САМОКОРРЕКТИРУЮЩИЕСЯ ПРОГРАММЫ И ИХ СЛОЖНОСТЬ

С. П. ЮКНА
(ВИЛЬНЮС)

1. Как известно, на любую управляющую систему действует целый ряд случайных внешних факторов, вызывающих различные повреждения схемы управляющей системы, вследствие чего система либо вообще перестает функционировать, либо продолжает функционировать как некоторая другая управляющая система. В первом случае наличие повреждений распознается, как правило, довольно просто. Намного хуже обстоит дело во втором случае, поскольку тогда для распознавания наличия повреждений требуется, вообще говоря, полный анализ процесса переработки информации данной управляющей системой.

Обычно в таких случаях пользуются различными способами контроля функционирования управляющих систем. Однако при всех своих достоинствах такой подход, как правило, становится мало эффективным ввиду огромных алгоритмических трудностей построения полных тестов, т. е. таких тестов, которые позволяют распознавать не только наличие, но и отсутствие неисправностей в схеме. Более того, в некоторых случаях (а именно, когда требования к надежности управляющей системы велики) этот подход становится просто неприемлемым хотя бы потому, что поскольку моменты появления неисправностей носят случайный характер, то правильность функционирования управляющей системы во время тестирования отнюдь не влечет правильного функционирования в последующие моменты времени.

Поэтому представляет большой интерес другой подход к решению проблемы надежности управляющих систем, состоящий в создании «устойчивости» в самой управляющей системе за счет подходящей структуры ее схемы. Эта задача является одной из основных в общекибернетической проблеме создания надежных управляющих систем из ненадежных элементов и носит название проблемы синтеза самокорректирующихся схем. Она заключается в создании схем для управляющих систем, функции которых сохраняются (не меняются) при наличии различных случайных повреждений. При этом центральным вопросом здесь выступает поиск алгоритмов синтеза самокорректирующихся схем, удовлетворяющих требованию оптимальности.

2. Дадим общую постановку проблемы синтеза самокорректирующихся схем (см. [7]). Пусть $\mathcal{U}$ представляет собой некоторое множество управляющих систем. С каждой управляющей системой $U_\alpha \in \mathcal{U}$ связаны схема Σ_α и функция Φ_α, причем функция определяется по схеме однозначно, т. е. $\Phi_\alpha = \mathcal{F}(\Sigma_\alpha)$, где $\mathcal{F}$ — некоторое однозначное отображение из множества схем в множество функций. Схема характеризует строение управляющей системы, а функция — ее поведение. Таким образом, с множе-

ством $\mathcal{U}$ связаны множества $S = \{\Sigma_\alpha\}$ схем и $\{\Phi_\alpha\}$ функций таких, что $\Phi_\alpha = \mathcal{F}(\Sigma_\alpha)$.

Предположим, что в силу некоторых обстоятельств схемы Σ_α могут «переходить в неисправные» состояния Σ'_α так, что $\Sigma'_\alpha \in S$. Тогда с каждой схемой Σ будет связано подмножество S_Σ всех схем Σ', представляющих неисправные состояния схемы Σ. Можно считать, что это соответствие задается функцией $\mathfrak{A}$, т. е.

$$S_\Sigma = \mathfrak{A}(\Sigma).$$

Схема Σ называется *самокорректирующейся* для $\mathfrak{A}$, если каково бы ни было $\Sigma' \in \mathfrak{A}(\Sigma)$, $\mathcal{F}(\Sigma') = \mathcal{F}(\Sigma)$. Другими словами, при любой неисправности, определяемой функцией $\mathfrak{A}$, схема Σ' реализует ту же функцию, что и схема Σ.

Среди основных задач в проблеме синтеза самокорректирующихся схем можно выделить следующие.

1) Выявление условий существования самокорректирующихся схем.

2) Получение априорных оценок сложности для самокорректирующихся схем.

3) Построение алгоритмов, дающих оптимальные (или близкие к оптимальным) самокорректирующиеся схемы.

При изучении сложности самокорректирующихся схем в рассмотрение вводятся следующие функции. Пусть $L(\Sigma)$ — сложность схемы (например, число контактов в контактной схеме, число элементов в схеме из функциональных элементов, число внутренних состояний автомата, число элементарных операторов в программе и др.). Через $L(\Phi)$ обозначается величина $\min L(\Sigma)$, где минимум берется по всем схемам, реализующим функцию Φ. Положим, что существуют самокорректирующиеся для $\mathfrak{A}$ схемы, реализующие функцию Φ. Пусть $L_\mathfrak{A}(\Phi) = \min L(\Sigma)$, где минимум берется по всем самокорректирующимся схемам, реализующим Φ. Спрашивается: насколько $L_\mathfrak{A}(\Phi)$ отличается от $L(\Phi)$? Для решения этого вопроса обычно рассматривается поведение так называемых функций Шеннона:

$$L(n) = \max_{\Phi \in \Psi_n} L(\Phi), \quad L_\mathfrak{A}(n) = \max_{\Phi \in \Psi_n} L_\mathfrak{A}(\Phi),$$

где $\Psi_n = \{\Phi: \rho(\Phi) = n\}$ и ρ — некоторая мера сложности функций. В случае, когда $\{\Phi_\alpha\}$ — множество функций алгебры логики, в качестве меры сложности ρ, как правило, берется число переменных функций.

3. Приведем краткий обзор имевшихся до сих пор результатов о синтезе самокорректирующихся схем.

В работе [7] Ю. Г. Потаповым и С. В. Яблонским был получен первый принципиальный результат для таких управляющих систем, как контактные схемы, реализующие функции алгебры логики (в этом случае множество $\{\Sigma_\alpha\}$ состоит из контактных схем, а $\{\Phi_\alpha\}$ — из всех булевых функций). Пусть $\mathfrak{A}$ соответствует короткому замыканию одного контакта, т. е. контактная схема может переходить в неисправное состояние только при коротком замыкании одного контакта в схеме. Тогда *)

$$L_\mathfrak{A}(n) \sim L(n).$$

(Напомним кстати, что, как доказано О. Б. Лупановым [3], $L(n) \sim \frac{2^n}{n}$.)

*) Здесь и далее $f(n) \sim g(n)$, $f(n) \lesssim g(n)$, $f(n) = o(g(n))$ означают, как обычно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leqslant 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, соответственно.

Позже Х. А. Мадатяном [4] было показано, что то же самое имеет место и при корректировании одного обрыва.

Дальнейшее развитие решение проблемы синтеза самокорректирующихся контактных схем получило в работах Э. И. Нечипорука [5, 6]. Он, в частности, получил следующие результаты. Пусть a — число возможных обрывов, а b — число возможных коротких замыканий контактов в схеме. Рассматривается соответствующая функция Шеннона $L_{a,b}(n)$ и доказывается, что

1) если $a = o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$, то

$$L_{a,3}(n) \sim L(n),$$

причем эта же асимптотика имеет место почти для всех функций, если $a = o\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)$;

2) для всех $\varepsilon > 0$, если $a = o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$ и $b \leqslant n^{1/2-\varepsilon}$, то

$$L_{a,b}(n) \lesssim 2L(n);$$

3) для контактных параллельно-последовательных схем (П-схем), если

$$a = o\left(\sqrt{\frac{\log n}{\log\log n}}\right) \quad \text{и} \quad b = o\left(\sqrt{\frac{\log n}{\log\log n}}\right),$$

то

$$L_{a,0}(n) \sim L_{0,b}(n) \sim L(n).$$

В последнее время Д. Улигом [10] для контактных схем получена оценка

$$L_{a,b}(n) \lesssim 2L(n)$$

при условии, что

$$\log a = o\left(\frac{n}{\log n}\right) \text{ и } \log b = o\left(\frac{n}{\log n}\right).$$

К тому же Н. П. Редькиным в [8] доказана возможность корректирования контактными схемами $b = o(n/\log n)$ замыканий без асимптотического увеличения сложности, т. е. им получена асимптотика $L_{0,b}(n) \sim L(n)$ при $b = o(n/\log n)$.

Задача самокорректирования рассматривалась и для таких управляющих систем, как схемы из функциональных элементов. В этом случае уже приходится вводить условия о наличии абсолютно надежных элементов. Так, например, приходится вводить требование об абсолютной надежности выходного элемента, поскольку ясно, что в противном случае и вся схема окажется ненадежной.

Возможность синтеза схем из функциональных элементов, самокорректирующихся при условии, что некоторые $m, m \in \{1, 2, \ldots\}$, элементов в схеме могут работать ненадежно, асимптотически без увеличения сложности была впервые установлена Г. И. Кириенко в [1]. Позже им же было получено [2] усиление этого результата: если $\log m = o(n)$, то $L_m(n) \sim L(n)$, т. е. асимптотика функции Шеннона сохраняется и в случае, когда число ненадежных элементов в схеме растет с ростом сложности схемы, если скорость роста ограничивается соотношением $\lim\limits_{n\to\infty} \log m/n = 0$.

Однако метод Г. И. Кириенко требует растущего количества надежных элементов (даже при ограниченном m).

Д. Улигом в [9] описан другой метод синтеза самокорректирующихся схем, требующий (при несколько более сильных условиях) существенно меньшего числа надежных элементов в схеме при сохранении обычной асимптотики сложности. Пусть $\log m = o(n/\log n)$. Тогда для произвольной функции алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно построить самокорректирующуюся при наличии m ненадежных элементов схему Σ, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $L(\Sigma) \leqslant L(n)$,

2) число надежных элементов в схеме зависит только от m (и не зависит от сложности схемы). При этом, если функции надежных элементов образуют полную систему, то число надежных элементов не превосходит cm, где c — некоторая константа.

Таким образом, имеющиеся до сих пор результаты о синтезе самокорректирующихся схем относятся к управляющим системам, реализующим класс функций алгебры логики. Естественно поставить аналогичную задачу и для управляющих систем, реализующих более широкие классы функций.

Прежде всего отметим одну особенность понятия функций Шеннона $L(n)$ и $L_{\mathfrak{A}}(n)$ при решении задачи об априорных оценках сложности самокорректирующихся схем для управляющих систем, реализующих такие классы функций, как класс всех частично-рекурсивных функций. Как уже говорилось, в случае функций алгебры логики в качестве меры сложности функций обычно берется число аргументов функции. Поскольку сложность любой схемы конечна и множество различных булевых функций от заданного числа аргументов конечно, то для каждого $n \in \{0, 1, \ldots\}$ $L(n) < \infty$, и, следовательно, вопрос о связи между функциями Шеннона $L(n)$ и $L_{\mathfrak{A}}(n)$ имеет смысл.

Иначе дело обстоит в случае, когда множество различных функций заданного числа аргументов бесконечно (что имеет место, например, в классе частично-рекурсивных функций). Нетрудно убедиться, что тогда при выполнении естественного требования о конечности множества схем любой заданной сложности используемое до сих пор определение функции Шеннона теряет смысл. Действительно, пусть S_k — класс всех схем сложности k, $k \in \{0, 1, \ldots\}$. Ясно, что для каждой функции множество минимальных реализующих ее схем содержится в одном и только одном из классов $S_0, S_1, \ldots$ Поскольку каждый из классов $S_0, S_1, \ldots$ конечен, а множество различных функций заданной арности бесконечно, то найдутся сколь угодно сложно реализуемые функции заданной арности. Более точно, для любого $k \in \{0, 1, \ldots\}$ найдется функция заданной арности такая, что все минимальные реализующие эту функцию схемы содержатся в некотором классе S_h, где $h > k$, и не содержатся в классе S_k. А это значит, что значение $L(n)$ при фиксированном n больше любого наперед заданного натурального числа, т. е. $L(n) = \infty$. Очевидно, что приведенное простое рассуждение остается в силе и в случае, когда в качестве меры сложности функций берется любая функция $\rho: \{\Phi_\alpha\} \to \{0, 1, \ldots\}$ такая, что множество функций заданной сложности бесконечно. Поэтому в случае более широких классов функций (таких как класс всех частично-рекурсивных функций) для выявления связи между $L(\Phi)$ и $L_{\mathfrak{A}}(\Phi)$ наиболее разумным претендентом на меру сложности функции Φ является, по-видимому, сложность минимальной реализующей ее схемы, т. е. величина $L(\Phi)$. Тогда $L_{\mathfrak{A}}(n) = \max L_{\mathfrak{A}}(\Phi)$, где максимум берется по всем функциям Φ таким, что $L(\Phi) = n$, и вопрос об асимптотической связи между $L_{\mathfrak{A}}(\Phi)$ и $L(\Phi)$ сводится к вопросу о связи функции $L_{\mathfrak{A}}(n)$ с тождественной функцией $L(n) = n$.

В настоящей работе в качестве модельного объекта управляющих систем, реализующих класс всех частично-рекурсивных функций, рассматриваются программы. В этом случае множество схем $\{\Sigma_\alpha\}$ — это множество программ, а $\{\Phi_\alpha\}$ — множество всех частично-рекурсивных функций.

Под *базисом* программы понимается, как обычно, любая пара $Б = \{F; P\}$, где F — множество общерекурсивных функций и P — множество общерекурсивных предикатов. В дальнейшем будем рассматривать только базисы $Б = \{F; P\}$, для которых либо $F \neq \varnothing$, либо $F = \varnothing$ и в P входит хотя бы один неконстантный предикат. Программы в некотором базисе $Б = \{F; P\}$ естественно задавать в виде помеченного ориентированного конечного графа, положительная степень (т. е. число выходящих дуг) вершин которого не превосходит 2. При этом вершины, положительная степень которых равна 1, помечены выражениями (называемыми преобразователями) вида $x_i := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$, где $f \in F$ и $x_i, x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ — некоторые переменные (имена ячеек памяти), а вершины положительная степень которых равна 2, помечены выражениями (называемыми распознавателями) вида $q(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$, где $q \in P$; при этом одна из выходящих дуг помечена числом 0, а другая — числом 1. Некоторая вершина выделена и называется начальной, а вершины, положительная степень которых равна 0, называются заключительными.

Выполнение (или *процесс вычисления*) программы начинается в начальной вершине. Если это преобразователь, то выполняется соответствующее присваивание и осуществляется переход по выходящей из него дуге. Если же это распознаватель, то проверяется соответствующее условие $q(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$ для текущих значений переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ и осуществляется переход по дуге, помеченной числом 1, если условие выполняется, и — по дуге, помеченной числом 0, если условие не выполняется. Аналогично надо поступить со следующей вершиной и продолжить до тех пор, пока не появится заключительная вершина. На этом процесс вычисления заканчивается, и его результатом является значение переменной, выделенной для результата. В случае же, когда программа состоит только из распознавателей, считаем, что она распознает предикат и результатом является число $\delta \in \{0, 1\}$, приписанное дуге, по которой вычисление приходит в заключительную вершину.

В работе рассматриваются неисправности двух типов: ошибки в программе и сбои в процессе вычисления.

Под *ошибкой* в случае неисправности первого типа понимается замена некоторого преобразователя (распознавателя) в данной программе произвольным другим преобразователем (распознавателем), возможно, из другого базиса. Законы распределения ошибок в программе задаются путем указания максимального числа возможных ошибок в ограниченных фрагментах программы. В данной работе роль таких фрагментов играют так называемые λ-цепи.

Пусть λ — натуральное число. Под λ-цепью в ориентированном графе G понимаем любой ориентированный путь в G длины λ, т. е. число различных вершин в этом пути равно λ. Говорим, что ошибки в программе распределены по закону (λ, m), если в любую λ-цепь графа программы попадают не более чем m ошибок. Заметим, что при таком задании законов распределения ошибок общее число возможных ошибок в программах будет расти с ростом сложности программ. При этом скорость роста характеризуется отношением m/λ, выражающим плотность распределения ошибок.

Под (λ, m)-*надежным* расширением программы π понимаем любую программу π^*, эквивалентную программе π, и такую, что функция, вычисляемая программой π^*, не меняется при наличии ошибок, распределенных по закону (λ, m). Через $\Pi(Б)$ обозначим класс всех программ в базисе $Б$. Класс программ Π называем (λ, m)-*замкнутым*, если для каждой программы $\pi \in \Pi$ в классе Π имеется ее (λ, m)-надежное расширение. Иными словами, (λ, m)-замкнутость класса Π означает, что для любой функции, вычисляемой некоторой программой из класса Π, в этом классе имеется программа, вычисляющая ту же функцию и при наличии ошибок в программе, распределенных по закону (λ, m).

В работе рассматриваются программы в базисах из классов $\mathscr{B}_0$, $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}$. Класс $\mathscr{B}_0$ состоит из всех базисов, включающих предикат равенства. Класс $\mathscr{B}_1$ состоит из всех базисов $Б = \{F; P\}$ таких, что для каждой базисной функции $f \in F$ имеется предикат p_f, $p_f \in P$, множество истинности которого совпадает с графиком функции f, т. е. для любых натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n$, b

$$p_f(b, a_1, \ldots, a_n) = 1 \Leftrightarrow f(a_1, \ldots, a_n) = b.$$

Наконец класс $\mathscr{B}$ состоит из всех базисов $Б = \{F; P\}$ таких, что для любой базисной функции $f \in F$ имеется программа (обозначаемая через π_f) в базисе $Б$, распознающая график этой функции. Нетрудно заметить, что классы $\mathscr{B}_0$ и $\mathscr{B}_1$ являются подклассами класса $\mathscr{B}$. Заметим также, что классы $\mathscr{B}_0$, $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}$ включают как полные*), так и неполные базисы, причем класс $\mathscr{B}$ включает все полные базисы.

Подпредикатом предиката $p = p(x_1, \ldots, x_n)$ называем любой предикат, получаемый из предиката p путем подстановки произвольных натуральных чисел $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ вместо некоторых переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$. Базис $Б$ называем *приведенным*, если замена некоторого входящего в него предиката (называемого далее существенным) множеством его подпредикатов сужает класс функций и предикатов, вычисляемых программами из класса $\Pi(Б)$. Далее, если $\mathscr{A}$ — некоторый класс базисов, то через $\mathscr{A}^*$ будем обозначать подкласс приведенных базисов из класса $\mathscr{A}$.

4. Основные результаты работы состоят в следующем.

В § 1.1 вводятся основные понятия, в том числе и понятие (λ, m)-надежной программы.

