Symmetric road interchanges

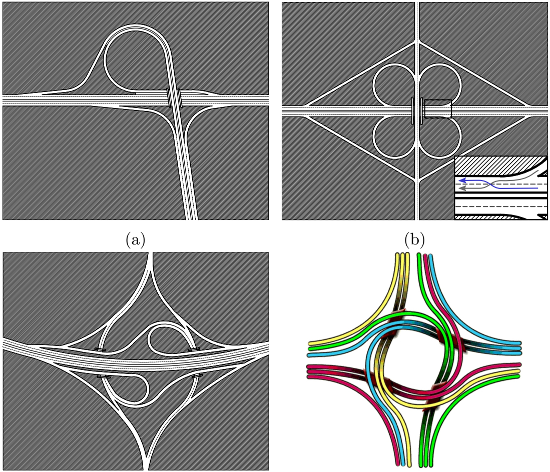
Valentas Kurauskas and Ugnė Šiurienė

Vilnius university, Lithuania

Joint Math Meetings – San Diego – 12 Jan 2018

Part I: Road interchanges and embeddings of bipartite graphs

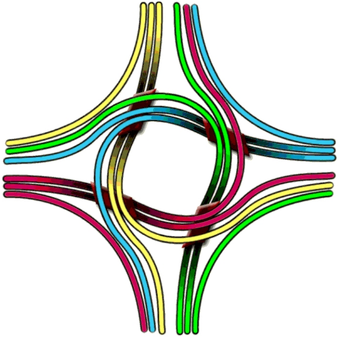
Road junctions / interchanges



(a) (b) (c) (d)

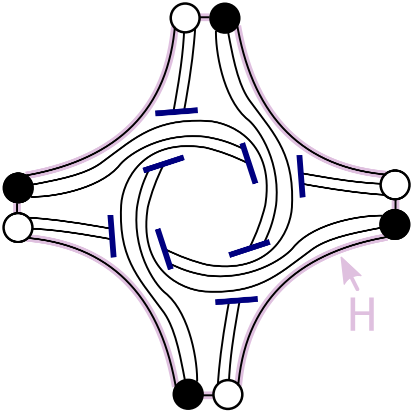
Illustration from V. K., On the genus of the complete tripartite graph $K_{n,n,1}$, Discrete Math 340 (2017).

The Pinavia interchange



4-way “Pinavia” interchange: Buteliauskas (2008); Buteliauskas, Krasauskas ir Juozapavičius (2010); `www.pinavia.com`

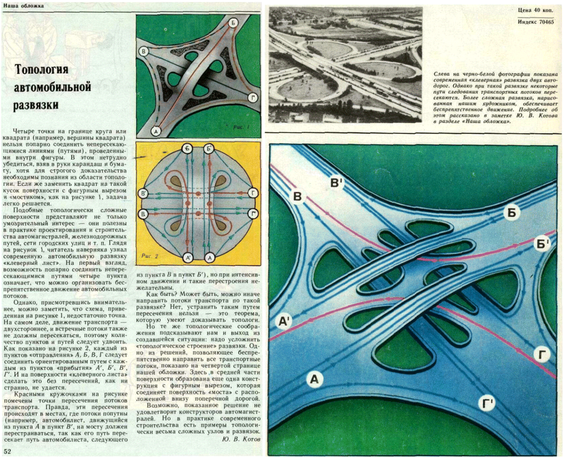
Modeling a road interchange as an embedding



Any such interchange $\longleftrightarrow$ embedding of a bipartite graph with a Hamiltonian facial cycle.

Can go to any other direction $\longleftrightarrow$ $K_{n,n}$

Not much prior literature



Топология автомобильной развязки

Четыре точки на границе круга или квадрата (например, вершины квадрата) нельзя попарно соединить непересекающимися линиями (путями), проведенными внутри фигуры. В этом нетрудно убедиться, взяв в руки карандаш и бумагу, хотя для строгого доказательства необходимы познания из области топологии. Если же заменить квадрат на такой кусок поверхности с фигурным вырезом и «мостиком», как на рисунке 1, задача легко решается.

