iš X_t atitinkamą trendą

$$X_t-\alpha-\beta t = u_t$$

gaunamas stacionarus kintamasis u_t, kurio modeliavimo procedūros jau žinomos.

Jei atskiras kintamasis būtų integruotas, atėmus trendą jis išliktų integruotu. Tą lengva matyti pasitelkus antrąjį pavydį $X_t = \mu+X_{t-1}+u_t$. Iki 0-inio laikotarpio rekursiškai išreiškiant X_t vėlavimus gaunama

$$X_t = \mu+X_{t-1}+u_t = \mu+\mu+X_{t-2}+u_{t-1}+u_t = x_0+\mu t+\tilde{X}_t, \text{ kur } \tilde{X}_t = \Sigma_{i=1}^{t} u_{t-i}.$$

Iš X_t atimant “tinkamą” trendą $x_0+\mu t$ būtų gautas kitas integruotas procesas $\tilde{X}_t$. Jei pats X_t neturėtų jokio trendo, t.y. konstanta $\mu=0$, tada bet kokio nenulinių koeficientų trendo atėmimas iš proceso X_t tiesiog duotų dar labiau komplikuotą mišrų procesą.

Kitaip nei trendo atžvilgiu stacionarus procesas, integruotas procesas stacionarizuojamas taikant skirtumines transformacijas. Pavyzdžiui, procesui $X_t = \mu+X_{t-1}+u_t$ pakanka vienos skirtuminės transformacijos (bendresniu d-eile integruoto proceso atveju skirtuminę transformaciją reikėtų taikyti d kartų), ir jis tampa stacionariu

$\Delta X_t = \mu + u_t$.

Tokį stacionarų kintamąjį galima modeliuoti kaip ARMA procesą.

Tada kyla klausimas, gal visada taikyti skirtuminę transformaciją, nesukant galvos apie nestacionarumo tipą? Jei skirtuminė transformacija būtų pritaikyta deterministinio trendo atžvilgiu stacionariam procesui, tai sukurtų neapgręžiamą MA dalį, komplikuojančią modeliavimą (ypač vektoriniuose procesuose). Tą vėlgi lengva matyti paėmus ankstesniojo deterministinio trendo atžvilgiu stacionaraus proceso $X_t = \alpha + \beta t + u_t$ skirtumą

$$\Delta X_t = \alpha + \beta t + u_t - \alpha - \beta(t-1) + u_{t-1} = \beta + u_t - u_{t-1}.$$

Dėmesio! Nestacionarus, tačiau deterministinio trendo atžvilgiu stacionarus procesas stacionarizuojamas atimant atitinkamą trendą; integruotas nestacionarus procesas stacionarizuojamas taikant skirtumines transformacijas. Netinkamai pritaikius metodą arba nestacionarumas nepašalinamas (iš integruoto proceso atėmus trendą), arba gaunama modeliavimo procedūras komplikuojanti neapgręžiama MA dalis (pritaikius skirtuminę transformaciją deterministinio trendo atžvilgiu stacionariam procesui).

Modeliuojant kelių kintamųjų tarpusavio ryšius vėlgi labai svarbu nustatyti, kokio pobūdžio yra nestacionarūs kintamieji. Jei nagrinėjamieji kintamieji yra nestacionarūs tik dėl deterministinio trendo, tada tiriant jų tarpusavio regresinį ryšį pakanka į modelį papildomai įtraukti trendo kintamąjį ir visos kitos procedūros bei statistikos lieka korektiškomis. Jei nagrinėjamieji kintamieji nestacionarūs dėl stochastinio trendo, tada tiriant jų tarpusavio ir naudojant standartines statistikas bei skirstinius gaunamas *klaidingas* ryšys. Tik kai integruoti kintamieji kointegruoja tokio klaidingo ryšio išvengiama.

Dėmesio! Tiriant, dėl deterministinio trendo nestacionarių kintamųjų regresinį ryšį korektiškos išvados gaunamos įtraukus trendą į regresijos funkciją. Jei taikant standartines statistikas ir skirstinius nagrinėjamas integruotų kintamųjų regresinis ryšys, tai tik integruotų kintamųjų kointegruotumo atveju išvengiama *klaidingos regresijos*.

Dėmesio! Kintamųjų pora, kurioje vienas kintamasis yra integruotas, o kitas – nestacionarus dėl trendo, kointegruoti negali.

Aukščiau aptarta, kaip nestacionarių kintamųjų prigimtis įtakoja modeliavimą. Gali atrodyti, kad atskiro kintamojo modeliavimui mažiausiai žalinga yra strategija, kai visi kintamieji yra transformuojami skirtuminiu būdu: atsiranda neapgręžiama MA dalis, bet tai tik kiek komplikuoja modeliavimą ir viskas!? Tačiau pagrindinis atskiro kintamojo laiko eilučių modelių tikslas yra gauti šių kintamųjų reikšmių prognozes. Kiek pagalvojus nesunku matyti, kad klaidingo trendo tipo parinkimas (*deterministinio* vietoje *stochastinio* ir atvirkščiai) iškreipia prognozes (parodykite, kaip neteisingas pasirinkimas kiekvienu atveju įtakoja prognozes).

4.2 Baziniai vienalypiai nestacionarių kintamųjų modeliai

Nestacionarių kintamųjų baziniais procesais (panašiai kaip stacionariems kintamiesiems yra AR ir MA) yra tiesinio trendo, atsitiktinio klaidžiojimo (RW, nuo angl. *Random Walk*) ir klaidžiojimo su poslinkiu (RWD, nuo angl. *Random Walk with Drift*) procesai. Toliau nusakysime pagrindines jų savybes.

4.2.1 Stochastinis tiesinio trendo procesas

Apibrėžimas. Procesas X_t, tenkinantis išraišką

(116) $X_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$,

vadinamas *stochastiniu tiesinio trendo procesu*. Čia $\alpha, \beta, \sigma_\varepsilon^2$ yra pastovūs parametrai.

Šio proceso nesąlyginius momentus toliau nusako pateikiamas teiginys.

Teiginys. *Stochastinio tiesinio trendo* momentai:

(117) $\mu_x = \alpha + \beta t$

(118) $\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2$

(119) $\gamma_k = \rho_k = 0, \ \forall k$

Dėmesio! *Stochastinis tiesinio trendo procesas* yra nestacionarus tik dėl pirmojo momento, – jo matematinė viltis priklauso nuo laiko. Kiti momentai nuo laiko nepriklauso.

Įrodymas.
Tegu turimas *stochastinis tiesinis trendas*:

(Matematinė viltis) imant (116) lygties nesąlyginę matematinę viltį gaunama

$\mu_X = E(X_t) = \alpha + \beta t,$

kur pasinaudota tuo, kad baltojo triukšmo matematinė viltis lygi nuliui, t.y. $E(\varepsilon_t)=0$.

(Dispersija):

$\gamma_0 = E(X_t - \mu_X)^2 = E\,[(\alpha+\beta t+\varepsilon_t - \alpha - \beta t)^2] = E\,(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2,$

kur pasinaudota $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$.

(Kovariacijos):

$\gamma_k = E[(X_t - \mu_X)(X_{t-k} - \mu_X)] = E(\varepsilon_t\, \varepsilon_{t-k}) = 0,\ k \neq 0,$

kur pasinaudota baltojo triukšmo neautokoreliuotumo savybe.
Kadangi $\forall\ k\neq 0\ \gamma_k = 0$, o $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$, tai ir $\rho_k = 0,\ k\neq 0.$

Kadangi *stochastinio tiesinio trendo* nestacionarumą sąlygoja tik pirmasis momentas, kuris nusakomas deterministine tiesinio trendo funkcija, tai akivaizdu, kodėl norint stacionarizuoti šį nestacionarų procesą pakanka iš jo pašalinti trendą.