В § 1.2 доказывается, что при $m \geqslant 1$ для (λ, m)-замкнутости класса программ $\Pi(Б)$ в случае, когда базис $Б$ — произвольный, необходимо, а в случае, когда $Б \in \mathscr{B}_1$, и достаточно выполнение условия: $\lambda \geqslant 2m + 1$.

В § 1.3 приводится метод, позволяющий путем локальных эквивалентных преобразований программ эффективно строить (λ, m)-надежные расширения для программ в базисах из классов $\mathscr{B}_0$ и $\mathscr{B}_1$.

Для характеризации сложности (λ, m)-надежных программ вводится следующая функция Шеннона:

$$L^{Б}_{\lambda, m}(n) = \max_{\pi \in \Pi_n(Б)} \min_{\pi^* \in \mathfrak{M}^{\lambda}_{m}(\pi \mid Б)} L(\pi^*),$$

где $L(\pi^*)$ — сложность программы π^*, $\mathfrak{M}^{\lambda}_{m}(\pi \mid Б)$ — множество всех (λ, m)-надежных расширений программы π, принадлежащих классу $\Pi(Б)$ и

$$\Pi_n(Б) = \{\pi \in \Pi(Б) : L(\pi) \leqslant n\}.$$

Под сложностью программы здесь понимается число незаключительных вершин графа программы. Одним из основных результатов работы яв-

*) Базис называется полным, если программами в этом базисе вычислимы все частично-рекурсивные функции.

ляется точная оценка функции Шеннона $L^{Б}_{\lambda,m}(n)$ в классах $\mathscr{B}^*_0$ и $\mathscr{B}^*_1$. Пусть $Б \in \mathscr{B}^*_0 \cup \mathscr{B}^*_1$ и

$$\lambda \geqslant \begin{cases} 2m+1, & \text{если } Б \in \mathscr{B}^*_1, \\ 3m+1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда для всех $n, m \in \{0, 1, \ldots\}$

$$L^{Б}_{\lambda,m}(n) = (m+1)^2 n.$$

При этом указанная оценка достигается приведенным в данном разделе методом синтеза (λ, m)-надежных расширений программ, что доказывает асимптотическую оптимальность этого метода.

Используя метод доказательства этой оценки, легко получить верхнюю оценку функции Шеннона $L^{Б}_{\lambda,m}(n)$ во всем классе базисов $\mathscr{B}$. Пусть $Б = \{F; P\}$ — некоторый базис из класса $\mathscr{B}$, $\lambda \geqslant 2 + (2m-1)\,d$, где $d = \max\limits_{f \in F} \{1, L(\pi_f)\}$. Тогда для всех $n, m \in \{0, 1, \ldots\}$ имеет место оценка:

$$L^{Б}_{\lambda,m}(n) \leqslant c\,(m+1)^2 n,$$

где c — константа, зависящая только от базиса. При этом в классе $\mathscr{B}$ эта оценка неулучшаема.

В § 1.4 рассматриваются условия (λ, m)-замкнутости и оценки функции Шеннона $L^{Б}_{\lambda,m}(n)$ в случае, когда некоторые операторы в программе являются абсолютно надежными.

Глава 2 посвящена решению проблемы синтеза самокорректирующихся программ при наличии неисправностей второго типа, т. е. при наличии сбоев в процессе вычисления. Такие программы будем называть устойчивыми.

Под сбоем в некоторый тактовый момент времени $t \in \{1, 2, \ldots\}$ процесса вычисления мы понимаем следующее. Если в момент времени t выполняется преобразователь $x_i := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$, то при нормальной работе (т. е. когда сбои отсутствуют) значением переменной x_i в момент t будет число $f(m_{i_1}, \ldots, m_{i_s})$, где $m_{i_1}, \ldots, m_{i_s}$ — значения переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ в момент $t-1$. Если же в момент t происходит сбой, то это значит, что значением переменной x_i в момент t может быть любое натуральное число. В случае, когда в момент t выполняется распознаватель $q(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$, при нормальной работе проверяется соответствующее условие $q(m_{i_1}, \ldots, m_{i_r})$ для текущих значений переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ и осуществляется переход по дуге, помеченной числом 1, если $q(m_{i_1}, \ldots, m_{i_r}) = 1$, и по дуге, помеченной числом 0, если $q(m_{i_1}, \ldots, m_{i_r}) = 0$. Если же в момент t происходит сбой, то осуществляется переход по дуге, помеченной числом $(\delta + 1) \bmod 2$, где $\delta = q(m_{i_1}, \ldots, m_{i_r})$.

Пусть $\tau, m \in \{0, 1, \ldots\}$ и $\tau \geqslant m$. Говорим, что сбои распределены по закону $\langle \tau, m \rangle$, если в каждом (конечном) интервале времени $\{t+1, \ldots \ldots, t+\tau\}$, $t \geqslant 0$, длины τ происходит не более чем m сбоев. Под *$\langle \tau, m \rangle$-устойчивым* расширением программы π понимаем любую программу π^*, эквивалентную программе π и такую, что функция, вычисляемая программой π^*, не меняется при наличии сбоев, распределенных по закону $\langle \tau, m \rangle$. По аналогии со случаем надежных программ определяется понятие $\langle \tau, m \rangle$-замкнутости классов программ и вводится соответствующая функция Шеннона

$$\Gamma^{Б}_{\tau,m}(n) = \max_{\pi \in \Pi_n(Б)} \; \min_{\pi^* \in \mathfrak{R}^{\tau}_m(\pi \mid Б)} L(\pi^*),$$

где $\mathfrak{M}_m^\tau(\pi \mid Б)$ — множество всех $\langle\tau, m\rangle$-устойчивых расширений программы π, принадлежащих классу $П(Б)$.

В § 2.2 доказывается, что при $m \geqslant 1$ для $\langle\tau, m\rangle$-замкнутости класса программ $П(Б)$ в случае, когда $Б$ — произвольный базис, необходимо, а в случае, когда $Б \in \mathfrak{B}_1$ — и достаточно выполнение условия: $\tau \geqslant 2m + 1$.

В § 2.3 приводится метод, позволяющий путем локальных эквивалентных преобразований программ эффективно строить $\langle\tau, m\rangle$-устойчивые расширения для программ в базисах из классов $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$.

Другим основным результатом работы является точная оценка функции Шеннона $Г^Б_{\tau,m}(n)$ для $Б \in \mathfrak{B}_0^* \cup \mathfrak{B}_1^*$. Пусть

$$\tau \geqslant \begin{cases} (m+1)^2, & \text{если } Б \in \mathfrak{B}_1^*, \\ 2m^2 + 3m + 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда для всех $n, m \in \{0, 1, \ldots\}$ имеет место $Г^Б_{\tau,m}(n) = (2m + 1)n$. При этом, поскольку указанная оценка достигается приведенным в данном разделе методом синтеза $\langle\tau, m\rangle$-устойчивых расширений программ, то отсюда следует асимптотическая оптимальность этого метода.

В § 2.4 рассматривается задача построения $\langle\tau, m\rangle$-устойчивых программ при условии, что некоторые операторы являются «абсолютно устойчивыми». При этом базисные функции и предикаты считаются абсолютно устойчивыми, если соответствующие им преобразователи и распознаватели всегда работают правильно (без сбоев).

Показано, что если все функции произвольного базиса $Б$ абсолютно устойчивые, а среди предикатов имеются неустойчивые предикаты, то при $m \geqslant 1$ для $\langle\tau, m\rangle$-замкнутости класса программ $П(Б)$ необходимо и достаточно выполнение условия: $\tau \geqslant 2m + 1$. Если при этом базис $Б$ приведенный, то для всех τ, m, n имеют место оценки

$$Г^Б_{\tau,m}(n) = \begin{cases} (2m+1)n, & \text{если } \tau \geqslant (m+1)^2, \\ \gamma \leqslant (m+1)^2 n, & \text{если } \tau \geqslant 2m+1, \\ \infty, & \text{если } \tau \leqslant 2m \end{cases}$$

Здесь $Г^Б_{\tau,m}(n) = \infty$ означает, что в классе $П(Б)$ имеются программы сложности $\leqslant n$, для которых не существуют $\langle\tau, m\rangle$-устойчивых расширений в классе $П(Б)$, т. е. что класс $П(Б)$ не является $\langle\tau, m\rangle$-замкнутым.

Если же в базисе $Б \in \mathfrak{B}_1$ все предикаты абсолютно устойчивые, а среди функций, возможно, имеются неустойчивые, то при $\tau \geqslant 2m + 1$ имеет место оценка $Г^Б_{\tau,m}(n) \leqslant 2n$.

В разделе 1 добавлений рассматривается задача синтеза (τ, m)-надежных программ в случае, когда в программы, вычисляющие предикаты, разрешается вхождение преобразователей. Что же касается оценок сложности (λ, m)-надежных программ, то надо отметить, что все верхние оценки остаются в силе и в случае измененного понятия программы, вычисляющей предикат. Однако при доказательстве нижней оценки функции $L^Б_{\lambda,m}(n)$ в главе 1 требования приведенности базиса $Б$ и отсутствия преобразователей в программах, вычисляющих предикаты, используются существенно. Поэтому возникает вопрос: можно ли при отказе от этих требований существенно понизить верхнюю оценку $c(m + 1)^2 n$ функции Шеннона $L^Б_{\lambda,m}(n)$, полученную в главе 1?

Оказывается, что и в этом случае для произвольного базиса $Б$ верхняя оценка функции $L^Б_{\lambda,m}(n)$ совпадает с нижней в точности до мультипликативной константы, зависящей только от базиса: для любых

$\lambda, m, n \in \{0, 1, \ldots\}$

$$L^{Б}_{\lambda, m}(n) > {}^1/_2 (m+1)^2 n.$$

Раздел 2 добавлений посвящен изучению некоторых алгоритмических вопросов распознавания надежности программ. Доказывается, что в некоторых естественных классах программ проблема распознавания (∞, m)-надежности имеет одинаковую степень трудности с проблемой распознавания функциональной эквивалентности программ.

ГЛАВА 1
НАДЕЖНЫЕ ПРОГРАММЫ И ИХ СЛОЖНОСТЬ

§ 1.1. Понятие (λ, m)-надежной программы

Обозначим через $\mathcal{G}$ множество всех конечных помеченных ориентированных графов G с выделенной вершиной, называемой начальной, из которой существует путь в любую вершину графа G. Пусть $\mathcal{V}(G)$ — множество всех вершин графа G. Положительной степенью вершины называем число выходящих из нее дуг. Для $k \in \{0, 1, \ldots\}$ обозначим через $V_k(G)$ множество всех вершин графа G положительной степени k. Тогда положим $V(G) = \mathcal{V}(G) \setminus V_0(G)$ — множество всех незаключительных вершин графа G.

Носителем программы будем считать любой граф G из $\mathcal{G}$ такой, что: 1) положительная степень всех вершин графа G не превосходит двух; причем если $v \in V_2(G)$, то выходящие из вершины v дуги помечены символами 0 и 1 и называются 0-дугой и 1-дугой соответственно; 2) множество заключительных вершин графа G состоит либо из одной, либо из двух вершин; при этом, если множество $V_0(G)$ состоит из двух вершин, то одна из них помечена символом u_0 и в нее ведут только 0-дуги, другая же помечена символом u_1 и в нее ведут только 1-дуги.

Далее, если из вершины v_1 в вершину v_2 ведет дуга, то будем говорить, что вершина v_2 является *непосредственным последователем* вершины v_1 или что v_1 является *непосредственным предшественником* вершины v_2, и обозначать: $v_1 \to v_2$. Если же ведущая из v_1 в v_2 дуга помечена числом $\delta \in \{0, 1\}$, то говорим, что v_2 является *непосредственным δ-последователем* вершины v_1 или что v_1 является *непосредственным δ-предшественником* вершины v_2, и обозначаем: $v_1 \xrightarrow{\delta} v_2$.

Используемые в работе понятия программы, процесса вычисления по данной программе и функции, вычисляемой программой, обычные, однако мы дадим полные определения, так как в дальнейшем потребуются некоторые детали.

Программа однозначно определяется путем указания базиса, носителя программы и интерпретации этого носителя в данном базисе.

Под *базисом* программ понимается любая пара $Б = \{F; P\}$, где F (соответственно P) — некоторое множество общерекурсивных функций (предикатов).

Пусть $A = \{x_0, x_1, \ldots\}$ — некоторый бесконечный алфавит (имен ячеек памяти). *Преобразователями* в базисе $Б$ называются выражения вида $x_i := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, где $f \in F$, $\{x_i, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\} \subseteq A$ и $x_i \not\equiv x_{i_j}$, $j = 1, \ldots, n$ (здесь и далее $\equiv$ — знак графического равенства). *Распознавателями* в базисе $Б$ называются выражения вида $q(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})$, где $q \in P$ и $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}\} \subseteq A$. Через $Б_f$ и $Б_p$ будем обозначать множество всех преобразователей и множество всех распознавателей в базисе

$Б$ соответственно. Множеством операторов в базисе $Б$ называем множество $\omega(Б) = Б_f \cup Б_p$.

Пусть $Б$ — некоторый базис и G — носитель программ.

Определение 1. *Интерпретацией* носителя G в базисе $Б$ называется любое однозначное отображение

$$\mu : V(G) \to \omega(Б)$$

такое, что

$$\mu(V_1(G)) \subseteq Б_f, \ \mu(V_2(G)) \subseteq Б_p.$$

Программой в базисе $Б$ будем называть любую пару (G, μ) (обозначаемую иногда через G_μ), где G — некоторый носитель программ и μ — интерпретация носителя G в базисе $Б$. Через $П(Б)$ будем обозначать класс всех программ в базисе $Б$.

Пусть $\pi = (G, \mu)$ — некоторая программа. Выражение $\pi(x_0, \ldots, x_k)$ будет обозначать, что все переменные, встречающиеся в программе π, суть $x_0, \ldots, x_k$. *Состоянием памяти программы* $\pi(x_0, \ldots, x_k)$ будем называть любой набор натуральных чисел $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$. *Состоянием программы* $\pi(x_0, \ldots, x_k)$ (или просто—состоянием) называем пару $\sigma = (\alpha, v)$, где $v \in \mathscr{V}(G)$ и α — состояние памяти программы π. Далее для краткости через σ^- будем обозначать соответствующее состоянию $\sigma = (\alpha, v)$ состояние памяти α, а через σ^+ — соответствующую состоянию вершину.

Если $v \in V_0(G)$, то состояние (α, v) называем *заключительным*. Если $\sigma^- = (a_0, \ldots, a_k)$ — некоторое состояние памяти, то для $0 \leqslant i \leqslant k$ через $[\sigma^-]_i$ будем обозначать i-ю координату состояния памяти σ^-, т. е $[\sigma^-]_i = a_i$.

Процесс вычисления $\hat{\pi}(\alpha)$ *по программе* $\pi = (G, \mu)$ *при начальном состоянии памяти* α определяется как последовательность (конечная или бесконечная)

$$\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots\}$$

состояний программы π такая, что

А. σ_0^+ — начальная вершина носителя программы π.

Б. Для всех $i = 0, 1, \ldots$

Б. 1) если $\mu(\sigma_1^+) \doteq x_j := f(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})$, то

$$[\sigma_{i+1}^-]_j = f([\sigma_i^-]_{j_1}, \ldots, [\sigma_i^-]_{j_s}), \quad [\sigma_{i+1}^-]_k = [\sigma_i^-]_k \quad \text{для } k \neq j$$

и вершина σ_i^+ является непосредственным предшественником вершины σ_{i+1}^+;

Б.2) если $\mu(\sigma_i^+) \doteq q(x_{j_1}, \ldots, x_{j_r})$, то $\sigma_{i+1}^- = \sigma_i^-$ и вершина σ_i^+ является непосредственным δ-предшественником вершины σ_{i+1}^+, где

$$\delta = q([\sigma_i^-]_{j_1}, \ldots, [\sigma_i^-]_{j_r}) \quad \in \{0, 1\}$$

(если считать, что истинному значению предиката соответствует число 1, а ложному — 0).

Далее, если $\widehat{G}_\mu(\alpha) = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots\}$ — некоторый процесс вычисления по программе G_μ при начальном состоянии памяти α, то будем говорить, что путь $\{\sigma_0^+, \sigma_1^+, \ldots\}$ в графе G *порождается* интерпретацией μ при начальном состоянии памяти α или что он *соответствует* процессу вычисления $\widehat{G}_\mu(\alpha)$.

Поскольку при $V_1(G) = \varnothing$ состояние памяти в процессе вычисления по программе (G, μ) не меняется, то естественно считать, что любая программа (G, μ) либо вычисляет некоторую частичную функцию (когда $V_1(G) \neq \varnothing$, т. е. в программе (G, μ) имеется хотя бы один преобразователь), либо вычисляет (распознает) некоторый частичный предикат (когда $V_1(G) = \varnothing$).

Для определения функции, вычисляемой программой, выделяется некоторая переменная, называемая результирующей. Далее для определенности будем считать, что результирующей является переменная x_0. Исключение составляют только программы, состоящие из одного преобразователя: в таком случае результирующей считается переменная, находящаяся в левой части этого преобразователя.

Определение 2. Программа $G_\mu = G_\mu(x_0, \ldots, x_n)$ *вычисляет частичную функцию* $[G_\mu] = [G_\mu](x_0, \ldots, x_m)$, $m \leqslant n$, если $V_1(G) \neq \varnothing$ (такие программы назовем вычисляющими) и для любых натуральных чисел $a_0, \ldots, a_m, b$

$$[G_\mu](a_0, \ldots, a_m) = b$$

тогда и только тогда, когда процесс вычисления

$$\hat{G}_\mu(a_0, \ldots, a_m, 0, \ldots, 0) = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$$

конечен и значение переменной x_0 в конце процесса вычисления есть b, т. е. $[\sigma_k^-]_0 = b$.

Определение 3. Программа $G_\mu = G_\mu(x_0, \ldots, x_n)$ *распознает (вычисляет) частичный предикат* $[G_\mu] = [G_\mu](x_0, \ldots, x_m)$, $m \leqslant n$, если $V_1(G) = \varnothing$ (такие программы назовем распознающими) и для любых натуральных чисел $a_0, \ldots, a_m$ и $\delta \in \{0, 1\}$

$$[G_\mu](a_0, \ldots, a_m) = \delta$$

тогда и только тогда, когда процесс вычисления

$$\hat{G}_\mu(a_0, \ldots, a_m, 0, \ldots, 0) = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$$

конечен и заключительная вершина σ_k^+ является непосредственным δ-последователем вершины σ_{k-1}^+.