Подобные топологически сложные поверхности представляют не только умозрительный интерес — они полезны в практике проектирования и строительства автомагистралей, железнодорожных путей, сети городских улиц и т. п. Глядя на рисунок 1, читатель наверняка узнал современную автомобильную развязку «клеверный лист». На первый взгляд, возможность попарно соединить непересекающимися путями четыре пункта означает, что можно организовать беспрепятственное движение автомобильных потоков.

Однако, присмотревшись внимательнее, можно заметить, что схема, приведенная на рисунке 1, недостаточно точна. На самом деле, движение транспорта — двухстороннее, и встречные потоки также не должны пересекаться, поэтому количество пунктов и путей следует удвоить. Как показано на рисунке 2, каждый из пунктов «отправления» *А, Б, В, Г* следует соединить ориентированным путем с каждым из пунктов «прибытия» *А′, Б′, В′, Г′*. И на поверхности «клеверного листа» сделать это без пересечений, как ни странно, не удается.

Красными кружочками на рисунке помечены точки пересечения потоков транспорта. Правда, эти пересечения происходят в местах, где потоки попутны (например, автомобилист, движущийся из пункта *А* в пункт *В′*, на мосту должен перестраиваться, так как его путь пересекает путь автомобилиста, следующего из пункта *В* в пункт *Б′*), но при интенсивном движении и такие перестроения нежелательны.

Как быть? Может быть, можно иначе направить потоки транспорта по такой развязке? Нет, устранить таким путем пересечения нельзя — это теорема, которую умеют доказывать топологи.

Но те же топологические соображения подсказывают нам и выход из создавшейся ситуации: надо усложнить «топологическое строение» развязки. Одно из решений, позволяющее беспрепятственно направить все транспортные потоки, показано на четвертой странице нашей обложки. Здесь в средней части поверхности образована еще одна конструкция с фигурным вырезом, которая соединяет поверхность «моста» с расположенной внизу поперечной дорогой.

Возможно, показанное решение не удовлетворит конструкторов автомагистралей. Но в практике современного строительства есть примеры топологически весьма сложных узлов и развязок.

Ю. В. Котов

Рис. 1

Рис. 2

Цена 40 коп.
Индекс 70465

Слева на черно-белой фотографии показана современная «клеверная» развязка двух автодорог. Однако при такой развязке некоторые пути следования транспортных потоков пересекаются. Более сложная развязка, нарисованная нашим художником, обеспечивает беспрепятственное движение. Подробнее об этом рассказано в заметке Ю. В. Котова в разделе «Наша обложка».

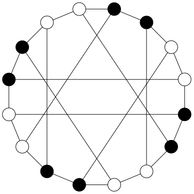
Yu. Kotov, Topology of an automobile interchange, Kvant 5 (1983) (in Russian).

The answer for even n

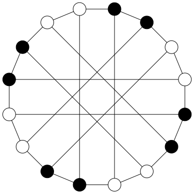
Theorem (VK, 2017)
For n even the minimum genus of an embedding of $K_{n,n}$ with a face bounded by a Hamiltonian cycle is $\lceil (n-1)(n-2)/4 \rceil$.

Corollary
For n even the genus of the complete tripartite graph $K_{n,n,1}$ is $\lceil (n-1)(n-2)/4 \rceil$.

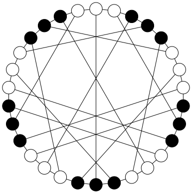
The only (up to isomorphism) optimal genus solutions for $n = 4$ and $n = 5$.



n=4



n=4



n=5

Part II: Rotationally symmetric interchanges of minimum genus

Rotationally symmetric interchanges of minimum genus

Why symmetric interchanges?

- Unconstrained layouts too complex to be practical
- Understand and exploit the geometric structure

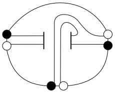
Why n-fold rotational symmetry (C_n)?

- Generalize Pinavia for $n > 4$
- For $\mathbb{R}^3$, only C_k, $k \mid 2n$ unbounded order symmetry groups (use Tucker 2014)

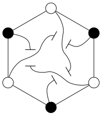
Rotationally symmetric interchanges of minimum genus

Two types of n-fold rotational symmetry:

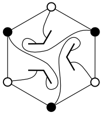
1. **Combinatorial / topological**: rotation system invariant under the cyclic shift along H by 2.
2. **Geometric**: the surface in $\mathbb{R}^3$, the embedded graph and the outer face are *all* invariant under rotation by $2\pi/n$.