4.2.2 Atsitiktinio klaidžiojimo procesas

Apibrėžimas. Procesas X_t, tenkinantis išraišką

(120) $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2),$

vadinamas *atsitiktinio klaidžiojimo procesu*. Čia vienintelis parametras σ_ε^2 yra pastovus.

Nesąlyginius *atsitiktinio klaidžiojimo proceso* momentus apibūdina toliau pateikiamas teiginys.

Teiginys. Jei pradinė proceso reikšmė nuliniu laiko momentu yra x_0, tai a*tsitiktinio klaidžiojimo proceso* momentai yra:

(121) $\mu_x = x_0$

(122) $\gamma_0 = t\sigma_\varepsilon^2$

(123) $\gamma_k = (t-k)\sigma_\varepsilon^2,$

o autokoreliacijos koeficientas

(124) $\rho_k = \sqrt{1 - k/t}\,.$

Dėmesio! *Atsitiktinio klaidžiojimo procesas* nestacionarus tik dėl antrųjų momentų, – jo dispersija ir kovariacijos priklauso nuo laiko.

Dėmesio! Esant $k << t$, koreliacijos koeficientas yra labai arti vieneto, o koreliacija, augant vėlavimui k, gęsta labai lėtai.

Įrodymas.
Tegu turimas *atsitiktinio klaidžiojimo procesas*, kaip nusakyta (120) lygtyje. Tada rekursiškai X_t gali būti išreikštas kaip

(125) $X_t = x_0 + \Sigma_{i=1}^{t} \varepsilon_{t-i}.$

(Matematinė viltis) imant (125) lygties nesąlyginę matematinę viltį gaunama

$\mu_X = E(X_t) = x_0$,

(Dispersija):

$\gamma_0 = E(X_t - \mu_X)^2 = E[(\Sigma_{i=1}^{t}\varepsilon_{t-i})^2] = t\sigma_\varepsilon^2$,

(Kovariacijos):

$\gamma_k = E[(X_t - \mu_X)(X_{t-k} - \mu_X)] = E[(\Sigma_{i=1}^{t}\varepsilon_{t-i})\ (\Sigma_{i=1}^{t-k}\varepsilon_{t-i})] = (t-k)\sigma_\varepsilon^2$,

kur visur pasinaudota baltojo triukšmo savybėmis.

Dabar nesunkiai galima matyti, kodėl atėmus trendą iš atsitiktinio klaidžiojimo proceso jo nestacionarumas nepašalinamas: nestacionarumą sąlygoja laike nepastovi dispersija, o ne matematinė viltis.

4.2.3 Atsitiktinio klaidžiojimo su poslinkiu procesas

Apibrėžimas. Procesas X_t, tenkinantis išraišką

(126) $X_t = c + X_{t-1} + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$,

vadinamas *atsitiktinio klaidžiojimo su poslinkiu procesu*. Čia parametrai c ir σ_ε^2 yra pastovūs dydžiai.

Nesąlyginius *atsitiktinio klaidžiojimo su poslinkiu proceso* momentus apibūdina toliau pateikiamas teiginys.

Teiginys. Jei pradinė proceso reikšmė nuliniu laiko momentu yra x_0, tai a*tsitiktinio klaidžiojimo su poslinkiu proceso* momentai yra :

(127) $\mu_x = x_0 + ct$

(128) $\gamma_0 = t\sigma_\varepsilon^2$

(129) $\gamma_k = (t-k)\sigma_\varepsilon^2$,

o autokoreliacijos koeficientas

(130) $\rho_k = \sqrt{1 - k/t}$.

Dėmesio! *Atsitiktinio klaidžiojimo su poslinkiu procesas* nestacionarus dėl pirmojo ir antrųjų momentų, – jo matematinė viltis, dispersija ir kovariacijos priklauso nuo laiko.

Dėmesio! Kaip ir *atsitiktinio klaidžiojimo procesui*, a*tsitiktinio klaidžiojimo su poslinkiu procesui* būdinga tai, kad esant $k<<t$ koreliacijos koeficientas yra labai arti vieneto, o koreliacija, augant vėlavimui k, gęsta labai lėtai.

Įrodymas.
Analogiškas *atsitiktinio klaidžiojimo procesui*, todėl paliekamas savarankiškam darbui.

Pateikti rezultatai parodo, kodėl iš *atsitiktinio klaidžiojimo su poslinkiu* proceso atėmus matematinę viltį jis nėra stacionarizuojamas: nors atėmus trendą pirmojo momento nestacionarumas panaikinamas, nestacionariais išlieka antrieji momentai.

4.3 Stacionarių ir nestacionarių kintamųjų kai kurių savybių palyginimas

Nustatytosios bazinių nestacionarių procesų savybės leidžia palyginti jas su stacionarių modelių savybėmis (žr. 5 lentelę).

Kai kurių savybių palyginimas **5 lentelė**

	Stacionarūs proc.	*Stac. trendo atžvilgiu*	*Integruoti*
Šokų pasireiškimo efektas (ε_t įtaka)	Nykstantis	Nykstantis trendo atžvilgiu	Liekamasis (kaupiamasis: kiekvienas naujas šokas prisideda prie X_t)
Autokoreliacijų elgesys	Labai greitai artėja prie nulio	Labai greitai artėja prie nulio	Labai lėtai artėja prie nulio (kai lagas k << T, tai $\rho_k \to 1$)
Nesąlyginė dispersija	Baigtinė	Baigtinė trendo atžvilgiu	Neapribota

Laukiamas laikas kisti nesąlyginę matematinę viltį	Baigtinis	Baigtinis	Neribotas

Ekonominio kintamųjų elgesio požiūriu bene įdomiausia yra pirmoji – šokų pasireiškimo efekto pobūdžio – savybė. Stacionariuose procesuose per paklaidas pasireiškiantys nauji impulsai laikui bėgant vis mažiau ir mažiau įtakoja esamą kintamojo reikšmę, – kintamojo reikšmes formuojantys šokai proceso "atmintyje" nyksta ir galiausiai neišlieka; atitinkamai proceso reikšmės po pirminio nuokrypio nuo matematinės vilties, kuris atsirado dėl tam tikro impulso, laikui bėgant grįžta link matematinės vilties reikšmės. Deterministinio trendo atžvilgiu stacionariuose procesuose viskas vyksta visiškai analogiškai, tik dėl to, kad proceso matematinė viltis yra tam tikras trendas, proceso reikšmės yra linkusios grįžti prie to trendo nusakomų reikšmių. Integruotuose procesuose yra kitaip. Kadangi kintamojo reikšmės yra tiesiog šokų suma, tai kiekvienas impulsas turi liekamąjį poveikį, – integruotas kintamasis kaupia ir "nepamiršta" šokų poveikio.

Greta toliau aptariamų integruotumo tikrinimo statistinių testų ši stacionarių, nestacionarių dėl trendo ir integruotų kintamųjų savybė ypač praverčia galvojant apie ekonominio kintamojo nestacionarumo tipą, t.y. grindžiant vieną ar kitą tipo pasirinkimą bendrais samprotavimais. Jei galima manyti, kad impulsai, įtakojantys tam tikrus ekonominius rodiklius, kaupiasi, tada tai turėtų būti integruotas procesas (pagalvokite, ar pagrįsta būtų rodiklį *technologijos lygis* laikyti tokį kriterijų tenkinančio rodiklio pavyzdžiu?). Jei mažai tikėtina, kad impulsų efektas turi kaupiamąjį pobūdį, tada tai greičiau bus stacionarus ar trendo atžvilgiu stacionarus procesas.