Из определений 2 и 3 следует, что функция или предикат, вычисляемые программой, определены тогда и только тогда, когда соответствующий процесс вычисления конечен.

Программы π_1 и π_2 будем называть *эквивалентными* (и обозначать $\pi_1 \sim \pi_2$), если они вычисляют одну и ту же функцию или один и тот же предикат.

Приступим теперь к определению программ, корректирующих ошибки в тексте программы. Такие программы будем называть надежными.

Определение 4. Под *искажением* программы $G_\mu \in \Pi(Б)$ (короче: *G_μ-искажением* или *μ-искажением*) будем понимать произвольную интерпретацию η носителя G в базисе $Б'$, не совпадающем, возможно, с базисом $Б$, удовлетворяющую единственному требованию: если $v \in V_1(G)$, то переменные в левых частях преобразователей $\mu(v)$ и $\eta(v)$ совпадают.

Значение $\eta(v)$ μ-искажения η, не совпадающее со значением $\mu(v)$, т. е. такое, что $\eta(v) \not\equiv \mu(v)$, будем называть *$G_\mu$-ошибкой* или *$\mu$-ошибкой*, если ясно, о каком носителе идет речь.

Для получения сколь-нибудь содержательных результатов приходится так или иначе ограничивать классы возможных искажений.

В настоящей работе эти ограничения будем вводить в терминах законов распределения G_μ-ошибок, задаваемых посредством указания максимального числа возможных G_μ-ошибок в любой ограниченной окрестности вершин графа G. В качестве таких окрестностей мы используем так называемые λ-цепи.

Пусть $\lambda \in \{1, 2, \ldots\}$. *$\lambda$-цепью* графа G будем называть любой путь*) в графе G длины λ, т. е. любой путь, число различных вершин которого равно λ.

Будем говорить, что *G_μ-ошибки распределены по закону* (λ, m), если число G_μ-ошибок, попадающих в любую λ-цепь графа G, не превосходит m. Ясно, что при $\lambda < m$ данное определение не имеет смысла рассматривать, поэтому в дальнейшем будем считать, что $\lambda \geqslant m$.

Говорим, что *G_μ-искажение удовлетворяет закону* (λ, m), если соответствующие данному искажению G_μ-ошибки распределены по закону (λ, m).

Множество всех G_μ-искажений, удовлетворяющих закону (λ, m), будем обозначать через $\{G_\mu\}_m^\lambda$ или через $\{\mu\}_m^\lambda$, если ясно, о каком носителе идет речь.

Следующее замечание является непосредственным следствием приведенных определений.

Замечание 1.1. Любое G_μ-искажение, удовлетворяющее закону (λ, m), удовлетворяет и закону $(\lambda - i, m)$, где $0 \leqslant i \leqslant \lambda - m$, т. е.

$$\{G_\mu\}_m^\lambda \subseteq \{G_\mu\}_m^{\lambda-i}.$$

Определение 5. Программу (G, μ) называем *(λ, m)-надежной*, если для любых G_μ-искажений η, удовлетворяющих закону (λ, m), программы (G, μ) и (G, η) эквивалентны.

При этом, если программа, длина максимального пути в графе которой равна λ, не является (λ, m)-надежной, то считаем, что она не является и $(\lambda + i, m)$-надежной при любом $i = 0, 1, \ldots$.

Под *(λ, m)-надежным расширением* программы π будем понимать любую (λ, m)-надежную программу (возможно, в другом базисе), эквивалентную программе π. Через $\mathfrak{M}_m^\lambda(\pi)$ обозначим множество всех (λ, m)-надежных расширений программы π. Положим также

$$\mathfrak{M}_m^\lambda(\pi \mid Б) = \mathfrak{M}_m^\lambda(\pi) \cap П(Б).$$

§ 1.2. Критерий (λ, m)-замкнутости

В настоящем разделе рассматриваются условия (λ, m)-замкнутости в терминах параметров λ и m. Необходимое условие (λ, m)-замкнутости класса $П(Б)$ в случае произвольного базиса $Б$ дает следующая

Теорема 1.1. *Пусть $Б$ — произвольный непустой базис и $m \geqslant 1$. Тогда для (λ, m)-замкнутости класса программ $П(Б)$ необходимо выполнение условия: $\lambda \geqslant 2m + 1$.*

Доказательство. Пусть $m \geqslant 1$ и $Б = \{F; P\}$. Прежде всего заметим, что для любой программы π при $n \geqslant 0$ имеет место

$$\mathfrak{M}_m^\lambda(\pi) \subseteq \mathfrak{M}_m^{\lambda+n}(\pi).$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что существует программа $\pi \in П(Б)$ такая, что

$$\mathfrak{M}_m^{2m}(\pi \mid Б) = \varnothing.$$

*) Под *путем* в ориентированном графе G понимается любой упорядоченное множество $\{v_1, v_2, \ldots\}$ вершин графа G такое, что для любого $i = 1, 2, \ldots$ вершина v_{i+1} является непосредственным последователем вершины v_i. *Длиной* пути будем называть число различных входящих в него вершин.

Возможны два случая.

С л у ч а й 1. Все предикаты в P константные, т. е. тождественно равны 0 или 1 или $P = \varnothing$ *). В этом случае для любой программы $\pi = (G, \mu)$ в базисе $Б$ любому процессу вычисления по программе π будет соответствовать один и тот же путь в графе G. Пусть v — последняя вершина этого пути такая, что $\mu(v)$ — преобразователь, в левой части которого находится результирующая переменная x_0, т. е. $\mu(v)$ имеет вид $x_0 := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$. Тогда ясно, что для μ-искажения $\eta \in \{\mu\}_1^\infty$, приписывающего вершине v преобразователь $x_0 := g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$, где функция g отлична от функции f, программы (G, μ) и (G, η) не являются эквивалентными. Следовательно, в случае, когда базис $Б$ тривиален, ни одна программа из класса $П(Б)$ не является даже $(\infty, 1)$-надежной, и поэтому для всех $\pi \in П(Б)$

$$\mathfrak{M}_1^\infty(\pi \mid Б) = \varnothing.$$

Остается использовать очевидное соотношение

$$\mathfrak{M}_m^{2m}(\pi \mid Б) \subseteq \mathfrak{M}_m^\infty(\pi \mid Б) \subseteq \mathfrak{M}_1^\infty(\pi \mid Б).$$

С л у ч а й 2. Базис $Б$ нетривиален, т. е. в базисе $Б$ имеется хотя бы один неконстантный предикат $p = p(x_0, \ldots, x_{n-1})$. Пусть $\pi_0 = (D, \xi)$ — программа в базисе $Б$, где граф D состоит из одной незаключительной вершины, которой интерпретация ξ приписывает распознаватель $p(x_0, \ldots, x_{n-1})$.

Для $\delta \in \{0, 1\}$ обозначим через α_δ n-ку натуральных чисел $(a_0^\delta, \ldots, a_{n-1}^\delta)$ такую, что

$$[\pi_0](a_0^\delta, \ldots, a_{n-1}^\delta) = \delta. \tag{1}$$

Идея доказательства теоремы состоит в следующем. Для любого $(2m, m)$-надежного расширения (G, μ) программы π_0 доказывается существование таких $\delta^* \in \{0, 1\}$ и $\eta^* \in \{\mu\}_m^{2m}$, что значение предиката $[(G, \eta^*)](\alpha_\delta)$ не определено, в то время как, согласно равенству (1), $[(G, \mu)](\alpha_\delta) = \delta$. Полученное противоречие и показывает, что

$$\mathfrak{M}_m^{2m}(\pi_0) = \varnothing$$

и тем самым

$$\mathfrak{M}_m^{2m}(\pi_0 \mid Б) = \varnothing.$$

Пусть $\pi = (G, \mu)$ — некоторое $(2m, m)$-надежное расширение программы π_0 в базисе $Б$, т. е.

$$\pi \in \mathfrak{M}_m^{2m}(\pi_0 \mid Б). \tag{2}$$

Пусть при этом $\pi = \pi(x_0, \ldots, x_k)$ $(k \geqslant n)$ и для $\delta \in \{0, 1\}$

$$\beta_\delta = (a_0^\delta, \ldots, a_{n-1}^\delta, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-n+1}).$$

Если $q(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$ — некоторый распознаватель в программе π, то в дальнейшем для простоты вместо $q(b_1, \ldots, b_s)$, где $b_1, \ldots, b_s \in \{0, a_0^\delta, \ldots, a_{n-1}^\delta\}$, будем писать $q(\beta_\delta)$.

Фиксируем некоторое $\delta \in \{0, 1\}$. Пусть $X = \{v_1, v_2, \ldots\}$ — путь в графе G такой, что:

*) Впредь такие базисы будем называть *тривиальными*.

1) v_1 — начальная вершина графа G;
2) для всех $i = 1, 2, \ldots$

$$v_i \xrightarrow{\nu_i} v_{i+1}, \tag{3}$$

где

$$\nu_i = \begin{cases} \mu(\nu_i)(\beta_\delta), & \text{если } i \text{ — нечетное}, \\ \mu(v_i)(\beta_{\delta\oplus 1}), & \text{если } i \text{ — четное}. \end{cases}$$

Здесь и далее $\mu(v_i)(\beta_\delta)$ — значение распознавателя $\mu(v_i)$ при состоянии памяти β_δ и $\delta \oplus 1 = (\delta + 1) \bmod 2$.

Убедимся теперь, что существует $k \geqslant 2$ такое, что для некоторого i, $1 \leqslant i < k$, вершины v_i и v_k совпадают.

Допустим противное. Индукцией по k покажем, что тогда для всех $k \geqslant 1$ вершина v_{k+1} не является заключительной.

Базис индукции (т. е. $k = 1$) тривиален, поскольку $m \geqslant 1$.

Шаг индукции: пусть $k \geqslant 2$ и для всех $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ вершина v_{j+1} не является заключительной, а v_{k+1} — заключительная вершина графа G. Покажем, что тогда существует $\delta_k \in \{0, 1\}$ и μ-искажение $\eta_k \in \{\mu\}_m^{2m}$ такие, что либо

$$[(G, \eta_k)](\alpha_{\delta_k}) = \delta_k \oplus 1,$$

либо значение $[(G, \eta_k)](\alpha_{\delta_k})$ не определено.

Положим $\mathcal{I}_k = \{1, \ldots, k\} \cap \{t : t \equiv \varepsilon_k \pmod 2\}$, где в случае нечетного k

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu(v_k)(\beta_\delta) = \delta \oplus 1, \\ 1, & \text{если } \mu(v_k)(\beta_\delta) = \delta, \end{cases}$$

а в случае четного k

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu(v_k)(\beta_{\delta\oplus 1}) = \delta \oplus 1, \\ 1, & \text{если } \mu(v_k)(\beta_{\delta\oplus 1}) = \delta. \end{cases}$$

Определяем μ-искажение η_k следующим образом. Пусть значения μ-искажения η_k совпадают со значениями интерпретации μ на всех вершинах из множества $V(G) \setminus W_k$, где

$$W_k = \{v_i : i \in \mathcal{I}_k\},$$

а также на всех тех вершинах w из множества W_k, для которых либо в множестве W_k имеются непосредственные предшественники или последователи, либо

$$\mu(w)(\beta_\delta) = \mu(w)(\beta_{\delta\oplus 1})$$

и *) μ-искажение η_k совпадает с μ-искажением $\neg\mu$ на всех остальных вершинах графа G.

По (3) и определению μ-искажения η_k имеем, что для некоторого $\delta_k \in \{0, 1\}$ (зависящего от k) либо

$$[(G, \eta_k)](\beta_{\delta_k}) = \delta_k \oplus 1,$$

либо значение предиката $[(G, \eta_k)](\beta_{\delta_k})$ не определено. С другой стороны, поскольку η_k-ошибки могут происходить только на вершинах из W_k, не имеющих своих непосредственных предшественников или последо-

*) Здесь и далее, если $\mu(v)$ — некоторый распознаватель вида $q(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$, то $\neg\mu(v)$ обозначает распознаватель вида $\neg q(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$, где $\neg$ — знак отрицания.

вателей, тоже принадлежащих W_k, то

$$\eta_k \in \{\mu\}_1^2 \subseteq \{\mu\}_m^{2m}.$$

Поэтому, имея в виду (1), получаем противоречие с $(2m, m)$-надежностью программы π. Полученное противоречие показывает, что вершина v_{k+1} не является заключительной для любого $k \geqslant 0$.

Итак, мы получили, что если все вершины пути X различные, то путь X — бесконечный. Однако граф G конечен, и, следовательно, существует $k_0 > 1$ и $i_0 \in \{1, \ldots, k-1\}$ такие, что вершины v_{k_0} и v_{i_0} совпадают. Положим теперь $\delta^* = \delta_{k_0}$ и $\eta^* = \eta_{k_0}$. тогда, как следует из вышедоказанного,

$$\eta^* \in \{\mu\}_m^{2m}$$

и значение предиката $[(G, \eta^*)](\beta_{\delta^*})$ не определено. Получаем противоречие с (2). Следовательно, при $\lambda \leqslant 2m$ множество (λ, m)-надежных расширений программы π_0 пусто. Теорема доказана.

Теорема 1.2. *Пусть $Б \in \mathscr{B}_1$ и $m \geqslant 1$. Тогда класс программ $П$ $(Б)$ является (λ, m)-замкнутым тогда и только тогда, когда $\lambda \geqslant 2m + 1$.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1.1.

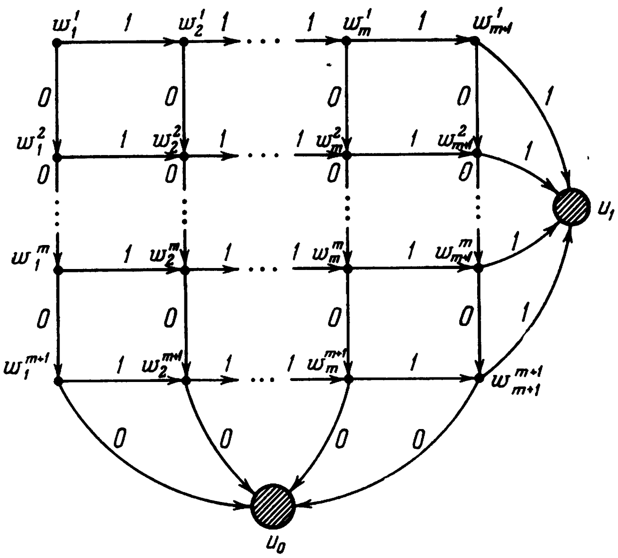

Рис. 1.

Достаточность. 1. Пусть $m \geqslant 1$ и $\pi_1 = (\{w\}, \xi)$ — программа, состоящая из одной незаключительной вершины w, которой интерпретация ξ приписывает некоторый распознаватель в базисе $Б$. Рассмотрим программу

$$\pi_1^* = (G_p^m, \mu_1),$$

где граф G_p^m изображен на рис. 1, и для всех $v \in V(G_p^m)$

$$\mu_1(v) \rightleftharpoons \xi^!(w).$$

Ясно, что программа π_1^* эквивалентна программе π_1. Убедимся, что π_1^* является (λ, m)-надежной при $\lambda \geqslant 2m + 1$.

Допустим противное, т. е. что существуют набор натуральных чисел α и μ_1-искажение $\eta \in \{\mu_1\}_m^{\lambda}$, где $\lambda \geqslant 2m + 1$, такие, что

$$[(G_p^m, \eta)](\alpha) \neq [\pi_1^*](\alpha). \quad (1)$$

Но тогда, как следует из описания графа *) G_p^m,

$$|\{v \in V(G_p^m) : \eta(v) \not\asymp \mu_1(v)\}| = m + 1, \qquad (2)$$

откуда, поскольку длина любого пути в графе G_p^m не превосходит $2m + 1$, имея в виду замечание 1.1, получаем противоречие с тем, что $\eta \in \{\mu_1\}_m^\lambda$.

Следовательно,

$$\pi_1^* \in \mathfrak{M}_m^\lambda(\pi_1 \mid Б)$$

при $\lambda \geqslant 2m + 1$.

2. Пусть теперь π_2 — преобразователь вида $x_i := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ в базисе $Б \in \mathscr{B}_1$. Рассмотрим программу $\pi_2^* = (G_f^m, \mu_2)$. Граф G_f^m изображен на рис. 2, а интерпретация μ_2 приписывает каждой вершине графа

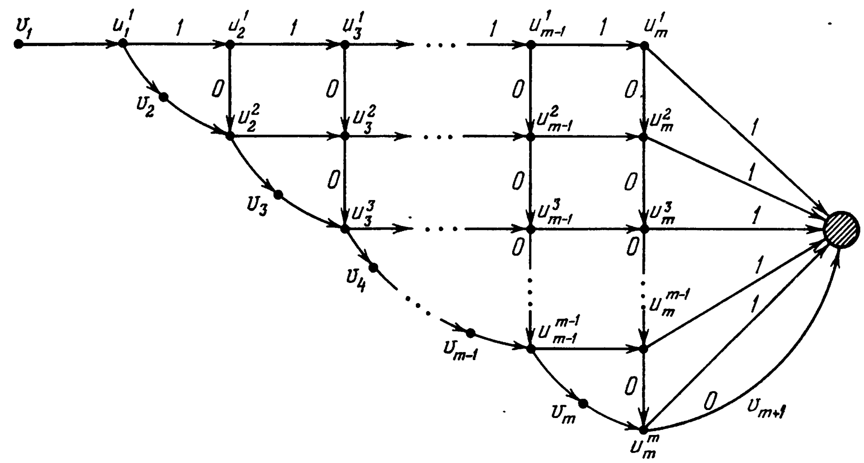

Рис. 2.

G_f^m положительной степени один преобразователь $x_i := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ и каждой вершине положительной степени два — распознаватель $p_f(x_i, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, где p_f — предикат (из базиса $Б$), множество истинности которого совпадает с графиком функции f. Ясно, что $\pi_2 \sim \pi_2^*$.

Убедимся теперь, что программа π_2 является (λ, m)-надежной при $\lambda \geqslant 2m + 1$. Допустим противное, т. е. что существуют набор натуральных чисел $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ и μ_2-искажение $\eta \in \{\mu_2\}_m^\lambda$, где $\lambda \geqslant 2m + 1$, такие, что

$$[(G_f^m, \eta)](\alpha) \neq f(\alpha). \qquad (3)$$

Пусть

$$\widehat{(G_f^m}, \eta)(\alpha) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma_{n+1}\}$$

— процесс вычисления по программе (G_f^m, η) при начальном состоянии памяти α.