1: ✓ 2: ✗



1: ✓ 2: ✓

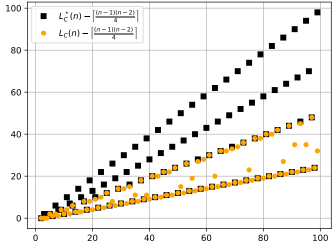


1: ✓ 2: ✓

Results

We find[1] *minimum genus* for n-fold rotationally symmetric interchanges in both cases:

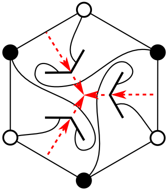
1. For topological/combinatorial symmetry, it depends on $n \mod 4$ as well as on the *smallest prime divisor* of n.
2. For geometric ($\mathbb{R}^3$) symmetry, it depends *only* on $n \mod 4$.



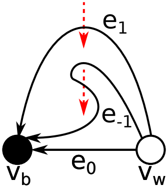
[1] See VK, U. Šiurienė, *Symmetric road interchanges*, arXiv.

Symmetry in $\mathbb{R}^3$, orbifolds and quotient embeddings

Represent a symmetric embedding in $\mathbb{R}^3$, e.g.,

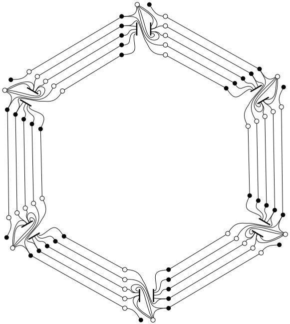


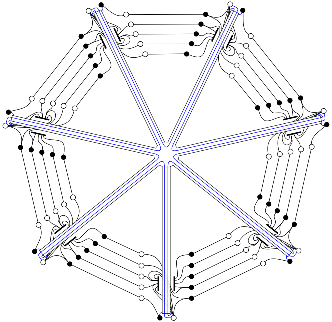
by the quotient surface and an embedded quotient graph:



Optimal symmetric constructions

"ring road" $n \bmod 4 \in \{1, 2\}$...





... extra "star bridge" $n \bmod 4 \in \{0, 3\}$, $n \neq 4$.

Conclusion

- We can model interchanges where drivers don’t need to change lanes by embeddings of bipartite graphs with a “Hamiltonian face”.
- Simple road junctions unexpectedly inspire nice theoretical questions.
- Will the theory become useful in the real world?

valentas@gmail.com

Some details

Detailed result 1

Theorem (combinatorial symmetry)

The minimum genus for a complete interchange with n-fold combinatorial symmetry is $L_C(n)$ where

$$L_C(n) = \begin{cases} \frac{n(n-2)}{4}, & \text{if } n \text{ is even;} \\ \lfloor \frac{n(n-1)}{4} \rfloor + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{p_1} + p_1\right), & \text{if } n \equiv 3 \pmod 4, p_1 \neq n \text{ and } p_1^2 \nmid n; \\ \lfloor \frac{n(n-1)}{4} \rfloor + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{p_1} + 1\right), & \text{if } n \equiv 3 \pmod 4 \text{ and } p_1^2 \mid n; \\ \frac{n(n-1)}{4} - 1, & \text{if } n \equiv 1 \pmod 4, 3 \mid n \text{ and } 9 \nmid n; \\ \lfloor \frac{n(n-1)}{4} \rfloor, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where p_1 is the smallest prime divisor of n.

Detailed result 2

Theorem (geometric symmetry)

For $n \neq 4$, the minimum genus for a complete interchange with n-fold geometric symmetry is $L_C^*(n)$ where

$$L_C^*(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{4} - 1, & \textit{if } n \equiv 0 \pmod 4; \\ \frac{n(n-1)}{4}, & \textit{if } n \equiv 1 \pmod 4; \\ \frac{n(n-2)}{4}, & \textit{if } n \equiv 2 \pmod 4; \\ \frac{n(n+1)}{4} - 1, & \textit{if } n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Building block for ringroad construction