Dėmesio! Nepamirškite, kad ekonometrika, lygiai kaip ir įvairūs čia aptariami statistiniai testai, yra grįsti tikimybe. Jei rezultatai prieštarauja akivaizdžiai logikai, dar kartą pagalvokite, ar galite jais tikėti? Gal ką nors padarėte ne taip, gal ką nors reikėtų pakeisti?

4.4 Integruotumo eilės tikrinimo testai ir procedūros

Konkretus nestacionarumo tipas lemia korektišką modeliavimo pobūdį bei rezultatų patikimumą, todėl kyla natūralus poreikis nustatyti, ar kintamasis yra integruotas ir, jei taip, kokia eile jis yra integruotas? Žemiau aptariami trys plačiai praktikoje taikomi testai ir susijusios procedūros. Pirmasis yra *Dickey–Fuller* (DF) *testas*, skirtas nustatyti RW ar RWD savybes tenkinančio kintamojo integruotumo eilę. Kai DF regresijos liekanos nėra *baltasis triukšmas* dėl nagrinėjamo proceso paklaidų autokoreliuotumo, tai DF regresijos parametrų įverčiai, naudojami skaičiuojant DF testo statistiką, yra ne tik neefektyvūs, bet ir nesuderinti (dėl autoregresinio testo lygties pobūdžio). Šiai problemai spręsti skirtas ADF testas – išplėstas DF testas (angl. *Augmented Dickey Fuller*). Tačiau ir šiam testui konstruoti skirtos regresijos įverčiai yra neefektyvūs, kai tiriamo potencialiai integruoto kintamojo paklaidos yra heteroskedastiškos. Šiuo atveju taikytina *Phillips-Perron* (PP) testo statistika, pagrįsta neparametrine įprastinės DF testo statistikos korekcija.

4.4.1 Integruotumo eilės tikrinimas *Dickey–Fuller* (DF) testu

DF idėja, kaip patikrinti kintamojo integruotumo eilę, yra labai paprasta. Jei kintamasis yra integruotas, tai jis turi bent vieną charakteringojo polinomo vienetinę šaknį. Atitinkamai DF ir siūlo patikrinti, ar kintamasis turi vienetinę šaknį regresijoje

(131) $x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t$,

kur x_t yra kintamojo x stebėjimai laiko momentais $t=1,\dots,T$; ε_t laikoma *baltojo triukšmo* savybes tenkinanti regresijos paklaida; ρ – aktualusis parametras: jei $\rho=1$, tai x_t turi vienetinę šaknį, jei $|\rho|<1$, – neturi (kai $|\rho|>1$ procesas diverguoja). Patogumo dėlei (131) dažnai perrašoma į pavidalą

(132) $\Delta x_t = \delta x_{t-1} + \varepsilon_t, \delta = \rho\text{-}1,$

kuriame prie nulinės hipotezės (kintamasis yra integruotas bent pirma eile) aktualaus vertinti parametro reikšmė yra lygi nuliui. Tada hipotezės (nulinė ir jos vienpusė alternatyva) supaprastėja į

(133) $H_0\text{: } \delta = 0 \qquad H_1\text{: } \delta<0.$

Jei nulinės hipotezės atmesti negalima, tai, iš $\delta=\rho\text{-}1$, implikuoja $\rho=1$, todėl tiriamas kintamasis laikomas integruotu.

(133) pateikta nulinė hipotezė tikrinama įvertinus (132) lygtį MKM ir naudojant įprastą t statistiką parametro δ. reikšmingumui patikrinti. Tačiau šios statistikos skirstinys prie nulinės hipotezės nėra *Student'o t skirstinys*, tai vadinamasis *Dickey-Fuller skirstinys*, kuris yra asimetrinis. Tikimybė, kad pagal įvertintą (132) lygtį apskaičiuotoji t_θ statistika bus mažesnė už kritines *Student'o skirstinio* reikšmes yra žymiai didesnė, nei taikomas nominalus reikšmingumo lygmuo; o tai reiškia, kad taikant įprastinį *Student'o skirstinį* vietoje (korektiško) *Dickey-Fuller skirstinio*, nulinė hipotezė apie kintamojo integruotumą būtų per dažnai atmetama, t.y. kintamąjį per dažnai laikytume stacionariu.

Dėmesio! Jei kintamasis yra integruotas, DF regresijoje taikant *Student'o* skirstinį vietoje korektiško *Dickey-Fuller* skirstinio kintamąjį per dažnai laikytume stacionariu.

Kaip *Studento* taip ir *Dickey-Fuller skirstinio* kritinės reikšmės be paties reikšmingumo lygmens dar priklauso nuo stebėjimų skaičiaus. Pavyzdžiui, esant 50 stebėjimų, *5%* nominalaus reikšmingumo lygmens atitinkamos lentelinės kritinės reikšmės yra $t_\alpha(50) = $-1.68 ir $\tau_\alpha(50) = $-1.95 ($\tau$ raidė dažnai naudojama būtent DF skirstinio kritinėms reikšmėms pažymėti). Jei, esant stebėjimų skaičiui T, $t_\delta<\tau_\alpha(T)$, tai nulinė hipotezė apie kintamojo integruotumą yra atmetama. Priešingu atveju laikoma, kad kintamasis x_t yra integruotas bent pirma eile.

Komentaras [VK5]: Vaizdumo dėlei toliau pateikti pagal 1000 stebėjimų sugeneruotos *Studento* ir *Dickey-Fuller skirstinių* kritinės reikšmės prie nulinės hipotezės.

Pavyzdys. Kintamajam x_t tikrinama (133) apibrėžta nulinė hipotezė prieš atitinkamą alternatyvą. Pagal 50 stebėjimų duomenis įvertintus (132) lygtį MKM gauti tokie rezultatai

$\Delta x_t = \underset{(0.14)}{-\ 0.26}\, x_{t-1} + \hat{\varepsilon}_t$, kur skliaustuose po koeficientu pateikta įverčio standartinė paklaida.

Kaip matyti, $t_\theta = \hat{\delta}/s.e.(\hat{\delta}) \approx -1.86$. Kadangi $t_\delta > \tau_{0.05}(50)=-1.95$, tai nulinės hipotezės, kad x_t turi vienetinę šaknį ir yra integruotas atmesti negalima. Jei (klaidingai) būtų pritaikyta standartinis *Studento t* skirstinys, tai to paties reikšmingumo lygmenyje būtų padaryta nekorektiška išvada, jog kintamasis nėra integruotas.

Apibūdinant integruotumo tikrinimo DF procedūrą aukščiau buvo laikoma, kad kintamąjį x_t galima išreikšti (131) lygtimi (nesvarbu, kokia būtų ρ). Tačiau tai yra labai atskiras 4 skyriaus pradžioje aptarto bendresnio (potencialiai integruoto) modelio $x_t = \mu+\beta t+\rho x_{t-1}+u_t$ atvejis, kai $c=\beta=0$ ir $u_t=\varepsilon_t$, t.y. *baltasis triukšmas*, o ne bendresnis $I(0)$ procesas. Iš anksto žinoti, kuri bendros išraiškos forma yra teisinga žinoti negalima (ekonomikos teorija labai retai (jei iš viso) gali ką nors pasufleruoti šiuo klausimu). Dėl šios priežasties (paklaidas ir toliau laikant *baltuoju triukšmu* – šios prielaidos atsisakoma vėlesniuose skirsniuose) išskiriami trys skirtingi DF testo taikymo variantai:

a) kai $x_t = \rho x_{t-1}+u_t$,

b) kai $x_t = c+\rho x_{t-1}+u_t$,

c) kai $x_t = c+\beta t+\rho x_{t-1}+u_t$.