Из описания графа G_f^m следует, что

$$m + 1 \leqslant n \leqslant 2m + 1. \qquad (4)$$

Пусть, далее, σ_i^+ — последняя вершина положительной степени 1 в пути $X = \{\sigma_1^+, \ldots, \sigma_{n+1}^+\}$. Тогда вершина σ_i^+ совпадает с некоторой вершиной v_k, $1 \leqslant k \leqslant m + 1$, и

$$\sigma_{i+1}^+ \xrightarrow{1} \sigma_{i+2}^+ \xrightarrow{1} \ldots \xrightarrow{1} \sigma_{n+1}^+, \qquad (5)$$

*) Здесь и далее через $|A|$ будем обозначать мощность множества A.

причем

$$n - i = m + 1 - k. \tag{6}$$

Из (3) с учетом (5) получаем, что для всех j, $i \leqslant j \leqslant n$,

$$\eta(\sigma_j^+) \not\geq \mu_2(\sigma_j^+). \tag{7}$$

С другой стороны, из описания графа G_f^m и (3) следует, что при $i \geqslant 3$

$$|\{j : \eta(\sigma_1^+) \not\geq \mu_2(\sigma_j^+),\ j = 1, \ldots, i - 1\}| = k - 1. \tag{8}$$

По (6)—(8) получаем, что

$$|v \in X : \eta(v) \not\geq \mu_2(v)| = n - i + 1 + k - 1 = m + 1.$$

Наконец, из (4) и (9) с учетом замечания 1.1 получаем противоречие с тем, что $\eta \in \{\mu_2\}_m^\lambda$ при $\lambda \geqslant 2m + 1$. (9)

Следовательно, $\pi_2 \in \mathfrak{M}_m^\lambda(\pi_2 \mid Б)$ при $\lambda \geqslant 2m + 1$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что для любой программы $\pi \in П(Б)$ программа π^*, полученная из программы π путем замены входящих в нее преобразователей и распознавателей соответствующими (λ, m)-надежными расширениями (при $\lambda \geqslant 2m + 1$), является (λ, m)-надежным расширением при $\lambda \geqslant 2m + 1$ программы π, причем $\pi^* \in П(Б)$. Теорема доказана.

§ 1.3. Оценка функции Шеннона $L_{\lambda,m}^Б(n)$

Сложность минимального (λ, m)-надежного расширения программы $\pi \in П(Б)$, принадлежащего классу $П(Б)$, описывается величиной

$$L_{\lambda,m}^Б(\pi) = \min_{\pi^* \in \mathfrak{M}_m^\lambda(\pi \mid Б)} L(\pi^*),$$

где $L(\pi^*)$ — сложность программы π^*, определяемая как число незаключительных вершин графа программы π^*. При этом считаем, как обычно, что $L_{\lambda,m}^Б(\pi) = \infty$, если $\mathfrak{M}_m^\lambda(\pi \mid Б) = \varnothing$.

Для характеризации максимальной сложности минимальных (λ, m)-надежных расширений программ в базисе $Б$ вводим следующую функцию Шеннона:

$$L_{\lambda,m}^Б(n) = \max_{\pi \in П_n(Б)} L_{\lambda,m}^Б(\pi),$$

где $П_n(Б) = \{\pi \in П(Б) : L(\pi) \leqslant n\}$.

Нижнюю оценку функции Шеннона $L_{\lambda,m}^Б(n)$ для любого приведенного базиса $Б$ дает

Теорема 1.3. *Для любого приведенного базиса $Б$ и любых λ, m, $n \in \{0, 1, \ldots\}$ имеет место оценка*

$$L_{\lambda,m}^Б(n) \geqslant (m + 1)^2 n.$$

Доказательство. Поскольку для любых λ, m, n имеет место

$$L_{\lambda,m}^Б(n) \geqslant L_{\infty,m}^Б(n),$$

достаточно доказать оценку

$$L_{\infty,m}^Б(n) \geqslant (m + 1)^2 n.$$

Пусть $Б$ — некоторый приведенный нетривиальный базис (случай тривиальных базисов очевиден) и $p = p(x_0, \ldots, x_{k-1})$ — некоторый неконстантный существенный предикат из Б. Для любого $i = 1, 2, \ldots$ обозначим через $\bar{x}_i$ набор переменных

$$x_{(i-1)k}, x_{(i-1)k+1}, \ldots, x_{ik-1}$$

и рассмотрим программу $\pi^n = (D_n, \xi)$, где граф D_n изображен на рис. 3, а интерпретация ξ приписывает вершине v_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, распознаватель $p_i \rightleftharpoons p(\bar{x}_i)$. Таким образом, программа π^n вычисляет предикат $[\pi^n](x_0, \ldots, x_{nk-1})$ такой, что для любых натуральных чисел $a_0, \ldots, a_{nk-1}$

$$[\pi^n](a_0, \ldots, a_{nk-1}) 1 \Leftrightarrow \mathop{\&}_{i=1}^{n} p(a_{(i-1)k}, \ldots, a_{ik-1}) = 1.$$

Пусть $\pi_m = (G_m, \mu)$ является минимальным (∞, m)-надежным расширением программы π^n в базисе $Б$, т. е.

$$\pi_m \in \mathfrak{M}_m^\infty(\pi^n \mid Б) \qquad (1)$$

и

$$L(\pi_m) = L^Б_{\infty, m}(\pi^n). \qquad (2)$$

Пусть при этом $\pi_m = \pi_m(x_0, \ldots, x_r)$, $r \geqslant nk - 1$.

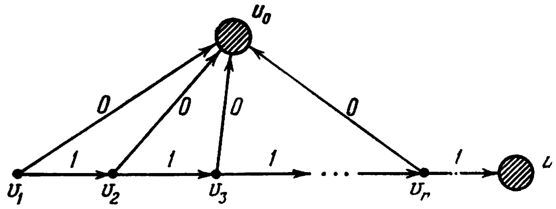

Рис. 3.

Обозначим через R множество всех наборов натуральных чисел вида

$$(a_0, \ldots, a_{nk-1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{r-nk-1}).$$

Для удобства дальнейших рассуждений введем следующее соглашение: если $q(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$ — некоторый распознаватель, входящий в программу π_m, то для $\alpha \in R$ будем писать $q(\alpha)$, подразумевая при этом, что

$$q(\alpha) = q([\alpha]_{i_1}, \ldots, [\alpha]_{i_s}).$$

Фиксируем некоторое $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_l$ суть все распознаватели, входящие в программу π_m и отличные от распознавателя $p_t = p(\bar{x}_t)$. Нетрудно убедиться, что существуют $\alpha_t^0 \in R$ и $\alpha_t^1 \in R$ такие, что для всех i, $1 \leqslant i \leqslant l$,

$$q(\alpha_t^0) = q(\alpha_t^1)$$

и для любого $\delta \in \{0, 1\}$

$$p_t(\alpha_t^\delta) = \delta.$$

Действительно, пусть D — носитель программы, представляющий собой бинарное ориентированное дерево, длина любого пути из начальной вершины в заключительную в котором равна $l + 1$. Таким образом, $V(D) = V_2(D)$. Рассмотрим разбиение $\{W_i : i = 1, \ldots, l\}$ множества вершин $V(D)$, где W_1 состоит из начальной вершины и для всех i, $2 \leqslant i \leqslant l$, множество W_i состоит из всех непосредственных последователей вершин из множества W_{i-1}. Пусть для любого i, $1 \leqslant i \leqslant l$, интерпретация η приписывает всем вершинам из множества W_i один и тот же распознаватель q_i. Через X_α обозначим путь в графе D, соответствующий процессу вычисления $\widehat{D}_\eta(\alpha)$ и для $\delta \in \{0, 1\}$ положим

$$\mathscr{X}_\delta = \{X_\alpha : \alpha \in N_t^\delta\},$$

где $N_t^\delta = \{\alpha \in R : p_t(\alpha) = \delta,\ p_i(\alpha) = 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq t\}$.

Из приведенности базиса $Б$ следует, что

$$\mathscr{X}_0 \cap \mathscr{X}_1 \neq \varnothing, \qquad (3)$$

поскольку в противном случае путем переименования переменных и изменения меток дуг, выходящих из вершин, принадлежащих множеству W_l, можно легко преобразовать программу D_η к программе π^* в базисе $(Б \setminus \{p\}) \cup \chi(p)$ (где $\chi(p)$ — множество всех подпредикатов предиката p), распознающей предикат p. Соотношение (3) означает, что для некоторых $\alpha_t^0 \in N_t^0$ и $\alpha_t^1 \in N_t^1$ пути $X_{\alpha_t^0}$ и $X_{\alpha_t^1}$ совпадают, откуда заключаем, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant l$,

$$q_i(\alpha_t^0) = q_i(\alpha_t^1). \tag{4}$$

Определим теперь t-ю проекцию $\pi_m^t = (G_m^t, \mu)$ программы π_m следующим образом:

1) если $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ — путь в графе G_m, порождаемый интерпретацией μ при начальном состоянии памяти α_t^0 и

$$i_0 = \min_{1 \leqslant i < k} \{i : \mu(w_i) \mathrel{\underline{\circ}} p(\bar{x}_t)\},$$

то w_{i_0} — начальная вершина графа G_m^t;

2) если для некоторых $v_1 \in V(G_m^t)$ и $v_2 \in V(G_m)$ таких, что

$$\mu(v_1) \mathrel{\underline{\circ}} \mu(v_2) \mathrel{\underline{\circ}} p(\bar{x}_t),$$

существует путь $\{v_1, w_1, w_2, \ldots, w_r, v_2\}$ в графе G_m, удовлетворяющий условиям:

2.1) $\mu(w_i) \not\mathrel{\underline{\circ}} p(\bar{x}_t)$ для всех $i = 1, \ldots, r$;

2.2) $w_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} w_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} \ldots \xrightarrow{\varepsilon_{r-1}} w_r \xrightarrow{\varepsilon_r} v_2$,

где $\varepsilon_i = \mu(w_i)(\alpha_t^0) = \mu(w_i)(\alpha_t^1)$;

2.3) $v_1 \xrightarrow{\varepsilon} w_1$ для некоторого $\varepsilon \in \{0, 1\}$,

то в графе G_m^t вершина v_2 является непосредственным ε-последователем вершины v_1.

Как явствует из построения проекций и свойств состояний памяти α_t^0 и α_t^1, любое $(G_m^t)_\mu$-искажение $\eta \in \{(G_m^t)_\mu\}_m^\infty$ можно очевидным образом расширить до $\eta^* \in \{(G_m)_\mu\}_m^\infty$ так, что для любого $\delta \in \{0, 1\}$

$$[(G_m, \eta^*)](\alpha_t^\delta) = [(G_m^t, \eta)](\alpha_t^\delta). \tag{5}$$

С другой стороны, из построения проекций π_m^t, $t = 1, \ldots, n$, программы π_m следует, что

$$V(G_m) \supseteq \bigcup_{t=1}^{n} V(G_m^t), \tag{6}$$

причем

$$V(G_m^{t_1}) \cap V(G_m^{t_2}) = \varnothing \quad \text{при} \quad t_1 \neq t_2.$$

Покажем, что для любых t, $1 \leqslant t \leqslant n$, и $m \geqslant 0$ имеет место оценка

$$L(\pi_m^t) \geqslant (m+1)^2. \tag{7}$$

Оценку (7) будем доказывать индукцией по числу ошибок m.

Базис индукции ($m = 0$) тривиален.

Шаг индукции: пусть для всех h, $0 \leqslant h \leqslant m$, имеет место оценка

$$L(\pi_h^t) \geqslant (h+1)^2.$$

Покажем, что тогда

$$L(\pi^t_{m+1}) \geqslant (m+2)^2.$$

Для $\delta \in \{0, 1\}$ положим

$$A^\delta_{m+1} = \{v \in V(G^t_{m+1}) : v \to u_\delta\},$$

т. е. $A^0_{m+1} \cup A^1_{m+1}$ — множество всех непосредственных предшественников заключительных вершин графа G^t_{m+1}. Через B^δ_{m+1} обозначим множество всех вершин w из A^δ_{m+1} таких, что $w \xrightarrow{\delta} u_\delta$ и w не является непосредственным предшественником вершины $u_{\delta\oplus 1}$.

Убедимся, что для любого $\delta \in \{0, 1\}$

$$|B^\delta_{m+1}| \geqslant m+1. \tag{8}$$

Действительно, пусть соотношение (8) для некоторого $\delta^* \in \{0, 1\}$ не имеет места и пусть μ^* — такое μ-искажение, что μ^* совпадает с интерпретацией μ на всех вершинах из множества $V(G_{m+1}) \setminus B^{\delta^*}_{m+1}$ и $\mu^*(v) \rightleftharpoons \neg\mu(v)$ для всех $v \in B^{\delta^*}_{m+1}$.

Поскольку $|B^{\delta^*}_{m+1}| \leqslant m$, то $\mu^* \in \{\mu\}^\infty_m$. При этом легко видеть, что если v^* — последняя вершина пути X в графе G^t_{m+1}, порожденного μ-искажением μ^* при начальном состоянии памяти $\alpha^{\delta^*}_t$, то в силу (5) и (1)

$$v^* \in A^{\delta^*}_{m+1} \setminus B^{\delta^*}_{m+1}. \tag{9}$$

Расширим μ-искажение $\mu^* \in \{\mu\}^\infty_m$ до μ-искажения $\mu^{**} \in \{\mu\}^\infty_{m+1}$, полагая: $\mu^{**}(v^*) \rightleftharpoons \neg\mu^*(v^*)$ и μ^{**} совпадает с μ^* на всех остальных вершинах графа G_{m+1}. Тогда, имея в виду (5) и (9), получаем, что

$$[(G_{m+1}, \mu^{**})](\alpha^{\delta^*}_t) = \delta^* \oplus 1,$$

откуда, поскольку $[\pi^n](\bar{\alpha}^{\delta^*}_t) = \delta$, где $\bar{\alpha}^\delta_t = ([\alpha^{\delta^*}_t]_1, \ldots, [\alpha^{\delta^*}_t]_{nk-1})$, получаем противоречие с (1), т. е. с тем, что программа π_{m+1} является $(\infty, m+1)$-надежным расширением программы π^n. Полученное противоречие доказывает истинность соотношения (8). Далее ясно, что

$$B^0_{m+1} \cap B^1_{m+1} = \varnothing. \tag{10}$$

Убедимся теперь, что

$$|A^0_{m+1} \cup A^1_{m+1}| \geqslant 2m+3. \tag{11}$$

Допустим противное. Тогда из (8) и (10) следует, что для любого $\delta \in \{0, 1\}$

$$|A^\delta_{m+1}| = m+1, \tag{12}$$

откуда согласно (8) получаем, что для любого $\delta \in \{0, 1\}$

$$A^\delta_{m+1} = B^\delta_{m+1}. \tag{13}$$

Пусть $\delta \in \{0, 1\}$. Определяем μ-искажение μ^* следующим образом: $\mu^*(v) \rightleftharpoons \neg\mu(v)$ для всех $v \in A^\delta_{m+1}$ и μ-искажение μ^* совпадает с интерпретацией μ на всех остальных вершинах графа G_{m+1}.

Так как $|A^\delta_{m+1}| = m+1$, то $\mu^* \in \{\mu\}^\delta_{m+1}$. С другой стороны, из (13) следует, что значение

$$[(G^t_{m+1}, \mu^*)](\alpha^\delta_t)$$

не определено. Отсюда, имея в виду (5), получаем противоречие с (1).

Исходя из графа G^t_{m+1}, строим граф D^t_m, выбрасывая все вершины w из множества $A^0_{m+1} \bigcup A^1_{m+1}$, причем, если $w \in B^\delta_{m+1}$ при некотором $\delta \in \{0, 1\}$, то направляем все ведущие в вершину w дуги в заключительную вершину u_δ. Если же $w \in A^\delta_{m+1} \setminus B^\delta_{m+1}$ при некотором $\delta \in \{0, 1\}$, то направляем все ведущие в вершину w δ-дуги в заключительную вершину u_δ, а все ведущие в w $(\delta \oplus 1)$-дуги в заключительную вершину $u_{\delta\oplus 1}$.

Нетрудно убедиться, что для любых $\delta \in \{0, 1\}$ и $\mu^* \in \{\mu\}^\infty_m$ имеет место

$$[(D^t_m, \mu^*)]\,(\alpha^\delta_t) = \delta. \tag{14}$$

Допустим противное. Тогда возможны два случая.

Случай 1. Для некоторого $\delta_0 \in \{0, 1\}$ и $\mu_0 \in \{\mu\}^\infty_m$ имеет место

$$[(D^t_m, \mu_0)]\,(\alpha^{\delta_0}_t) = \delta_0 \oplus 1. \tag{15}$$

Пусть $X = \{v_0, \ldots, v_n, u_{\delta_0\oplus 1}\}$ — путь в графе D^t_m, порождаемый μ-искажением μ_0 при начальном состоянии памяти $\alpha^{\delta_0}_t$. Из построения графа D^t_m следует, что вершина v_n является непосредственным предшественником некоторой вершины $w \in A^{\delta_0\oplus 1}_{m+1}$ в графе G^t_{m+1}. Определяем μ-искажение μ^*_0 следующим образом:

$$\mu^*_0(w) \rightleftharpoons \neg\,\mu_0(w)$$

и значения μ-искажения μ^*_0 совпадают со значениями интерпретации μ_0 на всех остальных вершинах графа G_{m+1}. Тогда путь в графе G^t_{m+1}, соответствующий μ-искажению μ^*_0 при начальном состоянии памяти $\alpha^{\delta_0}_t$, имеет вид

$$\{v_0, \ldots, v_n, w, u_{\delta_0\oplus 1}\}.$$

Следовательно, согласно (5) имеем, что

$$[(G_{m+1}, \mu^*_0)]\,(\alpha^{\delta_0}_t) = \delta_0 \oplus 1. \tag{16}$$

С другой стороны, поскольку $\mu_0 \in \{\mu\}^\infty_m$, то $\mu^*_0 \in \{\mu\}^\infty_{m+1}$ и из (16) получаем противоречие с (1), т. е. с тем, что программа π_{m+1} является $(\infty, m+1)$-надежным расширением программы π^n.