Kiekvienu atveju hipotezė apie integruotumą formuluojama kaip ir (133). Tikrinimo principas taip pat išlieka analogiškas, tik, (132) lygtis gaunama iš atitinkamo varianto, t.y. a), b) ar c), pradinės lygties. Svarbiausias skirtumas yra tai, kad DF skirstinys ir, atitinkamai, susijusios kritinės reikšmės skiriasi kiekvienam iš šių atvejų (žr. G.S. Maddala ir In-Moo Kim, 1998, p.64). Kad būtų aišku, koks variantas turimas galvoje, prie kritinių reikšmių dažnai rašomas atitinkamas indeksas, t.y. τ_a, τ_b, ir τ_c (kartais jos dar atitinkamai žymimos τ_0, τ_μ, ir τ_τ).

Dėmesio! Skirtingų DF testo lygčių variantų t_θ statistikų skirstiniai skiriasi, todėl naudotinos atitinkamos kritinės reikšmės.

Kadangi c) variantas yra bendriausias, praktikoje patartina pradėti būtent nuo jo. Įvertinus c) tipo regresiją, reikėtų standartiškai patikrinti parametro β statistinį reikšmingumą naudojant t statistiką pagal *Stjudento* skirstinį. Jei pastarasis parametras reikšmingas, tai taikyti kitą formą nekorektiška. Jei β nereikšmingas, tikslinga įvertinti b) formą ir, vėlgi standartiškai, patikrinti, ar konstanta statistiškai nereikšminga. Jei ir pastaroji aiškiai nereikšminga, integruotumo tikrinimui taikytina a) varianto lygtis. Čia išdėstyta procedūra yra supaprastintas Dolado, Jenkinson, Sosvilla ir Rivero (1990) procedūros variantas.

4.4.2 Integruotumo eilės tikrinimas išplėstu *Dickey–Fuller* (ADF) testu

Kai atsisakoma prielaidos apie *baltojo triukšmo* savybes tenkinančias paklaidas (131) bei, atitinkamai, (132) lygtyse, aukščiau pateiktos DF testo regresijos nebetinka. Kai *baltojo triukšmo* prielaida pažeidžiama dėl paklaidų autokoreliuotumo, taikytinas išplėstas DF testas – ADF testas.

Dėmesio! Jei nepaisant autokoreliuotų paklaidų būtų taikoma paprasta DF testo lygtis, tai išvados būtų klaidingos, kadangi parametrų įverčiai dėl autoregresinio DF testui konstruoti naudojamos regresijos pobūdžio nebūtų netgi suderinti.

Siekiant išvengti neigiamų pasekmių, paklaidų autokoreliuotumą iš standartinės DF lygties siekiama pašalinti taikant tam tikrą parametrinę korekciją – išplečiant paprastą DF lygtį kintamojo pokyčių autoregresiniais nariais. Vietoje (132) lygties atitinkamai būtų taikoma tokia išplėsta DF regresija

(134) $\Delta x_t = \delta x_{t-1} + \Sigma_{j=1}^{k} \gamma_j \Delta x_{t-j} + \varepsilon_t$,

kur k dažniausiai parenkamas pagal kokį nors *informacinį kriterijų*, pavyzdžiui Schwarz (SC). Visos kitos procedūros išvadai apie integruotumą gauti lieka visiškai analogiškos anksčiau aptartosioms (taip pat ir trys galimos lygčių išraiškos).

Kaip parodo Said ir Dickey (1984), nepaisant to, kad ši parametrinė korekcija įtraukia tik autoregresinius narius, net kai (134) liekanos turi ir MA dalį, šis testas išlieka suderintu.

4.4.3 Integruotumo eilės tikrinimas *Phillips–Perron* (PP) testu

ADF testas naudotinas, kai paklaidos autokoreliuotos, tačiau homoskedastiškos. Jei paklaidos dar yra heteroskedastiškos, tada ADF pagrindu gaunamos išvados bus neefektyviomis. Abiem šiems pažeidimams nejautraus testo statistiką pasiūlė *Phillips ir Perron* (PP). Kitaip nei ADF, PP koreguoja ne DF regresiją, o taiko neparametrinę korekciją pačiam pagal (131) lygtį gautam parametro ρ įverčiui (yra ir alternatyvi PP testo statistika, kuri koreguoja ne įvertį, o pagal jį paskaičiuotą t statistiką, plačiau žr. Banerjee ir kt., 1990, ar Maddala ir Kim, 1999)

(135) $Z(\hat{\rho}) = T(\hat{\rho}-1)-1/2(S_{Tl}^2- S_u^2)[T^{-2}\Sigma_{t=2}^{T}(x_{t-1} - \bar{x}_{-1})]$,

kur

$\bar{x}_{-1} = (T-1)^{-1}\,\Sigma_{t=1}^{T-1}x_t$ – matematinės vilties įvertis nenaudojant paskutiniojo stebėjimo;

$S_u^2 = T^{1}\,\Sigma_{t=1}^{T}\,\hat{\varepsilon}_t^2$ – paklaidų dispersijos įvertis;

$S_{Tl}^2 = T^{1}\,\Sigma_{t=1}^{T}\,\hat{\varepsilon}_t^2 + 2\,T^{1}\,\Sigma_{j=1}^{k}\omega_j\,\Sigma_{t=j+1}^{T}\,\hat{\varepsilon}_t\,\hat{\varepsilon}_{t-j}$ – Newey-West modifikuotas ilgalaikės paklaidų dispersijos įvertis, kur $\omega_j = [1-j(l+1)^{-1}]$, o atkirtos parametras (dažnai) $l= int[4(T/100)^{2/9}]$.

Jei paklaidos ε_t yra baltasis triukšmas, tada paklaidų dispersija ir ilgalaikė paklaidų dispersija sutaps, todėl $S_u^2 - S_{Tl}^2$ bus artimas nuliui ir korekcijos narys (135) lygtyje (dešinės pusės antrasis narys) įtakos neturės. Jei paklaidos bus autokoreliuotos ar heteroskedastiškos – pradės veikti neparametrinė korekcija.

Nors PP pasiūlyta korekcija leidžia apsidrausti ir nuo autokoreliuotų, ir nuo heteroskedastiškų paklaidų, tačiau, kad neparametrinė korekcija būtų veiksminga, reikia žymiai daugiau stebėjimų nei esant parametriniams pataisymams. Be to, šis testas duoda prastus rezultatus, kai testo regresijos paklaida turi MA dalį su neigiama parametro reikšme.

Dėmesio! Nėra vieno geriausio testo. Tiriant turimus duomenis reikia bandyti nustatyti jų savybes, o pagal jas jau parinkti adekvatų testą.

Pavyzdys. ???

4.4.4 *d>1* integruotumo eilės tikrinimas

Ekonominiai kintamieji (ypač srautų rodikliai, pavyzdžiui, BVP, investicijos, eksportas ir pan.) retai kada būna integruoti aukštesne nei pirma eile. Jei srautų rodikliai yra integruoti pirma eile, tada atsargų rodikliai (kapitalo kiekis, prekių atsargos, tiesioginės užsienio investicijos ir pan.), kurie pagal apibrėžimą yra srautų rodiklių suma, gali būti integruoti antra eile. Empiriniais tyrimais neretai nustatoma, kad ir įvairūs kaininiai rodikliai ar jų logaritmai integruoti antra eile.

Jei aukščiau aprašytasis tyrimas rodo, kad kintamasis yra integruotas ir turi bent vieną vienetinę šaknį, hipotezė apie tai, kad kintamasis turi antrą vienetinę šaknį yra tikrinama visiškai analogiškas, tik (133) hipotezė tikrinama ne kintamojo lygių (x_t), o jo pirmų skirtumų sudarytos regresijos pagrindu. Pavyzdžiui, hipotezei apie antrą vienetinę šaknį patikrinti vietoje (132) DF lygties būtų naudojama tokia

(136) $\Delta^2 x_t = \delta\Delta\, x_{t-1} + \varepsilon_t$.

Jei nebūtų atmesta hipotezė ir apie antrąją vienetinę šaknį, reikėtų tikrinti toliau. Bendrai, nulinė hipotezė apie tai, kad kintamasis x_t yra integruotas bent d eile, prieš alternatyvą, kad $x_t{\sim}I(d-1)$, būtų tikrinama remiantis regresijos išraiška:

(137) $\Delta^d x_t = \delta\Delta^{d-1}x_{t-1} + \varepsilon_t$.

4.4.5 Integruotumo tikrinimo procedūros apibendrinimas

Apibendrinant 4.4 poskyryje išdėstytą medžiagą apie integruotumo tikrinimą būtų siūlytina tokia integruotumo eilės tikrinimo schema (ypač turint nedaug stebėjimų).

Pirmiausia apmąstyti, ar ekonomikos teorija ką nors nusako apie galimą kintamojo integruotumo eilę bei konkretesnį pavidalą, t.y. su konstanta, su konstanta ir trendu, ar tik autoregresinis narys?

Statistinis tikrinimas pradedamas nuo nulinės hipotezės, kad kintamasis turi vieną vienetinę šaknį ($d=1$), tam įvertinant ADF testo regresiją

(138) $\Delta^d x_t = c+\beta t+\delta\Delta^{d-1}x_{t-1}+\Sigma_{j=1}^{k}\gamma_j\Delta^d x_{t-j}+u_t,$

kur k parenkamas pagal SC ar kitą informacijos kriterijų. Remiantis ekonominiais samprotavimais bei paeiliui patikrinant statistinį β ir c reikšmingumą, parinkti tinkamą testo formą, t.y. išspręsti konstantos ir/ar trendo įtraukimo problemą.

Parinkus geriausią ADF formą patikrinti, ar (138) lygties paklaidos yra homoskedastiškos. Jei hipotezės atmesti negalima, išvados toliau daromos remiantis ADF regresija, jei ne – pereinama prie PP korekcijos.

Pasirinkus geriausią testą, pagal atitinkamas kritines reikšmes patikrinti nulinę hipotezę H_0: $\delta = 0$ prieš alternatyvą H_1: $\delta < 0$. Jei nulinė hipotezė neatmetama laikoma, kad kintamasis yra integruotas bent pirma eile. Jei atmetama, procedūra sustoja – kintamasis laikoma integruotu pirma eile $x_t \sim I(1)$.

Jei pirmame žingsnyje nulinė hipotezė neatmetama, tada procedūra tęsiama su $d=2,\ldots$, kol nulinė hipotezė atmetama. Atmetus nulinę hipotezę laikoma, kad kintamasis $x_t \sim I(d-1)$. Nors tokia situacija mažai tikėtina, bet prieš pereinant prie $d=3$ ir pan. reikėtų gerai pagalvoti.

Nuo ADF, o ne nuo kitų alternatyvų tikslinga pradėti nes: a) jei paklaidos yra neautokoreliuotos, informacijos kritetijai turėtų parinkti $k=0$, t.y. gautume paprastą DF regresiją; b) parinkus geriausią ADF regresiją, galima patikrinti statistinę hipotezę apie paklaidų homoskedastiškumą; jei pastaroji neatmetama, pasiliekama prie ADF regresijos, žinant, jog taip išvengiama galimų problemų dėl neparametrinei korekcijai būtino didelio stebėjimų skaičiaus; tą patį ADF variantą tikslinga pasirinkti ir tuo atveju, kai ADF regresijos liekanos turi neigaimų parametrų MA dalį, pavyzdžiui, (138) lygtyje liekana u_t turėtų pavidalą $u_t=\varepsilon_t-\theta\varepsilon_{t-1}$.

Nors pats integruotumo tikrinimas yra gana gerai apibrėžtas ir labai išplėtotas (žr. gausybę alternatyvių testų, pateiktų apžvalginėje Maddala ir Kim, 1999, knygoje), tačiau daugeliui ekonominių kintamųjų būdingas labai didelis autokoreliuotumas. Kai autokoreliacijos koeficientas ρ yra vos mažesnis už vienetą, atskirti, ar kintamasis yra integruotas ar ne, darosi labai keblu, – tokiu atveju visų vienetinės šaknies testų galia baigtinėse imtyse yra nedidelė. Tai dar kartą parodo, kaip be statistinių procedūrų svarbu taikyti ir ekonomines žinias parenkant modeliuojamų kintamųjų integruotumo eilę.

4.5 Kintamųjų kointegruotumo tikrinimas

Ekonominėje analizėje labai dažnai susiduriama su nestacionariomis *integruotomis* laiko eilutėmis, kurių tarpusavio ryšių tyrimas taikant regresinę analizę gali sąlygoti *klaidingas išvadas*: jei integruoti kintamieji nėra kointegruoti, standartinės testų statistikos (t ir F) diverguoja, determinacijos koeficiento reikšmė yra artima vienetui, ir atrodo, kad tarp kintamųjų yra statistiškai reikšmingas ryšys net tada, kai jie yra visiškai tarpusavyje nepriklausomi. Tokius rezultatus duodanti regresija, kaip apibrėžėme 1 skyriuje, yra vadinamas *klaidinga regresija*. Dėl šios priežasties kointegruotumo tyrimas užima centrinę vietą integruotų laiko eilučių analizėje.

Tegu y_t žymi n dimensijos vektorinį stochastinį procesą, integruotą pirma eile (y_t~$I(1)$). Jei egzistuoja tiesinė šio proceso transformacija $\beta' y_t$, kuri yra stacionari ($\beta' y_t$~$I(0)$), tada kintamieji vadinami kointegruotais. Bendresniu y_t~$I(d)$, $d>0$, atveju, kintamieji yra kointegruoti tada, kai $\beta' y_t$~$I(d-b)$, $b>0$. Čia β, kuris vadinamas kointegravimo parametrų vektoriumi, yra n dimensijos koeficientų vektorius $\beta=(\beta_1,...,\beta_n)'$. Užrašant kointegruotumo savybę per atskirus vektoriaus y_t komponentus $y_{1t}, y_{2t},\ldots, y_{nt}$, $\beta' y_t = \beta_1 y_{1t}+\beta_2 y_{2t}+\ldots+\beta_n y_{nt}$.

Dėmesio! Kointegravimo vektorius nėra vienintelis: padauginus jį iš bet kokio nenulinio skaičiaus būtų gautas naujas kointegravimo vektorius.

Jei vektorių y_t sudaro daugiau nei du kintamieji, kointegruotų y_t derinių gali būti daugiau nei vienas.

Dėmesio! Kai $n>2$, gali būti $1<r<n$ kointegravimo derinių.

Kointegruotumą tikrinti galima nagrinėjant vieno kintamojo požiūriu normalizuotą kointegravimo vektorių (pavyzdžiui, pimojo kintamojo atžvilgiu normalizuotą kointegravimo derinį $y_{1t}+\theta_2 y_{2t}+\ldots+\theta_n y_{nt}$, kur $\forall i>1$ $\theta_i=\beta_i/\beta_1$) atskiroje lygtyje, ar visoje kintamųjų vektoriaus y_t lygčių sistemoje. Toliau apibūdinamos praktikoje plačiai kointegruotumo tikrinimui naudojamos procedūros: viena, skirta kointegruotumą tikrinti atskiroje lygtyje (*Engle-Granger dviejų žingsnių procedūra*), kita – lygčių sistemoje (*Johansen procedūra*). Maddala ir Kim (1999) apžvalgoje galima pasiskaityti apie kitas kointegruotumo tikrinimo alternatyvas (kaip integruotumo, taip ir kointegruotumo testų yra daug).