Случай 2. Для некоторых $\delta_0 \in \{0, 1\}$ и $\mu_0 \in \{\mu\}^\infty_m$ значение предиката

$$[(D^t_m, \mu_0)]\,(\alpha^{\delta_0}_t).$$

не определено. Пусть $X = \{v_0, v_1, \ldots\}$ — путь в D^t_m, порождаемый μ-искажением μ_0 при начальном состоянии памяти $\alpha^{\delta_0}_t$. Поскольку путь X бесконечный, то из построения графа D^t_m следует, что путь в графе G^t_{m+1}, соответствующий μ_0, при $\alpha^{\delta_0}_t$ совпадает с X. А это означает, что значение

$$[(G^t_{m+1}, \mu_0)]\,(\alpha^{\delta_0}_t)$$

не определено, откуда с учетом (5) и того, что $\mu_0 \in \{\mu\}^\infty_m$, получаем противоречие с тем, что программа π_{m+1} является (∞, m)-надежным (а тем самым $(\infty, m+1)$-надежным) расширением программы π^n. Следовательно, соотношение (14) имеет место.

Итак, ввиду (11) имеем

$$|V(G^t_{m+1})| - |V(D^t_m)| \geqslant 2m + 3. \tag{17}$$

Далее, поскольку программа π_m является минимальным (∞, m)-надежным расширением программы π^n, то согласно (14) получаем, что

$$|V(G_m^t)| \leqslant |V(D_m^t)|. \tag{18}$$

По (17) и (18) имеем

$$L(\pi_{m+1}^t) \geqslant L(\pi_m^t) + 2m + 3,$$

откуда, используя индукционное предположение, получаем, что

$$L(\pi_{m+1}^t) \geqslant (m+2)^2.$$

Итак, мы показали, что оценка (7) имеет место для всех $m \in \{0, 1, \ldots\}$ и $t \in \{1, \ldots, n\}$.

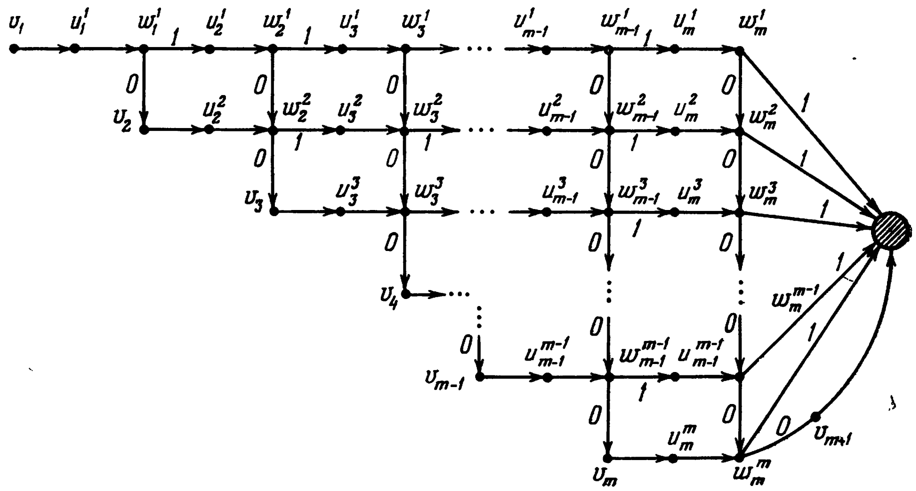

Рис. 4.

Используя (6), окончательно получаем

$$L_{\alpha,m}^{Б}(n) \geqslant L(\pi_m) \geqslant \sum_{t=1}^{n} L(\pi_m^t) \geqslant (m+1)^2 \cdot n.$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 1.4. *Пусть* $Б \in \mathscr{B}_0^* \cup \mathscr{B}_1^*$ *и*

$$\lambda \geqslant \begin{cases} 2m+1, & \textit{если } Б \in \mathscr{B}_1^*, \\ 3m+1 & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда для любых $n, m \in \{0, 1, \ldots\}$ *имеет место равенство*

$$L_{\lambda,m}^{Б}(n) = (m+1)^2 \cdot n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нижняя оценка $L_{\lambda,m}^{Б}(n) \geqslant (m+1)^2 n$ доказана в теореме 1.3. Верхняя оценка в случае, когда $Б \in \mathscr{B}_1^*$, следует из доказательства теоремы 1.2, поскольку

$$|V(G_p^m)| = (m+1)^2$$

и

$$|V(G_f^m)| = 1 + m + {}^1/_2\, m(m+1) \leqslant (m+1)^2.$$

Пусть теперь $Б \in \mathscr{B}_0$ и $x_i := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$ — некоторый преобразователь в базисе $Б$. Рассмотрим программу $\tilde{\pi}_2 = (\tilde{G}_f^m, \mu)$, где граф $\tilde{G}_f^m$ изображен на рис. 4, а интерпретация μ удовлетворяет условиям:

а) для всех $i = 1, \ldots, m + 1$

$$\mu(v_i) \mathrel{\underline{\underline{\circ}}} x_i := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}),$$

б) для всех $k = 1, \ldots, m$ и $j = k, k + 1, \ldots, m$

$$\mu(u_k^j) \mathrel{\underline{\underline{\circ}}} x' := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}),$$

где x' — новая переменная, отличная от переменных $x_i, x_{i1}, \ldots, x_{i_s}$.

в) для всех $k = 1, \ldots, m$ и $j = k, k + 1, \ldots, m$

$$\mu(w_k^i) \mathrel{\underline{\underline{\circ}}} (x' = x_i).$$

Ясно, что программа $\tilde{\pi}_2$ принадлежит классу Π (Б) и вычисляет ту же функцию, что и преобразователь $x_i := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$.

Совершенно аналогично тому, как это делается в теореме 1.2, можно убедиться, что программа $\tilde{\pi}_2$ является (λ, m)-надежной при условии, что $\lambda \geqslant 3m + 1$.

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что для любой программы $\pi \in \Pi$ (Б) программа π^*, полученная из программы π путем замены всех вхождений преобразователей и распознавателей соответствующими (λ, m)-надежными (при $\lambda \geqslant 3m + 1$) расширениями вида $\tilde{\pi}_2$ и π_1^* (см. теорему 1.2), является (λ, m)-надежным расширением программы π при $\lambda \geqslant 3m + 1$; причем поскольку

$$L(\tilde{\pi}_2) = L(\pi_1^*) = (m + 1)^2,$$

то

$$L(\pi^*) \leqslant (m + 1)^2 L(\pi).$$

Теорема доказана.

Пусть $Б = \{F; P\}$ — некоторый базис из класса $\mathscr{B}$. Положим

$$d(Б) = \max_{f \in F} L(\pi_f),$$

где π_f — минимальная программа в базисе Б, распознающая график функции f.

Верхнюю оценку функции Шеннона $L_{\lambda,m}^{Б}(n)$ во всем классе базисов $\mathscr{B}$ дает

Т е о р е м а 1.5. *Пусть* $Б \in \mathscr{B}$ *и* $\lambda \geqslant 2 + (2m - 1)d$, *где* $d = \max\{1, d(Б)\}$. *Тогда для всех* $n, m \in \{0, 1, \ldots\}$ *имеет место оценка*

$$L_{\lambda,m}^{Б}(n) \leqslant c(m + 1)^2 n,$$

где $c = \max\{1, d/2 + (2 - d)/2(m + 1)\}$ *— константа, зависящая только от базиса. При этом в классе базисов* $\mathscr{B}$ *эта оценка неулучшаема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводя аналогичные рассуждения, как и в доказательстве достаточности в теореме 1.2, заменяя предикаты p_f, множества истинности которых совпадают с графиками базисных функций f, на программы π_f, распознающие те же графики, не представляет труда убедиться, что при $\lambda \geqslant 2 + (2m - 1)d$

$$L_{\lambda,m}^{Б}(n) \leqslant n \cdot \max\left\{(m + 1)^2, 1 + m + \frac{dm}{2}(m + 1)\right\}.$$

Отсюда получаем нужную верхнюю оценку. Для завершения доказательства остается использовать теорему 1.2. Теорема доказана.

§ 1.4. О полунадежных программах

Пусть (G, μ) — некоторая программа. Для $t \in \{1, 2\}$ положим

$$\{\mu\}_m^\lambda(t) = \{\eta \in \{\mu\}_m^\lambda : \eta(v) \simeq \mu(v) \text{ для всех } v \in V_t(G)\},$$

т. е. $\{\mu\}_m^\lambda(t)$ — это подмножество всех μ-искажений η из множества $\{\mu\}_m^\lambda$ таких, что значения отображений μ и η отличаются либо только на вершинах положительной степени 2 (если $t = 1$), либо только на вершинах положительной степени 1 (если $t = 2$).

Программу (G, μ) назовем *$(\lambda, m)_t$-полунадежной*, если для всех $\eta \in \{\mu\}_m^\lambda(t)$ программы (G, μ) и (G, η) эквивалентны. Иначе говоря, $(\lambda, m)_t$-полунадежной называется программа, являющаяся (λ, m)-надежной при условии, что ошибаться могут только распознаватели (если $t = 1$), либо только преобразователи (если $t = 2$).

Под *$(\lambda, m)_t$-полунадежным расширением программы* π будем понимать любую $(\lambda, m)_t$-полунадежную и эквивалентную программе π программу. Пусть $\mathfrak{M}_{m,t}^\lambda(\pi)$ — множество всех $(\lambda, m)_t$-полунадежных расширений программы π. Скажем, что класс программ Π является *$(\lambda, m)_t$-замкнутым*, если для всех $\pi \in \Pi$

$$\mathfrak{M}_{m,t}^\lambda(\pi) \cap \Pi \neq \varnothing.$$

Аналогично функции Шеннона $L_{\lambda,m}^Б(n)$ определяются соответствующие функции Шеннона $L_{\lambda,m}^{Б,t}(n)$, $t \in \{1, 2\}$, характеризующие максимальную сложность простейших $(\lambda, m)_t$-полунадежных расширений

$$L_{\lambda,m}^{Б,t}(n) = \max_{\pi \in \Pi_n(Б)} \min_{\pi^* \in \mathfrak{M}_{m,t}^\lambda(\pi) \cap \Pi(Б)} L(\pi^*).$$

Теорема 1.6. *Пусть $m \geqslant 1$ и $Б$ — произвольный нетривиальный базис. Тогда для $(\lambda, m)_1$-замкнутости класса программ $\Pi(Б)$ необходимо и достаточно выполнение условия $\lambda \geqslant 2m + 1$. При этом, если базис $Б$ приведенный, то для всех $n \in \{0, 1, \ldots\}$ и $m \in \{1, 2, \ldots\}$ имеет место*

$$L_{\lambda,m}^{Б,1}(n) = \begin{cases} (m+1)^2 n & \text{при } \lambda \geqslant 2m+1, \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку необходимость условия $\lambda \geqslant 2m + 1$ для (λ, m)-замкнутости класса программ $\Pi(Б)$ в случае нетривиального базиса доказывается (см. теорему 1.1) с использованием распознающих программ, то ясно, что условие $\lambda \geqslant 2m + 1$ является необходимым и для $(\lambda, m)_1$-замкнутости класса $\Pi(Б)$. Достаточность следует непосредственно из теоремы 1.2.

Далее, поскольку базис $Б$ нетривиальный, то при $m \geqslant 1$ и $\lambda \leqslant 2m$ имеем $L_{\lambda,m}^{Б,1}(n) = \infty$, так как тогда класс $\Pi(Б)$ не является $(\lambda, m)_1$-замкнутым.

Далее ясно, что для всех $\lambda, m, n \in \{0, 1, \ldots\}$

$$L_{\lambda,m}^{Б,1}(n) \leqslant L_{\lambda,m}^Б(n). \tag{1}$$

Поскольку максимум

$$\max_{\pi \in \Pi_n(Б)} L_{\lambda,m}^{Б,1}(\pi)$$

достигается на распознающих программах, то, используя теорему 1.3, для всех $\lambda, m, n \in \{0, 1, \ldots\}$ имеем

$$L_{\lambda,m}^{Б,1}(n) \geqslant (m+1)^2 n. \tag{2}$$

И, наконец, из (1) и (2), используя теорему 1.4, получаем, что если $Б$ приведенный, то при $\lambda \geqslant 2m+1$

$$L_{\lambda,m}^{Б,1}(n) = (m+1)^2 n.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.7. *Пусть* $Б \in \mathscr{B}_0 \cup \mathscr{B}_1$ *и*

$$\lambda \geqslant \begin{cases} 2m+1, & \text{если } Б \in \mathscr{B}_1, \\ 3m+1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда для всех $n \in \{0, 1, \ldots\}$ *имеет место оценка*:

$$L_{\lambda,m}^{Б,2}(n) \leqslant \begin{cases} (2m+1)n, & \text{если } Б \in \mathscr{B}_1, \\ (3m+1)n & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $Б \in \mathscr{B}_1$ и $\pi \in \Pi(Б)$. Пусть при этом программа π получается из программы π путем замены каждого преобразователя вида $x_i := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$ программой (D, ξ). Граф D изображен на рис. 5, а интерпретация ξ приписывает: 1) каждой вершине v_j, $j = 1, \ldots, m+1$, преобразователь $x_i := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$, 2) каждой вершине w_k, $k = 1, \ldots, m$,— распознаватель $p_f(x_i, x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$, где p_f — предикат (из базиса $Б$), множество истинности которого совпадает с графиком функции f. Аналогично тому, как это делается в доказательстве теоремы 1.2, можно убедиться, что программа π^* является $(\lambda, m)_2$-полунадежным расширением программы π, если $\lambda \geqslant 2m+1$. Отсюда, замечая, что $\pi^* \in \Pi(Б)$ и

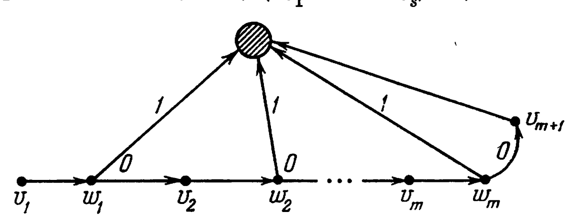

Рис. 5.

$$L(\pi^*) \leqslant (2m+1)L(\pi),$$

получаем нужную верхнюю оценку функции $L_{\lambda,m}^{Б,2}(n)$ в случае, когда $Б \in \mathscr{B}_1$. В случае же, когда $Б \in \mathscr{B}_0 \setminus \mathscr{B}_1$, оценка

$$L_{\lambda,m}^{Б,2}(n) \leqslant (3m+1)n$$

легко получается, если заметить, что программа (G, μ) (см. рис. 6) является

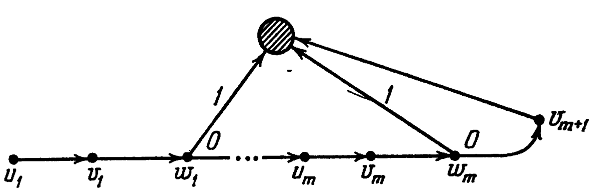

Рис. 6.

$(\lambda, m)_2$-полунадежным расширением преобразователя вида $x_i := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$ при $\lambda \geqslant 3m+1$. Здесь интерпретация μ приписывает: 1) вершинам v_j, $j = 1, \ldots, m+1$, — преобразователь $x_i := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$; 2) вершинам u_k, $k = 1, \ldots, m$, — преобразователь $x' := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$, где x' — новая переменная; 3) вершинам w_k, $k = 1, \ldots, m$ распознаватель $x_i, =x'$.

Теорема доказана.

ГЛАВА 2
УСТОЙЧИВЫЕ ПРОГРАММЫ И ИХ СЛОЖНОСТЬ

§ 2.1. Понятие $\langle\tau, m\rangle$-устойчивости программ

Перейдем теперь к определению программ, самокорректирующихся относительно случайных сбоев в процессах вычислений. Законы распределения моментов сбоев будем задавать путем указания максимального числа возможных сбоев в любом отрезке времени фиксированной длины. Пусть $\tau, m \in \{0, 1, \ldots\}$. Под *$\langle\tau, m\rangle$-распределением моментов сбоев*, где $\tau \geqslant m$, будем понимать любую строго возрастающую конечную или бесконечную последовательность $M = \{n_1, n_2, \ldots\}$ натуральных чисел такую, что для всех $i = 0, 1, \ldots$ имеет место

$$|\{i, i+1, \ldots, i+\tau-1\} \cap M| \leqslant m.$$

Иначе говоря, $\langle\tau, m\rangle$-распределением моментов сбоев является любая строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что в каждый отрезок натурального ряда длины τ входят не более чем m элементов этой последовательности.

Далее через $\Theta_{\tau, m}$ обозначим класс всех $\langle\tau, m\rangle$-распределений моментов сбоев. При этом в дальнейшем без особых оговорок будем пользоваться следующим очевидным следствием из приведенных определений: для любых $\tau, m, n \in \{0, 1, \ldots\}$

$$\Theta_{\tau+n, m} \subseteq \Theta_{\tau, m}.$$

Процесс вычисления

$$\hat{\pi}_M(\alpha_0) = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots\}$$

по программе $\pi = G_\mu$ при распределении моментов сбоев M определяется так же, как и обычный процесс вычисления $\hat{\pi}(\alpha_0)$ с той лишь разницей, что для всех $k \in M$:

б.1) если интерпретация μ приписывает вершине σ_k^+ преобразователь вида $x_i := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$, то для любого j, $j \neq i$, $[\sigma_{k+1}^-]_j = [\sigma_k^-]_j$, а $[\sigma_{k+1}^-]_i$ — любое натуральное число;

б. 2) если же интерпретация μ приписывает вершине σ_k^+ распознаватель вида $p(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$, то состояния памяти σ_{k+1}^- и σ_k^- совпадают и вершина σ_k^+ является непосредственным $\delta \oplus 1$-предшественником вершины σ_{k+1}^+, где

$$\delta = p([\sigma_k^-]_{i_1}, \ldots, [\sigma_k^-]_{i_r}) \in \{0, 1\}.$$

Функция или предикат $[\pi]_M = [\pi]_M(x_0, \ldots, x_m)$, вычисляемые программой $\pi = \pi(x_0, \ldots, x_n)$, $n \geqslant m$, при распределении моментов сбоев M определяются аналогично, исходя из определения процесса вычисления $\hat{\pi}_M(\alpha)$.

Определение 6. Программу π называем *$\langle\tau, m\rangle$-устойчивой*, если для всех распределений моментов сбоев $M \in \Theta_{\tau, m}$ имеет место

$$[\pi]_M = [\pi].$$

При этом, если программа, длина максимального пути в графе которой равна τ, не является $\langle\tau, m\rangle$-устойчивой при некотором $m \in \{1, 2, \ldots, \tau\}$, то будем считать, что данная программа не является и $\langle\tau + n, m\rangle$-устойчивой при любом $n \geqslant 0$.

Некоторую связь между понятиями надежности и устойчивости программ выявляет следующее простое

Предложение 2.1. *Любая программа, в графе которой нет циклов* *), *является* (∞, m)-*надежной тогда и только тогда, когда она является* $\langle\infty, m\rangle$-*устойчивой.*

Доказательство. Необходимость. Пусть программа $\pi = (G, \mu)$ является $\langle\infty, m\rangle$-устойчивой, но не (∞, m)-надежной, т. е. имеется μ-искажение $\eta \in \{\mu\}_m^\infty$ такое, что для некоторого состояния памяти α

$$[\pi](\alpha) \neq [(G, \eta)](\alpha).$$

Рассмотрим процесс вычисления

$$\widehat{(G, \eta)}(\alpha) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}.$$

Пусть $M = \{i : \eta(\sigma^+) \not\equiv \mu(\sigma_i^+)\}$. Поскольку в графе G нет циклов, то все вершины в пути $\{\sigma_1^+, \ldots, \sigma_n^+\}$ попарно различны и, следовательно, $|M| \leqslant n$. С другой стороны ясно, что для некоторого M^*, $M^* \subseteq M$, процессы вычисления $\hat{\pi}_{M^*}(\alpha)$ и $\widehat{(G, \eta)}(\alpha)$ совпадают и, следовательно,

$$[\pi]_{M^*}(\alpha) \neq [\pi](\alpha).$$

Поскольку $M^* \in \Theta_{\infty, m}$, то отсюда получаем противоречие с $\langle\infty, m\rangle$-устойчивостью программы π.

Достаточность. Пусть программа $\pi = (G, \mu)$ является (∞, m)-надежной, но не $\langle\infty, m\rangle$-устойчивой, т. е. для некоторого $\langle\infty, m\rangle$-распределения моментов сбоев M и состояния памяти α

$$[\pi]_M(\alpha) \neq [\pi](\alpha).$$

Пусть $\hat{\pi}_M(\alpha) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$. Поскольку в графе G нет циклов, то все вершины из множества $\{\sigma_i^+ : i \in M^*\}$, где $M^* = \{1, \ldots, n\} \cap M$, являются попарно различными. Поэтому существует μ-искажение $\eta \in \{\mu\}_{|M^*|}^\infty$, совпадающее на вершинах из множества

$$V(G) \setminus \{\sigma_i^+ : i \in M^*\}$$

с интерпретацией μ, такое, что процессы вычисления $\hat{\pi}_M(\alpha)$ и $\widehat{(G, \eta)}(\alpha)$ совпадают, и, следовательно,

$$[(G, \eta)](\alpha) \neq [\pi](\alpha).$$

Поскольку $\eta \in \{\mu\}_{|M^*|}^\infty \subseteq \{\mu\}_m^\infty$, то отсюда получаем противоречие с (∞, m)-надежностью программы π. Предложение доказано.

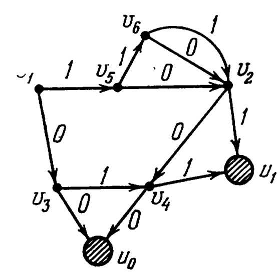

Рис. 7.

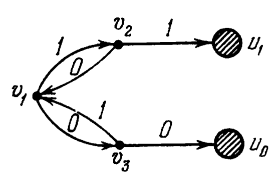

Рис. 8.

Заметим однако, что в общем случае предложение 2.1 не имеет места. Действительно, пусть $\pi_1 = (G_1, \mu_1)$ и $\pi_2 = (G_2, \mu_2)$ — программы, графы которых изображены на рис. 7 и 8 соответственно. Пусть при этом интер-

*) Под циклом в ориентированном графе понимаем, как обычно, любой путь, первая и последняя вершины которого совпадают.

претация μ_1 приписывает вершинам v_1, v_2, v_3, v_4 графа G_1 некоторый (неконстантный) распознаватель $p(x_0)$ и вершинам v_5, v_6 — тождественно истинный распознаватель, а интерпретация μ_2 приписывает всем (незаключительным) вершинам графа G_2 распознаватель $p(x_0)$.

Не представляет труда убедиться, что программа π_1 является (3,1)-надежной, но не $\langle 3, 1\rangle$-устойчивой, в то время как программа π_2 является $\langle 4,1\rangle$-устойчивой, но не (4,1)-надежной.

Действительно, в том, что программа π является (3, 1)-надежной, легко убедиться, например, перебирая всевозможные ошибки, распределенные по закону (3, 1).

С другой стороны, пусть $M = \{1, 4\}$ и $n \in \{0, 1, \ldots\}$ такое, что $p(n) = 0$. Поскольку процессу вычисления $(\widehat{\pi_1})_M(n)$ соответствует путь $\{v_1, v_5, v_6, v_2, u_1\}$, то

$$[\pi_1]_M(n) = 1 \neq [\pi_1](n),$$

в то время как $M \in \Theta_{3,1}$.

Далее, $\langle 4, 1\rangle$-устойчивость программы π_2 следует из того, что для любого $n \in \{0, 1, \ldots\}$ и всех $\langle 4, 1\rangle$-распределений моментов сбоев M таких, что $|M \cap \{1, 2, 3, 4\}| = 1$, имеет место

$$[\pi_2]_M(n) = p(n).$$

Пусть теперь n такое, что $p(n) = 0$. Рассмотрим μ_2-искажение η, приписывающее вершине v_3 графа G_2 распознаватель $q(x_0)$ такой, что $q(n) = 1$, и совпадающее с интерпретацией μ_2 на вершинах v_1 и v_2. Ясно, что $\eta \in \{\mu_2\}_1^2$. С другой стороны, процесс вычисления $(\widehat{G_2, \eta})(n)$ бесконечный и, следовательно, значение предиката $[(G_2, \eta)](n)$ не определено, в то время как $[\pi_2](n) = 0$. Имея в виду замечание 1.1, заключаем, что программа π_2 не является (4,1)-надежной.

§ 2.2. Критерий $\langle\tau, m\rangle$-замкнутости

Под $\langle\tau, m\rangle$-устойчивым расширением программы π будем понимать любую $\langle\tau, m\rangle$-устойчивую программу, возможно, в другом базисе, эквивалентную программе π. Через $\mathfrak{R}_m^\tau(\pi)$ обозначим множество всех $\langle\tau, m\rangle$-устойчивых расширений программы π. Положим далее

$$\mathfrak{R}_m^\tau(\pi \mid Б) = \mathfrak{R}_m^\tau(\pi) \cap П(Б).$$

Класс программ $П$ будем называть *$\langle\tau, m\rangle$-замкнутым*, если для всех $\pi \in П$

$$\mathfrak{R}_m^\tau(\pi) \cap П \neq \varnothing.$$

Другими словами, $\langle\tau, m\rangle$-замкнутость класса $П$ означает, что для каждой функции, вычисляемой некоторой программой из класса $П$, в этом классе найдется программа, вычисляющая ту же функцию при наличии сбоев в процессе вычисления, распределенных по закону $\langle\tau, m\rangle$.

Необходимое условие $\langle\tau, m\rangle$-замкнутости класса программ $П(Б)$ в случае произвольного базиса $Б$ дает следующий аналог теоремы 1.1.

Теорема 2.1. *Пусть $Б$ — произвольный непустой базис и $m \geqslant 1$. Тогда для $\langle\tau, m\rangle$-замкнутости класса программ $П(Б)$ необходимо выполнение условия $\tau \geqslant 2m + 1$.*

Доказательство. Пусть $Б = \{F; P\}$ и $m \in \{1, 2, \ldots\}$. Возможны два случая.

1. Базис $Б$ тривиален, т. е. $P = \phi$ или все предикаты, входящие в P,— константные. Пусть $\pi = (G, \mu)$ — некоторая программа в базисе

$Б$. Ясно, что любому процессу вычисления по программе π при пустом распределении сбоев (т. е. когда сбои отсутствуют) будет соответствовать один и тот же путь $X = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ в графе G. Пусть v_i, $0 \leqslant i < n$, — последняя вершина этого пути такая, что $\mu(v_i)$ — преобразователь, в левой части которого находится результирующая переменная x_0, т. е. преобразователь $\mu(v_i)$ имеет вид $x_0 := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$. Тогда ясно, что для $\langle\infty, 1\rangle$-распределения моментов сбоев $M = \{i\}$ имеет место

$$[\pi]_M \neq [\pi],$$

т. е. программа π не является даже $\langle\infty, 1\rangle$-устойчивой. Поэтому для всех $\pi \in П(Б)$

$$\mathfrak{N}_1^\infty(\pi) = \varnothing,$$

откуда, поскольку $m \geqslant 1$, ввиду очевидного соотношения

$$\mathfrak{N}_m^\tau(\pi \mid Б) \subseteq \mathfrak{N}_m^\infty(\pi) \subseteq \mathfrak{N}_1^\infty(\pi)$$

получаем, что для любого $\tau \in \{1, 2, \ldots\}$

$$\mathfrak{N}_m^\tau(\pi \mid Б) = \varnothing.$$

2. Пусть базис $Б$ нетривиален. Тогда в P имеется хотя бы один неконстантный предикат $p(x_0, \ldots, x_{n-1})$. Пусть π_0 — программа, состоящая из одной незаключительной вершины, которой интерпретация приписывает распознаватель $p(x_0, \ldots, x_{n-1})$. Через α_δ, $\delta \in \{0, 1\}$ будем обозначать такие наборы натуральных чисел, что

$$[\pi_0](\alpha_\delta) = \delta. \tag{1}$$

Пусть теперь для некоторого $m \in \{1, 2, \ldots\}$

$$\pi \in \mathfrak{M}_m^{2m}(\pi_0) \tag{2}$$

и $\hat{\pi}_{M_0}(\alpha_\delta) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots\}$ — процесс вычисления по программе π при распределении моментов сбоев $M_0 \in \Theta_{2m,m}$ таком, что

$$M_0 = \{n \cdot \varepsilon_n : n \equiv 0 \pmod 2\}, \tag{3}$$

где для всех $n = 1, 2, \ldots$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu(\sigma_n^+)(\alpha_\delta) = \mu(\sigma_n^+)(\alpha_{\delta\oplus 1}), \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Покажем, что процесс вычисления $\hat{\pi}_{M_0}(\alpha_\delta)$ бесконечный. Для этого индукцией по $n \geqslant 1$ убедимся, что для всех n вершина σ_{n+1}^+ не является заключительной.

Б а з и с и н д у к ц и и $n = 1$, тривиален, поскольку $m \geqslant 1$.

Ш а г и н д у к ц и и. Допустим, что для всех i, $1 \leqslant i < n$, вершина σ_{i+1}^+ не является заключительной и что вершина σ_{n+1}^+ — заключительная. Тогда

$$\sigma_n^+ \xrightarrow{\varepsilon} \sigma_{n+1}^+$$

при некотором $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Возможны два случая.

1) $\varepsilon = \delta \oplus 1$. Тогда

$$[\pi]_{M_0}(\alpha_\delta) = \delta \oplus 1,$$

откуда, поскольку $M_0 \in \Theta_{2m,m}$, ввиду (1) получаем противоречие с (2).

2) $\varepsilon = \delta$. Тогда

$$[\pi]_{M_1}(\alpha_{\delta\oplus 1}) = \delta,$$

где $M_1 = \{n \cdot \varepsilon_n : n \equiv 1 \pmod 2\}$, откуда, поскольку $M_1 \in \Theta_{2m,m}$, ввиду (1) получаем противоречие с (2).

Итак, процесс вычисления $\widehat{\pi}_{M_0}(\alpha_\delta)$ бесконечный, и, следовательно, значение предиката $[\pi]_{M_0}(\alpha_\delta)$ не определено. Отсюда, имея в виду (1) и то, что $M_0 \in \Theta_{2m,m}$, получаем противоречие с (2).

Поэтому

$$\mathfrak{N}_m^{2m}(\pi_0) = \varnothing.$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что для любых $\pi \in \Pi(Б)$ и τ, $m \in \{0, 1, \ldots\}$

$$\mathfrak{N}_m^\tau(\pi \mid Б) \subseteq \mathfrak{N}_m^\tau(\pi),$$

причем, если $\tau_1 \leqslant \tau_2$, то

$$\mathfrak{N}_m^{\tau_1}(\pi) \subseteq \mathfrak{N}_m^{\tau_2}(\pi).$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть $Б \in \mathscr{B}_1$ и $m \geqslant 1$. Тогда класс программ $\Pi(Б)$ является $\langle\tau, m\rangle$-замкнутым тогда и только тогда, когда $\tau \geqslant 2m + 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость следует из теоремы 2.1. Достаточность легко получается из теоремы 1.2. Действительно, если программа, длина любого пути в графе которой не больше λ, является (λ, m)-надежной, то ясно, что она в то же время является и $\langle\lambda, m\rangle$-устойчивой. Именно такими и являются программы, графы которых G_m^p и G_m^f изображены на рис. 1 и 2. Теорема доказана.

§ 2.3. Оценка функции Шеннона $Г_{\tau,m}^Б(n)$

С целью характеризации сложности простейших $\langle\tau, m\rangle$-устойчивых расширений программ рассмотрим поведение следующей функции Шеннона:

$$Г_{\tau,m}^Б(n) = \max_{\pi \in \Pi_n(Б)} Г_{\tau,m}^Б(\pi),$$

где $\Pi_n(Б)$ — множество программ сложности $\leqslant n$ в базисе $Б$ и

$$Г_{\tau,m}^Б(\pi) = \min_{\pi^* \in \mathfrak{N}_m^\tau(\pi \mid Б)} L(\pi^*).$$

Причем, если $\mathfrak{N}_m^\tau(\pi \mid Б) = \varnothing$, то считаем, как обычно, что

$$Г_{\tau,m}^Б(\pi) = \infty.$$

Нижнюю оценку функции $Г_{\tau,m}^Б(n)$ для любого приведенного базиса дает

Т е о р е м а 2.3. *Пусть $Б$ — произвольный приведенный базис. Тогда для всех τ, m, $n \in \{0, 1, \ldots\}$ имеет место оценка*

$$Г_{\tau,m}^Б(n) \geqslant (2m + 1)\, n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть π^n — программа в базисе $Б$, описанная в теореме 1.3. Пусть, далее, $\pi_m = (G_m, \mu)$ — некоторое $\langle\infty, m\rangle$-устойчивое расширение программы π^n, т. е.

$$\pi_m \in \mathfrak{N}_m^\infty(\pi^n). \tag{1}$$

Докажем, что для всех $m \in \{0, 1, \ldots\}$

$$L(\pi_m) \geqslant (2m + 1)\, n. \tag{2}$$

Поскольку в случае $m = 0$ оценка $L(\pi_0) = L(\pi^n) = n$ тривиальна, то полагаем $m \geqslant 1$.

Пусть $t \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{0, 1\}$ и $\pi_m^t = (G_m^t, \mu)$ есть t-я проекция программы π_m, описанная в теореме 1.3.

Из построения t-х проекций π_m^t программы π_m следует, что для любых $\delta \in \{0, 1\}$ и $t \in \{1, \ldots n\}$

$$[\pi_m](\alpha_t^\delta) = [\pi_m^t](\alpha_t^\delta), \tag{3}$$

где α_t^0 и α_t^1 — состояния памяти, существование которых доказано в теореме 1.3.

Если X — некоторый конечный полный путь в G_m^t (т. е. путь из начальной вершины графа G_m^t в заключительную), то через X_ψ будем обозначать вершину пути X, являющуюся непосредственным предшественником некоторой из заключительных вершин графа G_m^t.

Пусть $\mathscr{X}_m^t = \{X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots\}$ — множество всех полных путей в графе G_m^t таких, что $X_\psi^{(i)} \not\equiv X_\psi^{(j)}$ при $i \neq j$. Легко видеть, что

$$|\mathscr{X}_m^t| \geqslant 2. \tag{4}$$

Действительно, допустим, что множество $\mathscr{X}_m^t$ состоит из единственного пути. Пусть

$$\hat{\pi}_m^t(\alpha_t^\delta) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_d, \sigma_{d+1}\}$$

— процесс вычисления по программе π_m^t для начального состояния памяти α_t^δ. Если множество $\mathscr{X}_m^t$ состоит из единственного пути, то любая из заключительных вершин u_0 и u_1 графа G_m^t является непосредственным последователем одной и той же вершины σ_d^+. Поэтому

$$[\pi_m^t]_{\{d\}}(\alpha_t^\delta) = \delta \oplus 1, \tag{5}$$

где $\{d\} \in \Theta_{\alpha, m}$, поскольку $m \geqslant 1$. Отсюда ввиду (3) получаем противоречие с (1), и, следовательно, $|\mathscr{X}_m^t| \geqslant 2$.

Далее, легко видеть, что

$$d \geqslant m + 1. \tag{6}$$

Действительно, пусть $d \leqslant m$ и

$$M = \{i \cdot \varepsilon_i : i = 1, 2, \ldots, d\}, \tag{7}$$

где

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu(\sigma_i^+)(\alpha_t^\delta) = \mu(\sigma_i^+)(\alpha_t^{\delta\oplus 1}), \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что тогда

$$[\pi_m^t]_M(\alpha_t^{\delta\oplus 1}) = \delta. \tag{8}$$

Поскольку $M \in \Theta_{\alpha, m}$, то по (8), имея в виду (3), получаем противоречие с (1).

Пусть далее,

$$\hat{\pi}_m^t(\alpha_t^{\delta\oplus 1}) = \{\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_h, \tilde{\sigma}_{h+1}\}$$

— процесс вычисления по программе π_m^t для начального состояния памяти $\alpha_t^{\delta\oplus 1}$.