Kadangi ekonomikoje integruotumas pirma eile yra būdingiausia, tolesniame nagrinėjime dažniausiai laikoma, kad kintamieji yra integruoti ne aukštesne kaip pirma eile (apie antra eile integruotų kintamųjų kointegruotumo analizės ypatumus žr., pavyzdžiui, Johansen, 1995).

Komentaras [VK6]: Nuoroda į straipsnį

4.5.1 Kointegruotumo tikrinimas atskiroje lygtyje

Kadangi pirma eile integruotų kintamųjų kointegruotumas reiškia tai, kad jų tiesinė kombinacija yra stacionari, tai natūralus kelias patikrinti, ar kointegruotumo savybė galioja, yra: a) apskaičiuoti tiesinę kintamųjų kombinaciją ir b) patikrinti jos stacionarumą. Tokį būdą Engle-Granger (1987) ir siūlo, atkreipdami dėmesį, jog procedūra kiek skiriasi priklausomai nuo to, ar kointegravimo parametrai yra žinomi (pavyzdžiui, juos gali nusakyti ekonominė teorija ar ankstesnės studijos), ar juos reikia įvertinti.

Bet kuriuo atveju pradinis kointegruotumo tikrinimo etapas yra įsitikinti, kad bent du iš tiriamųjų kintamųjų yra integruoti maksimalia ($d\geq 1$) eile – jei yra tik vienas maksimalią integruotumo eilę turintis kintamasis ar visi nagrinėjami kintamieji yra stacionarūs, tai tolesnis kointegruotumo tikrinimas neturi prasmės: pirmu atveju kintamieji negali būti kointegruoti, antru – kintamieji (jei jų skaičius baigtinis, t.y. $n<\infty$) bus kointegruoti paėmus bet kokį kointegravimo vektorių.

4.5.1.1 Engle-Granger procedūra, kai kointegravimo parametrų vektorius žinomas

Įsitikinus, kad tarp tiriamų kintamųjų yra reikiamą integruotumo eilę tenkinančių arba visi kintamieji tenkina vienodos integruotumo eilės reikalavimą (toliau laikoma, kad maksimali nagrinėjamų kintamųjų integuotumo eilė yra $d>0$), pirmame Engle-Granger procedūros žingsnyje naudojant žinomus kointegravimo vektoriaus $(\beta_1,...,\beta_n)'$ parametrus yra apskaičiuojama liekana

(139) $u_t = \beta_1 y_{1t}+\beta_2 y_{2t}+\ldots+\beta_n y_{nt}$,

o antrame žingsnyje, taikant standartinius ankstesniame 4.4 poskyryje aptartus integruotumo tikrinimo testus, analizuojama, kuria eilė integruota liekana u_t. Jei u_t integruota žemesne nei d eile, t.y. $u_t \sim I(d-b)$, $b>0$, tai kintamieji laikomi kointegruotais.

Kai $d=1$, tai kintamieji yra kointegruoti, jei liekana (139) yra stacionari, t.y. $u_t \sim I(0)$.

4.5.1.2 Engle-Granger procedūra, kai kointegravimo parametrų vektorius įvertinamas

Nors ekonomikos teorija kartais nusako potencialius kointegravimo vektorius (dažniausiai sutinkamas kointegravimo vektorius yra (1,-1), pavyzdžiui, pagalvokite apie perkamosios galios paritetą, ilgalaikį vartojimo išlaidų ir pajamų ryšius ir pan.), tačiau dažniausiai kointegravimo parametrų vektorius nėra žinomas – jį tenka įvertinti. Regresinės analizės požiūriu būtent šis atvejis ir yra aktualiausias bei sietinas su *klaidingos regresijos* problema.

Engle-Granger procedūros pirmas žingsnis šiuo atveju yra MKM įvertinti vieno kintamojo atžvilgiu normalizuotą regresiją

(140) $y_{1t} = \theta_2 y_{2t} + \ldots + \theta_n y_{nt}, + u_t.$

Atkreiptinas dėmesys į tai, kad (140) regresija yra tik atskiras atvejis bendresnio kointegravimo ryšio, kuris apimtų ir konstantą bei deterministinį trendą (pavyzdžiui dėl to, kad kuris nors iš kintamųjų yra RWD, o kiti – RW). Dažniausiai (140) lygtis išplečiama tiesiniu trendu, pirmame žingsnyje vertinant tokią regresiją

(141) $y_{1t} = c + \theta_0 t + \theta_2 y_{2t} + \ldots + \theta_n y_{nt} + u_t.$

Įvertintus potencialaus kointegravimo ryšio parametrus, antrame žingsyje tikrinama liekanų integruotumo eilė. Jei kintamieji integruoti pirma eile ($y_t \sim I(1)$), tai liekanų integruotumas ($u_t \sim I(1)$) rodo, jog kintamieji nekointegruoti. Jei liekanos stacionarios ($u_t \sim I(0)$), tai kintamieji kointegruoja.

Dėmesio! Jei integruotų kintamųjų regresijos liekana yra stacionari, tai kintamieji yra kointegruoti.

Liekanų stacionarumas apie kintamųjų kointegruotumą liudija ir tada, kai kintamieji yra integruoti aukštesne nei pirma eile ($y_t \sim I(d)$, $d>1$), pavyzdžiui antra. Tačiau liekanų nestacionarumas šiuo atveju nieko nesako apie kointegravimo savybe: liekanos gali būti integruotos žemesne nei d eile ($u_t \sim I(d-b)$, $b>0$), tačiau apie tai spręsti nieko negalima, kadangi (141) regresijos liekanai esant integruotai bet kuria nenuline eile ($u_t \sim I(h)$, $h \neq 0$), susiduriama su *klaidingos regresijos* fenomenu.

Norint patikrinti, ar, pavyzdžiui, antra eile integruoti kintamieji kointegruoja į pirma eile integruotą liekaną, reikėtų papildomai įvertinti skirtuminiu būdu transformuotų kintamųjų regresiją

(142) $\Delta y_{1t} = \theta_0 + \theta_2 \Delta y_{2t} + \ldots + \theta_n \Delta y_{nt} + v_t,$

ir tirti jos liekanų integruotumą (pastebėtina, kad ši regresija paprastai jau nagrinėjama be trendo komponento). Jei $v_t \sim I(0)$, tai darytina išvada, kad y_t yra kointegruoti, bet kointegruoja ne į stacionarią liekaną, o į $I(1)$ liekaną, t.y. viena eile žemesnę, nei yra integruoti patys kintamieji.

Įvertintos liekanos stacionarumo analizei (panašiai kaip ir kointegruotumo tikrinimo atveju, kai kointegravimo parametrai žinomi) galima pasitelkti 4.4 poskyryje aptartus DF, ADF ir pan. testus. Tačiau kitaip nei tikrinant kointegruotumą pagal žinomus parametrus, šių testų statistikų skirstiniai (atitinkamai ir kritinės reikšmės) nėra tokios pat kaip standartinių integruotumui tikrinti taikomų testų, todėl reikia naudoti specialiai kointegruotumui tikrinti skirtus skirstinius bei atitinkamas kritines reikšmes (žr., Banerjee ir kt., 1993, ar Maddala ir Kim, 1999).