Пусть теперь $b \in \{1, 2, \ldots\}$ — такое число, что: 1) вершины σ_b^+ и $\tilde{\sigma}_b^+$ совпадают, и 2) для всех i, $b < i \leqslant h$, вершины σ_i^+ и $\tilde{\sigma}_i^+$ различаются. (Такое число существует ввиду (4).)

Нетрудно убедиться, что

$$h - b \geqslant m. \tag{9}$$

Действительно, пусть $h - b \leqslant m - 1$ и

$$M^* = \{i \cdot \varepsilon_i \colon i = b,\ b+1,\ \ldots,\ h\},$$

где

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu(\tilde{\sigma}_i^+)(\alpha_t^\delta) = \mu(\tilde{\sigma}_i^+)(\alpha_t^{\delta\oplus 1}), \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку $h - b \leqslant m - 1$, то $M^* \in \Theta_{\infty,m}$. С другой стороны, ясно, что

$$[\pi_m^t]_{M^*}(\alpha_t^\delta) = \delta \oplus 1.$$

Отсюда, имея в виду (3), получаем противоречие с (1).

По (6) и (9) имеем

$$|\, V(G_m^t)\,| \geqslant 2m + 1. \tag{10}$$

Из построения t-й проекции π_m^t программы π_m следует, что

$$V(G_m) \supseteq \bigcup_{t=1}^{n} V(G_m^t),$$

причем

$$V(G_m^{t_1}) \cap V(G_m^{t_2}) = \varnothing \text{ при } t_1 \neq t_2. \tag{11}$$

Так как π_m — произвольная программа из $\mathfrak{N}_m^\infty(\pi^n)$, то из (10), (11) заключаем:

$$\Gamma_{\infty,m}^{Б}(n) \geqslant \Gamma_{\infty,m}^{Б}(\pi^n) \geqslant \Big|\bigcup_{t=1}^{n} V(G_m^t)\Big| = \sum_{t=1}^{n} |V(G_m^t)| \geqslant (2m+1)\,n.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно использовать очевидное соотношение: для всех τ, m; $n \in \{0, 1, \ldots\}$

$$\Gamma_{\tau,m}^{Б}(n) \geqslant \Gamma_{\infty,m}^{Б}(n).$$

Теорема доказана.

Точную оценку функции Шеннона $\Gamma_{\tau,m}^{Б}(n)$ в классах базисов $\mathscr{B}_0^*$ и $\mathscr{B}_1^*$ дает

Т е о р е м а 2.4. *Пусть $Б \in \mathscr{B}_0^* \cup \mathscr{B}_1^*$ и*

$$\tau \geqslant \begin{cases} (m+1)^2, & \textit{если } Б \in \mathscr{B}_1^*, \\ 2m^2 + 3m + 1 & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда для всех n, $m \in \{0, 1, \ldots\}$ имеет место

$$\Gamma_{\tau,m}^{Б}(n) = (2m+1)\,n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нижняя оценка $\Gamma_{\tau,m}^{Б}(n) \geqslant (2m+1)\,n$ доказана в теореме 2.3. Докажем верхнюю оценку, т. е. что

$$\Gamma_{\tau,m}^{Б}(n) \leqslant (2m+1)\,n.$$

1. Пусть $\pi_1 = (\{w\}, \xi)$ — некоторая программа в базисе $Б$, состоящая из одной незаключительной вершины w, которой интерпретация ξ приписывает некоторый распознаватель в базисе $Б$. Рассмотрим программу $\pi_1^* = (G_1, \mu_1)$, где граф G_1 изображен на рис. 9 и интерпретация μ приписывает каждой вершине $v \in V(G)$ распознаватель $\xi(w)$, т. е. $\mu(v) \rightleftharpoons$

$\eqcirc \xi(w)$. Убедимся, что программа π_1^* является $\langle\tau, m\rangle$-устойчивым расширением программы π_1 при $\tau \geqslant (m+1)^2$. Для $\delta \in \{0, 1\}$ обозначим через α_δ некоторый набор натуральных чисел такой, что

$$[\pi_1](\alpha_\delta) = \delta. \quad (1)$$

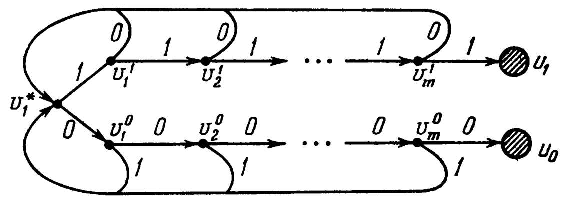

Рис. 9.

Пусть $\delta \in \{0, 1\}$, $\tau \geqslant (m+1)^2$ и $(\hat{\pi}_1^*)_M(\alpha_\delta) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots\}$ — процесс вычисления по программе π_1^* для начального состояния α_δ при некотором распределении моментов сбоев $M \in \Theta_{\tau,m}$. Тогда для некоторых $0 = i_0 < i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_n \leqslant \ldots$ и

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots \in \{0, 1\}$$

таких, что

$$\forall_j = 0, 1, \ldots, i_{j+1} - i_j \leqslant m+1, \quad (2)$$

имеет место $\sigma^+_{i_j+1} \eqcirc v_1^*$ и

$$\sigma^+_{i_j+1} \xrightarrow{\varepsilon_j} \sigma^+_{i_j+2} \xrightarrow{\varepsilon_j} \ldots \xrightarrow{\varepsilon_j} \sigma^+_{i_{j+1}} \xrightarrow{\varepsilon_j \oplus 1} \sigma^+_{i_{j+1}+1}.$$

Легко видеть, что существует $j_0 \in \{0, 1, \ldots\}$ такой, что $\xi_{j_0} = \delta$ и

$$\sigma^+_{i_{j_0}+1} \xrightarrow{\delta} u_\delta. \quad (3)$$

Действительно, если такого j_0 не существует, то

$$\left|\bigcup_{j=0}^{m} \{i_j+1, i_j+2, \ldots, i_{j+1}\}\right| \geqslant m+1. \quad (4)$$

Однако ввиду (2)

$$i_{m+1} \leqslant (m+1)^2. \quad (5)$$

Из (4) и (5) получаем противоречие с тем, что $M \in \Theta_{\tau,m}$. Итак, (3) имеет место. А это значит, что

$$[\pi_1^*]_M(\alpha_\delta) = \delta = [\pi_1](\alpha_\delta), \quad (6)$$

откуда, поскольку α_δ — произвольный набор натуральных чисел и M — произвольное $\langle\tau, m\rangle$-распределение моментов сбоев из $\Theta_{(m+1)^2,m}$, то

$$\pi_1^* \in \mathfrak{R}_m^\tau(\pi_1)$$

при $\tau \geqslant (m+1)^2$.

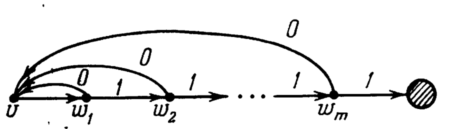

Рис. 10.

2. Пусть $\pi_2 = (\{v\}, \xi)$ — программа в базисе $Б \in \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$, состоящая из одной вершины v, которой интерпретация ξ приписывает некоторый преобразователь $x_i := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$ в базисе $Б$. Возможны два случая.

2.1. Пусть $Б \in \mathcal{B}_1$. Рассмотрим программу $\pi_2^* = (G_2, \mu_2)$, где граф G_2 изображен на рис. 10, $\mu(v) \eqcirc \xi(v)$ и

$$\mu(w_i) \eqcirc p_f(x_i, x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}), \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Здесь p_f — предикат, множество истинности которого совпадает с графиком функции f. Ясно, что $\pi_2^* \sim \pi_2$. Убедимся, что программа π_2^* является $\langle\tau, m\rangle$-устойчивой при $\tau \geqslant (m+1)^2$.

Пусть $M \in \Theta_{(m+1)^2,m}$ — некоторое $\langle (m+1)^2, m\rangle$-распределение моментов сбоев и

$$(\widehat{\pi}_2^*)_M(\alpha) = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots\}$$

— процесс вычисления по программе π_2^* для некоторого начального состояния памяти α при распределении моментов сбоев M. Тогда для некоторых $i_0 = 0, i_1, i_2, \ldots$ таких, что $i_j \leqslant m$, $j = 0, 1, \ldots$, имеет место

1) $$\sigma_{h_j}^+ \cong v,$$

2) $$\sigma_{h_j+1}^+ \xrightarrow{1} \sigma_{h_j+2}^+ \xrightarrow{1} \ldots \xrightarrow{1} \sigma_{h_j+i_j}^+ \xrightarrow{0} \sigma_{h_{j+1}}^+,$$

где $h_0 = 0$ и $h_j = h_{j-1} + i_{j-1} + 1$ для $j \geqslant 1$.

Легко видеть, что существует $j_0 \in \{0, 1, \ldots\}$ такой, что

$$H_{j_0} \cap M = \varnothing, \tag{7}$$

где $H_j = \{h_j, h_j + 1, \ldots, h_j + i_j\}$.

Действительно, допустим противное, т. е. что для всех $j \in \{0, 1, \ldots\}$

$$H_j \cap M \neq \varnothing.$$

Но тогда

$$\Big|\bigcup_{j=0}^{m} H_j \cap M\Big| \geqslant m+1, \tag{8}$$

С другой стороны, поскольку $i_j \leqslant m$ для всех $j \geqslant 0$, то

$$\Big|\bigcup_{j=0}^{m} H_j\Big| \leqslant (m+1)^2. \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем противоречие с тем, что

$$M \in \Theta_{(m+1)^2,\, m}.$$

Итак, (7) имеет место. А это значит, что

$$[\pi_2^*]_M(\alpha) = [\pi_2](\alpha). \tag{10}$$

Наконец, поскольку α — любое состояние памяти и M — любое $\langle (m+1)^2, m\rangle$-распределение моментов сбоев, то из (10) получаем, что программа π_2^* является $\langle \tau, m\rangle$-устойчивым расширением программы π_2 при $\tau \geqslant (m+1)^2$.

2.2. Пусть $Б \in \mathscr{B}_0 \setminus \mathscr{B}_1$. Рассмотрим программу $\widetilde{\pi}_2^* = (\widetilde{G}_2, \widetilde{\mu}_2)$, где граф G_2 изображен на рис. 11,

$$\mu(v) \cong \xi(v),\ \mu(z_i) \cong x' := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}),\ \mu(w_i) \cong (x_i = x'),$$

где x' — новая переменная. Совершенно аналогично, как и в предыдущем случае, можно убедиться, что программа $\widetilde{\pi}_2^*$ является $\langle \tau, m\rangle$-устойчивым расширением программы π_2 при $\tau \geqslant 2m^2 + 3m + 1$. Теперь справедливость верхней оценки

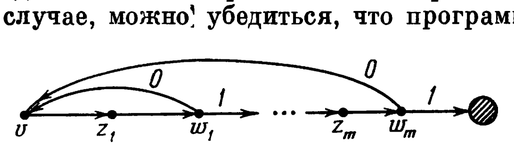

Рис. 11.

$$\Gamma_{\tau,m}^{Б}(n) \leqslant (2m+1)\,n$$

следует из того, что для каждой программы $\pi \in \Pi(Б)$ программа $\pi^* \in \Pi(Б)$, полученная из π путем замены всех входящих в π преобразователей и распознавателей на соответствующие $\langle \tau, m\rangle$-устойчивые расширения, является $\langle \tau, m\rangle$-устойчивым расширением программы π, причем

$$L(\pi^*) \leqslant (2m+1)\,n.$$

Теорема доказана.

§ 2.4. О полуустойчивых программах

Программу будем называть $\langle\tau, m\rangle_2$-*полуустойчивой* ($\langle\tau, m\rangle_1$-*полуустойчивой*), если она является $\langle\tau, m\rangle$-устойчивой при условии, что сбои могут происходить только при выполнении преобразователей (соответственно — распознавателей).

Через $\mathfrak{N}^{\tau}_{m,t}(\pi)$, где $t \in \{1, 2\}$, будем обозначать множество всех $\langle\tau, m\rangle_t$-полуустойчивых программ, эквивалентных программе π. Скажем, что класс Π является $\langle\tau, m\rangle_t$-замкнутым, если для всех $\pi \in \Pi$

$$\mathfrak{N}^{\tau}_{m,t}(\pi) \cap \Pi \neq \varnothing.$$

Вводим соответствующие функции Шеннона

$$\Gamma^{Б,t}_{\tau,m}(n) = \max_{\pi \in \Pi_n(Б)} \min_{\pi^* \in \mathfrak{N}^{\tau}_{m,t}(\pi) \cap \Pi(Б)} L(\pi^*),$$

где $t \in \{1, 2\}$.

Теорема 2.5. *Пусть $Б$ — произвольный нетривиальный базис и $m \geqslant 1$. Класс программ $\Pi(Б)$ является $\langle\tau, m\rangle_1$-замкнутым тогда и только тогда, когда $\tau \geqslant 2m+1$. При этом, если базис $Б$ приведенный, то для всех n, $m = 1, 2, \ldots$ имеют место оценки*

$$\Gamma^{Б,1}_{\tau,m}(n) = \begin{cases} (2m+1)n & \text{при } \tau \geqslant (m+1)^2, \\ \gamma \leqslant (m+1)^2 n & \text{при } \tau \geqslant 2m+1, \\ \infty & \text{при } \tau \leqslant 2m. \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку необходимость условия $\tau \geqslant 2m+1$ для $\langle\tau, m\rangle$-замкнутости доказывается (см. теорему 2.1) с использованием распознающих программ, то это условие остается необходимым и для $\langle\tau, m\rangle_1$-замкнутости класса $\Pi(Б)$. Достаточность следует из теоремы 2.2.

Далее, оценки $\Gamma^{Б,1}_{\tau,m}(n) = (2m+1)n$ при $\tau \geqslant (m+1)^2$ и $\Gamma^{Б}_{\tau,m}(n) \leqslant (m+1)^2 n$ при $\tau \geqslant 2m+1$ следуют из теорем 2.3 и 2.2 соответственно. Соотношение $\Gamma^{Б,1}_{\tau,m}(n) = \infty$ следует из теоремы 2.1, где показано, что существует распознающая программа $\pi \in \Pi(Б)$ сложности 1, для которой

$$\mathfrak{N}^{\tau}_{m,1}(\pi) = \varnothing$$

при $\tau \leqslant 2m$.

Теорема доказана.

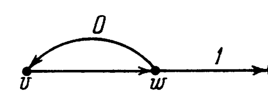

Рис. 12.

Пусть теперь $Б \in \mathscr{B}_1$ и $\pi \in \Pi(Б)$. Нетрудно заметить, что программа π^*, полученная из программы π путем замены каждого преобразователя $x_i := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$ ее $\langle\tau, m\rangle_2$-полуустойчивым расширением (G, μ), где граф G изображен на рис. 12 и

$$\mu(v) \rightleftharpoons x_i := f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}),$$
$$\mu(w) \rightleftharpoons p_f(x_i, x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}),$$

является $\langle\tau, m\rangle_2$-полуустойчивым расширением программы π при $\tau \geqslant 2m+1$. Так как $L(\pi^*) \leqslant 2L(\pi)$, то получаем

Предложение 2.2. *Пусть $Б \in \mathscr{B}_1$ и $\tau \geqslant 2m+1$. Тогда для всех n, $m \in \{0, 1, \ldots\}$*

$$\Gamma^{Б,2}_{\tau,m}(n) \leqslant 2n.$$

ГЛАВА 3
ДОБАВЛЕНИЯ

1. Как явствует из доказательства теоремы 1.2, требования приведенности базиса $Б$ и отсутствия преобразователей в программах, вычисляющих предикаты, существенно используются при доказательстве нижней оценки $L^{Б}_{\lambda,m}(n) \geqslant (m+1)^2 n$. Поэтому может возникнуть вопрос: можно ли при отказе от этих требований существенно понизить верхнюю оценку функции $L^{Б}_{\lambda,m}(n)$? Цель настоящего раздела — отрицательный ответ на поставленный вопрос.

Будем считать, что программа $G_\mu = G_\mu(x_0, \ldots, x_n)$ распознает k-значный предикат ($k \geqslant 2$) $[G_\mu](x_0, \ldots, x_m)$, $m \leqslant n$, если $|V_0(G)| \geqslant 2$, причем все заключительные вершины $V_0(G)$ помечены символами $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ и для любых натуральных чисел $a_0, \ldots, a_m$ и $d \in \{0, \ldots, k-1\}$ процесс вычисления

$$\widehat{G}_\mu(a_0, \ldots, a_m, 0, \ldots, 0) = \{\sigma_0, \ldots, \sigma_n\}$$

конечен и

$$[G_\mu](a_0, \ldots, a_m) = d \Leftrightarrow \sigma_n^+ \eqcirc u_d.$$

Таким образом, основное отличие приведенного определения от определения 3 состоит в том, что в программы, вычисляющие предикаты, разрешается вхождение преобразователей (т. е. отсутствует требование о пустоте множества $V_1(G)$).

Теорема 3.1. *Для любого нетривиального базиса $Б$ и любых λ, m, $n \in \{0, 1, \ldots\}$ справедлива оценка*

$$L^{Б}_{\lambda,m}(n) > \frac{1}{2}(m+1)^2 n.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что достаточно рассматривать нижнюю оценку для функции $L^{Б}_{\infty,m}(n)$, поскольку для всех λ, m, $n \in \{0, 1, \ldots\}$

$$L^{Б}_{\lambda,m}(n) \geqslant L^{Б}_{\infty,m}(n).$$

Далее, так как базис $Б$ нетривиальный, то в нем имеется хотя бы один неконстантный предикат p. Не уменьшая общности дальнейших рассуждений, можно предположить, что предикат p — одноместный, т. е. $p = p(x)$.

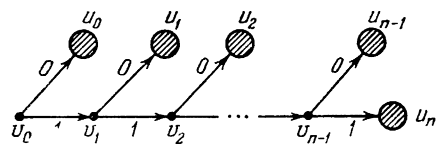

Рис. 13.