Dėmesio! Kai kointegravimo parametrai yra įvertinami, liekanų integruotumo hipotezėms tikrinti naudojami specialūs, o ne standartiniai DF, ADF, PP ir pan. statistikų skirstiniai.

4.5.2 Kointegruotumo tikrinimas lygčių sistemoje

4.5.2.1 Kointegruotumo apribojimai lygčių sistemai

Tegu turime kointegruotų nestacionarių pirma eile integruotų kintamųjų vektorių $y_t \sim I(1)$. *Granger kointegruotų kintamųjų reprezentacijos teorema* tada teigia, kad pastarieji turi lygių VAR bei VECM išraiškas. Tegu y_t turi VAR(p) išraišką

(143) $y_t = A_1 y_{t-1} + \ldots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t$,

kur $\forall i\ A_i$ yra $n \times n$ dimensijos matricos, o $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \Sigma_\varepsilon)$, kur Σ_ε žymi paklaidų vektoriaus vienalaikių kovariacijų matricą.

VAR lygtį (143) nesunku pertvarkyti į vektorinio paklaidų korekcijos modelio (VECM, angl. – *Vector Error Correction Model*) pavidalą

(144) $\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \Sigma_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t,\ \Pi = \alpha\beta' = \Sigma_{i=1}^{p} A_i - I,\ \Gamma_i = -\Sigma_{j=i+1}^{p} A_i$.

Dėmesio! Kointegruoto y_t atveju matricos Π rangas ($rank(\Pi)=r$) yra nelygus nuliui, tačiau būtinai redukuotas, t.y. $0<r<n$.

Jei $r=0$, tai y_t nėra kointegruoti ir dėl išsigimusio Π (144) lygtis redukuojasi į pirmų skirtumų VAR. Jei $r=n$, tada y_t negali būti $I(1)$: tokiu atveju Π turi atvirkštinę matricą ir iš (144) galima išreikšti

(145) $y_{t-1} = \Pi^{1} \Delta y_t - \Sigma_{j=1}^{p-1} \Pi^{1} \Gamma_j \Delta y_{t-j} + \Pi^{1} \varepsilon_t$.

Jei y_t būtų $I(1)$, tada dešinėje lygties pusėje visi esantys nariai turėtų būti $I(0)$, tačiau pirma eile integruotas procesas negali būti lygus stacionariam procesui - gaunama prieštara.

Taigi bendru atveju, t.y. iš anksto nereikalaujant y_t kointegruotumo, (145) lygtis apima tris galimus atvejus:

- jei $r=0$, tai y_t nėra kointegruoti;
- jei $r=n$, tai prielaida $y_t \sim I(1)$ yra neteisinga, – $y_t \sim I(0)$;
- jei $r<n$, tai y_t yra kointegruoti.

Jei kintamieji yra kointegruoti, tada $n \times n$ dimensijos matricą Π galima išreikšti kaip dviejų $n \times r$ dimensijos matricų α ir β tam sandaugą $\Pi=\alpha\beta'$. Matricos Π rangas tada parodo tiesiškai nepriklausomų kointegravimo vektorių skaičių sistemoje, o α ir β atitinkamai turi paklaidų korekcijos daugiklių bei kointegravimo vektorių interpretaciją.

4.5.2.2 Johansen kointegruotumo tikrinimo procedūra

Norint praktiškai patikrinti matricos Π rangą yra taikoma tokia procedūra:

- įsitikinama, kad tiriami kintamieji yra integruoti ne aukštesne nei pirma eile;
- parenkant tinkamą vėlavimų eilę p sudaromas adekvatus kintamųjų lygių, t.y. y_t, VAR(p) modelis (143); įsitikinama, kad liekanos yra *gausiškos*
- jis perrašomas į VECM pavidalą (144)
- taikant toliau aptariamas *Maksimalios tikrinės reikšmės* arba *Matricos pėdsako statistikas* yra nustatomas matricos Π rangas r

- jei $0<r<n$, tai laikoma, kad kintamųjų vektorius y_t kointegruotas, ir egzistuoja r tiesiškai nepriklausomų stacionarių y_t kombinacijų, – jas nusako $n\times r$ dimensijos kointegravimo parametrų matricos β stulpeliai.

Dėmesio! Kad Johansen testas būtų naudingas, pirmiausiai būtina sudaryti korektišką kintamųjų lygių VAR, kurios liekanos yra *gausiškos*.

4.5.2.3 Statistiniai Johansen procedūros aspektai

Naudojant savybę, kad nelygių nuliui matricos tikrinių reikšmių skaičius yra lygus matricos rangui ir darant prielaidą apie normalų vektorinio proceso bendrą pasiskirstymą, Johansen kointegruotumo tikrinimo procedūra statistiškai įvertina matricos Π rangą.

Toliau išraiškų supaprastinimo tikslu naudojami tokie žymėjimai: $z_{0t}=\Delta y_t$, $z_{1t}=y_{t-1}$, o į matricas z_{2t} ir Ψ yra sudėti vektoriai $\Delta y_{t-1},...,\Delta y_{t-p+1}$ bei juos atitinkančios parametrų matricos $\Gamma_{i1},..., \Gamma_{p-1}$. Tada (145) gali būti perrašyta į

(146) $z_{0t} = \alpha\beta' z_{1t} + \Psi z_{2t}+\varepsilon_t$.

Tegu kiekvienam $i=0,1,2$ ir $t=1,...,T$ turimi z_{it} stebėjimai ir tenkinama $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, \Sigma_\varepsilon)$. Tada logaritmuota tikėtinumo funkcija (atmetus konstantą) yra

(147) $logL(\Psi,\alpha,\beta,\Sigma_\varepsilon) = -T/2log|\Sigma_\varepsilon|-1/2\Sigma_{t=1}^{T}(z_{0t}-\alpha\beta' z_{1t}- \Psi z_{2t})'\Sigma_\varepsilon^{-1}(z_{0t}-\alpha\beta' z_{1t}- \Psi z_{2t})$.

Tačiau nagrinėti visą (147) nėra reikalo, kadangi galutinis tikslas yra įvertinti tik matricos $\Pi=\alpha\beta'$ rangą. Tuo tikslu z_{2t} įtaka yra eliminuojama nagrinėjant z_{0t} ir z_{1t} regresijų nuo z_{2t} liekanas

$R_{0t} = z_{0t}-M_{02}M_{22}^{-1}z_{2t}$,

$R_{1t} = z_{1t}-M_{12}M_{22}^{-1}z_{2t}$,

kur

$M_{ij} = T^{1}\Sigma_{t=1}^{T} z_{it}z_{jt}'$, $i,j=0,1,2$.

Tada (146) redukuojasi į redukuoto rango regresiją (žr. Anderson, 1951)

(148) $R_{0t} = \alpha\beta' R_{1t}+v_t$,

su atitinkama koncetruota tikėtinumo funkcija

(149) $logL(\alpha,\beta,\Sigma_\varepsilon) = -T/2log|\Sigma_\varepsilon|-1/2\Sigma_{t=1}^{T}(R_{0t}-\alpha\beta' R_{1t})'\Sigma_\varepsilon^{-1}(R_{0t}-\alpha\beta' R_{1t})$.

Komentaras [VK7]: ? Σ_ε^{-1} ne ta pati?

Akivaizdu, kad (148) yra netiesinė regresija, todėl naudojamas iteracinis optimizavimas.

Iš redukuoto rango regresijos (148) α ir Σ_ε įverčiai gali būti gaunami fiksuojant β. Tada

$\hat{\alpha}(\beta) = S_{01}\beta(\beta' S_{11}^{-1}\beta)$ ir

$\hat{\Sigma}_\varepsilon(\beta) = S_{00} - \hat{\alpha}(\beta)(\beta' S_{11}^{-1}\beta)\hat{\alpha}(\beta)'$,

kur $\hat{\alpha}$ ir $\hat{\Sigma}_\varepsilon$ žymi atitinkamų parametrų įverčius.

$S_{ij} = T^{1}\Sigma_{t=1}^{T} R_{it}R_{jt}'$, $i,j=0,1$.

Koncentruota tikėtinumo funkcija (atmetus nuo parametrų nepriklausantį daugiklį) atitinkamai supaprastėja į

$L(\hat{\alpha}(\beta),\beta,\hat{\Sigma}_\varepsilon(\beta)) = |\hat{\Sigma}_\varepsilon(\beta)|^{-T/2}$,

ir jos maksimizavimas yra ekvivalentus determinanto

$|\hat{\Sigma}_\varepsilon(\beta)| = |S_{00} - S_{01}\beta(\beta' S_{11}^{-1}\beta)\beta' S_{10}|=|S_{00}||\beta'(S_{11}- S_{10}S_{00}^{-1}S_{01})\beta|/|\beta' S_{11}\beta|$

minimizavimui pagal β, kur paskutinė lygybė gauta pasinaudojant atvirkštinės padalintos matricos savybe.

Panaudojant ryšius tarp simetrinių teigiamai apibrėžtų kvadratinių matricų determinantų funkcijos maksimizavimo sprendinio ir tikrinių reikšmių bei tam tikru būdu normalizuojant $\hat{\beta}$ galima parodyti(žr. Johansen, 1995, Lemma A.8 ir p.92), kad

(150) $L_{max}^{-2/T} = |S_{00}||\hat{\beta}'(S_{11}- S_{10}S_{00}^{-1}S_{01})\hat{\beta}|/|\hat{\beta}'S_{11}\hat{\beta}| = |S_{00}|\,\Pi_{i=1}^{r}(1-\hat{\lambda}_i)$,

kur $\hat{\lambda}_1, ..., \hat{\lambda}_r$ yra mažėjimo tvarka išdėstytos tikrinių reikšmių uždavinio

(151) $|\lambda S_{11}- S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}|=0$

tikrinės reikšmės.

Tada pagal (151) determinanto pagrindu nustatytas atitinkamas tikrines reikšmes kointegravimo vektorių įverčiai gaunami kaip tikriniai vektoriai iš

(152) $(\hat{\lambda}_i S_{11}- S_{10}S_{00}^{-1}S_{01})\beta=0$

Šie kointegravimo parametrų įverčiai yra suderinti (žr. Johansen, 1988 ir 1995).

Paklaidų korekcijos parametrų matricos α įvertis nustatomas iš

(153) $\hat{\alpha} = S_{01}\hat{\beta}$.

Panaudojant (150) nesunku matyti, kad hipotezė, jog kointegravimo vektorių skaičius, t.y. matricos Π rangas, yra lygus r, prieš alternatyvą, jog kointegravimo vektorių skaičius yra $r+1$, gali būti patikrinta naudojant tikėtinumo santykiu pagrįstą statistiką

(154) $\lambda_{max} = -T\log(1-\hat{\lambda}_{r+1})$.

Ši testo statistika yra vadinama *Maksimalios tikrinės reikšmės*[12] statistika. Jei nagrinėjamoje sistemoje yra tik r kointegravimo vektorių, tada $\lambda_{r+1}=0$ ir $\lambda_{max}=0$.

Tikrinant jungtinę nulinę hipotezę, kad nagrinėjamoje n kintamųjų sistemoje yra $0\leq r<n$ kointegravimo vektorių bei atitinkamai $n-r$ vienetinių šaknų, taikoma tiesiogiai iš (150) gaunama *Matricos pėdsako*[13] *statistika*

(155) $\lambda_{trace} = -T\Sigma_{i=r+1}^{n}\log(1-\hat{\lambda}_i)$, $r=0,1,...,n-1$.

Pradedama nuo nulinės hipotezės, kad sistemoje nėra nei vieno kointegavimo vektoriaus ($r=0$) ir visos tikrinės reikšmės lygios nuliui. Jei ši atmetama, pereinama prie hipotezės, kad sistemoje yra ne daugiau vieno kointegravimo vektoriaus, tikrinant, ar likusios tikrinės reikšmės reikšmingai skiriasi nuo nulio. Taip tikrinama tol, kol nulinės hipotezės atmesti negalima.

Dėmesio! Johansen procedūroje hipotezės apie kointegruotumą pradedamos tikrinti nuo hipotezės, kad kintamieji nekointegruoti, jei pastaroji atmetama, tada tikrinama sekanti hipotezė, kad kintamieji kointegruoti ir turi tik vieną kointegravimo vektorių ir t.t..

Panašiai kaip tikrinant kintamųjų integruotumą DF bei ADF testais, *Maksimalios tikrinės reikšmės* ir *Matricos pėdsako statistikų* asimptotinės kritinės reikšmės priklauso nuo prielaidų apie konstantos ir trendo įtraukimą į vektorinę autoregresiją ar/ir kointegravimo regresiją. Šios reikšmės yra pateiktos Johansen ir Juselius (1990) bei Ostward-Lenum (1992) straipsniuose.

4.5.3 Kai kurie kointegruotumo tikrinimo atskiroje lygtyje ir lygčių sistemoje privalumai ir trūkumai

Pagrindiniai lygčių sistema pagrįstų metodų privalumai yra tokie:

- išvados apie kointegruotumą nepriklauso nuo normalizavimo: norint kointegruotumą patikrinti atskiroje lygtyje, kointegravimo vektorius yra normalizuojamas; tačiau statistinė išvada apie tai, ar kintamieji yra kointegruoti, gali priklausyti nuo pasirinktojo kintamojo. Šios problemos nėra, kai kointegruotumas tikrinamas lygčių sistemoje;

[12] Angl. *Maximum Eigenvalue*
[13] Angl. *Trace*

- įgalina nustatyti, kiek kointegravimo vektorių yra tarp nagrinėjamų kintamųjų. Atskiroje lygtyje to padaryti iš karto neįmanoma, tačiau galima (nors labai neefektyvi ir, augant kintamųjų skaičiui, tampanti labai koplikuota) alternatyva – perrinkti visų nagrinėjamų kintamųjų derinius atskirose lygtyse;
- Johansen procedūra nereikalauja, kad kintamieji būtų integruoti – tas nustatoma tikrinant kointegruotumą.

Pagrindiniai lygčių sistema pagrįsto Johansen metodo trūkumai:
- modeliavimas tampa žymiai keblesniu, kai kintamieji yra integruoti aukštesne nei pirma eile;
- kadangi remiasi VAR, reikalingas didelis stebėjimų skaičius;
- būtina liekanų gausiškumo prielaida, kadangi Johansen testas pagrįstas *maksimalaus tikėtinumo metodo* įverčiais.

Beveik veidrodinis šių savybių apvertimas nusako kointegruotumo tikrinimo atskiroje lygtyje trūkumus ir privalumus.

4.6 Integruotų kintamųjų modeliavimo alternatyvos

Ankstesniuose poskyriuose apibūdinti testai ir procedūros leidžia įvertinti nagrinėjamų kintamųjų integruotumo eilę bei tai, ar jie yra integruoti. Jei jau nustatyta, kad kintamieji yra integruoti bei ištirtas kointegruotumas, kokius modelius reikėtų taikyti modeliuojant kintamuosius, kurie yra integruoti, bet nekointegruoti; kokius naudoti, kai kintamieji kointegruoja? Toliau pateikiama 3 schema apibūdina bendrą veiksmų seką pasirenkant tinkamą modelį.

Daugialypių laiko eilučių modeliavimo alternatyvos **3 schema**