Пусть $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Рассмотрим программу $\pi^n = (G_0, \xi)$ в базисе $Б$, где граф G_0 изображен на рис. 13 и для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$ $\xi(v_i) \eqcirc p(x_i)$, где все переменные $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ попарно различны. Ясно, что программа π^n распознает $n+1$-значный предикат $[\pi^n]$ такой, что для любого $t \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и любых натуральных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ имеет место

$$[\pi^n](a_0, \ldots, a_{n-1}) = t \Leftrightarrow \neg p(a_t) \mathop{\&}_{i=0}^{t-1} p(a_i) = 1.$$

Пусть $m \in \{1, 2, \ldots\}$. Через $\pi_m = (G_m, \mu)$ будем обозначать минимальное (∞, m)-надежное расширение программы π^n в классе $П(Б)$, т. е. положим

$$\pi_m \in \mathfrak{M}^\infty_m(\pi^n | Б), \tag{1}$$

$$L(\pi_m) = L^{Б}_{\infty,m}(\pi^n). \tag{2}$$

Займемся теперь доказательством рекуррентного соотношения

$$L(\pi_m) \geqslant L(\pi_{m-1}) + m(n+1) + \frac{n+1}{2}, \tag{3}$$

откуда утверждение теоремы получим путем простого подсчета.

Пусть $t \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Определяем разбиение $\{N_t: t = 0, 1, \ldots, n\}$ декартовой степени N^n множества всех натуральных чисел следующим образом.

Для всех $t \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ положим

$$N_t = \{(a_0, \ldots, a_{n-1}): \underset{0 \leqslant i \leqslant t-1}{\forall i} \; p(a_i) = 1, \, p(a_t) = 0\},$$

причем

$$N_n = \{(a_0, \ldots, a_{n-1}): \underset{0 \leqslant i \leqslant n-1}{\forall i} \; p(a_i) = 1\}.$$

Ясно, что

$$N_{t_1} \cap N_{t_2} = \varnothing \text{ при } t_1 \neq t_2 \tag{4}$$

и, поскольку предикат p общекурсивен, то

$$\bigcup_{t=0}^{n} N_t = \{0, 1, \ldots\}^n, \tag{5}$$

причем для любого $t \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$[\pi^n](\alpha) = t \Leftrightarrow \alpha \in N_t. \tag{6}$$

Для $t \in \{0, 1, \ldots, n\}$ положим

$$A_m^t = \{v \in V(G_m): v \to u_t\},$$

т. е. A_m^t — множество всех вершин графа G_m, являющихся непосредственными предшественниками заключительной вершины u_t.

Поскольку программа π_m — распознающая, то ввиду минимальности программы π_m в классе $\mathfrak{M}_m^\infty(\pi^n \mid Б)$ положительная степень всех вершин $v \in A_m^t$ равна 2, так как в противном случае выбрасывание вершины v не влияло бы на справедливость соотношения (1). Следовательно, для любого $t \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$A_m^t = \{v \in V_2(G_m): v \xrightarrow{\delta} u_t, \;\; \delta \in \{0, 1\}\}.$$

Обозначим через $\bar{A}_m^t$ подмножество множества A_m^t такое, что

$$\bar{A}_m^t = \{v \in A_m^t: v \not\to u_j \text{ при } j \neq t\},$$

где $v \not\to u_j$ означает, что заключительная вершина u_j не является непосредственным последователем вершины v. Легко видеть, что

$$\bar{A}_m^{t_1} \cap \bar{A}_m^{t_2} = \varnothing \text{ при } t_1 \neq t_2. \tag{7}$$

Далее, для $v \in A_m^t$ через $\Delta^t(v)$ будем обозначать число из множества $\{0, 1\}$ такое, что

$$v \xrightarrow{\Delta^t(v)} u_t,$$

т.е. $\Delta^t(v)$ — это число, которым помечена дуга, ведущая из вершины v в заключительную вершину u_t.

Убедимся, что для всех $t \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$|\bar{A}_m^t| \geqslant m. \tag{8}$$

Действительно, пусть для некоторого $t_0 \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$|\bar{A}_m^{t_0}| < m.$$

Определяем μ-искажение $\eta \in \{\mu\}_{m-1}^{\infty}$ следующим образом:

а) для всех $v \in V(G_m) \setminus \bar{A}_m^{t_0}$ $\eta(v) \doteq \mu(v)$,

б) для всех $v \in \bar{A}_m^{t_0}$ $\eta(v) \doteq \Delta^{t_0}(v) \oplus 1$, т. е. вершине v μ-искажение η приписывает тождественно равный $\Delta^{t_0}(v) \oplus 1$ предикат.

Пусть X — путь в графе G_m, порожденный μ-искажением η при некотором начальном состоянии памяти $\alpha \in N_{t_0}$. Возможны два случая.

Случай 1. Путь X — бесконечный. Тогда значение предиката $[(G_m, \eta)](\alpha)$ не определенно. Поскольку $\eta \in \{\mu\}_{m-1}^{\infty} \subseteq \{\mu\}_m^{\infty}$, то имея в виду (6), получаем противоречие с (1).

Случай 2. Путь X — конечен. Пусть $X = \{v_0, v_1, \ldots, v_k \doteq u_{t_0}\}$. Тогда ввиду (1) $v_{k-1} \in A_m^{t_0} \setminus \bar{A}_m^{t_0}$, т. е.

$$v_{k-1} \xrightarrow{\Delta^{t_0}(v_{k-1})} v_{t_0} \quad \text{и} \quad v_{k-1} \xrightarrow{\Delta^{t_1}(v_{k-1})} u_{t_1}$$

при некотором $t_1 \in \{0, 1, \ldots, n\} \setminus \{t_0\}$. Поэтому доопределяя μ-искажение $\eta \in \{\mu\}_{m-1}^{\infty}$ до μ-искажения $\eta^* \in \{\mu\}_m^{\infty}$, полагая $\eta^*(v_{k-1}) \doteq \Delta^{t_1}(v_{k-1})$, получаем, что[1]

$$[(G_m, \eta^*)](\alpha) = t_1 \neq t_0,$$

Откуда, имея в виду (6), получаем противоречие с (1), т. е. с тем, что программа π_m является (∞, m)-надежным расширением программы π^n.

Итак, оценка (8) имеет место. Для любого $t \in \{0, 1, \ldots\}$ обозначим через $\tilde{A}_m^t$ подмножество $\tilde{A}_m^t \subseteq \bar{A}_m^t$ такое, что

$$|\tilde{A}_m^t| = m \tag{9}$$

(такие подмножества существуют ввиду (8)).

Положим, далее, $A_m = \bigcup_{t=0}^{n} A_m^t$ и убедимся, что

$$|A_m| \geqslant m(n+1) + \frac{n+1}{2}. \tag{10}$$

Ввиду (9) имеем, что

$$|\tilde{A}_m| = |\bigcup_{t=0}^{n} \tilde{A}_m^t| = (n+1)m.$$

Поэтому достаточно показать, что

$$|A_m \setminus \tilde{A}_m| \geqslant \frac{n+1}{2}. \tag{11}$$

Действительно, пусть $|A_m \setminus \tilde{A}_m| < (n+1)/2$. Тогда, поскольку положительная степень любой вершины из A_m равна 2, то существует $t_0 \in \{0, 1, \ldots, n\}$ такое, что

$$\tilde{A}_m^{t_0} = A_m^{t_0}. \tag{12}$$

Рассмотрим μ-искажение η такое, что:

1) для всех $v \in V(G_m) \setminus \tilde{A}_m^{t_0}$ $\eta(v) \doteq \mu(v)$,

2) для всех $v \in \tilde{A}_m^{t_0}$ $\eta(v) \doteq \Delta^{t_0}(v) \oplus 1$.

Поскольку $|\tilde{A}_m^{t_0}| = m$, то $\eta \in \{\mu\}_m^{\infty}$. С другой стороны, легко видеть, что для $\alpha \in N_{t_0}$ либо значение предиката $[(G_m, \eta)](\alpha)$ не определенно, либо

$$[(G_m, \eta)](\alpha) = t_1, \text{ где } t_1 \neq t_2.$$

Полученное с (1) противоречие доказывает истинность оценки (11), а следовательно, и оценки (10).

Далее, пусть граф D_{m-1} получается из графа G_m путем удаления всех концевых вершин $v \in A_m$ и направлением всех ведущих в вершину v дуг в любую из заключительных вершин, являющихся непосредственными последователями вершины v.

Рассмотрим программу $\pi^*_{m-1} = (D_{m-1}, \mu)$. Убедимся теперь, что

$$\pi^*_{m-1} \in \mathfrak{M}^{\infty}_{m-1}(\pi^n \mid Б), \tag{13}$$

т. е. (в силу (5)), что для всех $\eta \in \{\mu\}^{\infty}_{m-1}$, $t \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и $\alpha \in \{0, 1, \ldots\}^n$

$$[(D_{m-1}, \eta)](\alpha) = t \Leftrightarrow \alpha \in N_t. \tag{14}$$

Допустим противное. Тогда возможны два случая.

Случай 1. Существуют $\eta_0 \in \{\mu\}^{\infty}_{m-1}$, $t_0 \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и $\alpha_0 \in N_{t_0}$ такие, что

$$[(D_{m-1}, \eta_0)](\alpha_0) = t_1,$$

где $t_1 \neq t_0$.

Пусть $X = \{v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, u_{t_1}\}$ — путь в графе D_{m-1}, порождаемый μ-искажением η_0 при начальном состоянии памяти α_0, и $W = \{w_0, w_1, \ldots \ldots, u_{t_j}\}$, где $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$,— путь в графе G_m, порождаемый μ-искажением η_0 при α_0. Из построения графа D_{m-1} следует, что $v_i \rightleftharpoons w_i$ для $0 \leqslant i \leqslant k-1$, причем $w_k \in A^{t_1}_m$. Поэтому доопределяя μ-искажение $\eta_0 \in \{\mu\}^{\infty}_{m-1}$ до μ-искажения $\eta^*_0 \in \{\mu\}^{\infty}_m$, полагая

$$\eta^*_0(w_k) \rightleftharpoons \Delta^{t_1}(w_k),$$

получаем, что

$$[(G_m, \eta^*_0)](\alpha_0) = t_1 \neq t_0,$$

откуда ввиду (6) получаем противоречие с (1).

Случай 2. Существуют $\eta_0 \in \{\mu\}^{\infty}_{m-1}$ и $t_0 \in \{0, 1, \ldots, n\}$ такие, что для некоторого $\alpha_0 \in N_t$, значение предиката $[(D_{m-1}, \eta_0)](\alpha_0)$ не определено. Но тогда, как следует из построения графа D_{m-1}, путь X в графе D_{m-1}, порождаемый μ-искажением η_0 при начальном состоянии памяти α_0, совпадает с путем W в графе G_m, порождаемым μ-искажением η_0 при α_0. Поскольку путь X бесконечный, то W — бесконечный, и, следовательно, значение предиката $[(G_m, \eta_0)](\alpha_0)$ не определено, что ввиду (6) противоречит (1).

Итак, мы имеем, что

$$\pi^*_{m-1} \in \mathfrak{M}^{\infty}_{m-1}(\pi^n \mid Б).$$

Поскольку ввиду (2) программа π_{m-1} является минимальной в классе $\mathfrak{M}^{\infty}_{m-1}(\pi^n \mid Б)$, то

$$L(\pi_{m-1}) \leqslant L(\pi^*_{m-1}). \tag{15}$$

С другой стороны, используя оценку (10), имеем

$$L(\pi_m) - L(\pi^*_{m-1}) \geqslant m(n+1) + \frac{n+1}{2}. \tag{16}$$

Из (15) и (16) получаем искомое рекуррентное соотношение (3). Поскольку $L(\pi^n) = n$, то окончательно получаем

$$L^{Б}_{\infty, m}(n) \geqslant L(\pi_m) \geqslant (m+1)\frac{n+1}{2} + (n+1)(1+2+\ldots+m) =$$
$$= {}^1/_2(m+1)^2 n + {}^1/_2 m^2 + m.$$

Теорема доказана.

2. В настоящем разделе рассмотрим некоторые алгоритмические трудности проблемы распознавания надежности программ.

Пусть Π — некоторый класс программ и $\Pi/_{\sim}$ — фактор-множество множества Π по отношению функциональной эквивалентности. Множеством *представителей* фактор-множества $\Pi/_{\sim}$ будем считать, как обычно, любое множество Π^*, $\Pi^* \subseteq \Pi$, такое, что для любого класса эквивалентности из $\Pi/_{\sim}$ в Π^* найдется хотя бы один элемент этого класса. Через Π_m обозначим множество всех (∞, m)-надежных программ из класса Π.

Как явствует из теоремы 1.5, если $Б \in \mathscr{B}$, то по каждой программе $\pi \in \Pi (Б)$ можно (за конечное число шагов) строить ее (∞, m)-надежное расширение. Поэтому имеет место

Предложение 3.1. *Пусть $Б \in \mathscr{B}$ и для каждой базисной функции $f \in Б$ программа, распознающая график этой функции, строится эффективно. Тогда для любого $m \geqslant 0$ существует рекурсивное множество представителей фактор-множества $\Pi_m (Б)/_{\sim}$.*

Предложение 3.1 наталкивает на естественный вопрос: является ли рекурсивным множество $\Pi_m (Б)$, т. е. разрешима ли проблема распознавания (∞, m)-надежности в классе $\Pi (Б)$?

Оказывается, что даже при некоторых ограничениях на тип возможных искажений проблема распознавания (∞, m)-надежности программ имеет одинаковую степень трудности с проблемой распознавания функциональной эквивалентности программ.

Далее будем считать, что *область значений* (случайных) *искажений программ в некотором базисе Б ограничена множеством преобразователей и распознавателей в том же базисе Б.*

Пусть $\pi_1 = (G_1, \mu_1)$ и $\pi_2 = (G_2, \mu_2)$ — некоторые программы и $q \rightleftharpoons q (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ — некоторый распознаватель. Тогда через $R_q (\pi_1, \pi_2)$ будем обозначать программу (G, μ), граф которой получается из графов G_1, и G_2 путем: 1) добавления новой вершины (обозначаемой через v_q), положительной степени два, которой интерпретация μ приписывает распознаватель q и 2) направления ведущих из этой вершины дуг в начальные вершины графов G_1 и G_2 соответственно. При этом на вершинах графов G_1 и G_2 интерпретация μ совпадает с интерпретациями μ_1 и μ_2 соответственно.

Класс программ Π назовем m-плотным, если для любых $(G, \mu) \in \Pi$ и $\eta \in \{\mu\}_m^\infty$

$$(G, \eta) \in \Pi.$$

Пусть **1** и **0** — тождественно истинный и тождественно ложный предикаты соответственно.

Теорема 3.2. *Пусть $m \geqslant 1$, Б — произвольный конечный базис из класса базисов $\mathscr{B}$ и Π — некоторый m-плотный класс программ в базисе Б, замкнутый относительно отображения R_0. Тогда проблема распознавания (∞, m)-надежности в классе Π разрешима тогда и только тогда, когда в классе Π разрешима проблема распознавания функциональной эквивалентности.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\pi = (G, \mu)$ — некоторая программа из класса Π, причем $x_0, \ldots, x_n$ суть все переменные, входящие в программу π. Обозначим через $\mathscr{X} (Б)$ множество всех преобразователей $x_i := f (x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$ и распознавателей $p (x_{j_1}, \ldots, x_{j_r})$ таких, что $f, p \in Б$, а множество переменных $\{x_i, x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$ и $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}\}$ имеют непустые пересечения с множеством переменных $\{x_0, \ldots, x_n\}$. Поскольку базис Б конечный, то

$$|\mathscr{X} (Б)| < \infty. \tag{1}$$

Положим, далее,

$$A_m(\pi) = \{(G, \ \eta) : \eta \in \{\mu\}_m^\infty\}$$

и рассмотрим подмножество $B_m(\pi) \subseteq A_m(\pi)$, состоящее из программ π^* таких, что среди переменных, входящих в программу π^*, имеется хотя бы одна переменная, входящая в программу π. Ясно, что $(G, \eta) \in B_m(\pi)$ тогда и только тогда, когда $\eta(v) \in \mathscr{X}(Б)$ для некоторой $v \in V(G)$.

Поэтому в силу (1) имеем (с точностью до переименования переменных)

$$|B_m(\pi)| < \infty. \tag{2}$$

С другой стороны, ввиду m-плотности класса программ Π имеем

$$B_m(\pi) \subseteq \Pi. \tag{3}$$

И, наконец, поскольку, как легко видеть, множество $B_m(\pi)$ строится эффективно и по определению программа π является (∞, m)-надежной тогда и только тогда, когда все программы из $B_m(\pi)$ эквивалентны программе π, то в силу (2) и (3) для распознавания (∞, m)-надежности программы π достаточно использовать разрешимость проблемы функциональной эквивалентности в классе Π.

Необходимость. Пусть $\pi_1, \ \pi_2 \in \Pi$. Путем присоединения фиктивных переменных можно добиться, чтобы $[\pi_1]$ и $[\pi_2]$ были функциями от одних и тех же переменных. Поскольку $Б \in \mathscr{B}$, то используя метод, описанный в теореме 1.5, строим (∞, m)-надежные расширения π_1^* и π_2^* программ π_1 и π_2 соответственно.

Рассмотрим программу $\pi^0 = G_\mu = R_0(\pi_1^*, \ \pi_2^*)$. Поскольку класс Π является замкнутым относительно отображения R_0, то $\pi^0 \in \Pi$. Для завершения доказательства необходимости достаточно убедиться, что

$$\pi_1 \sim \pi_2 \Leftrightarrow \pi^0 \in \Pi_m, \tag{4}$$

т. е. что программы π_1 и π_2 являются эквивалентными тогда и только тогда, когда программа π^0 (∞, m)-надежна.

Действительно, достаточность эквивалентности программ π_1 и π_2 (а тем самым и программ π_1^* и π_2^*) для (∞, m)-надежности программы π^0 следует прямо из того, что программы π_1^* и π_2^* являются (∞, m)-надежными.

Пусть теперь программа π^0 является (∞, m)-надежной. Рассмотрим μ-искажение μ^* такое, что $\mu^*(v_0) \equiv 1$. Ясно, что $\mu^* \in \{\mu\}_m^\infty$, поскольку $m \geqslant 1$. Ввиду (∞, m)-надежности программы π^0 имеем

$$\pi^0 \sim (G, \ \mu^*). \tag{5}$$

С другой стороны, эквивалентность (5) имеет место тогда и только тогда, когда $\pi_1^* \sim \pi_2^*$ (а тем самым и $\pi_1 \sim \pi_2$). Теорема доказана.

Пусть $Б$ — некоторый полный базис. Тогда, как известно, проблема распознавания функциональной эквивалентности в классе программ $\Pi(Б)$ неразрешима. Более того, в классе $\Pi(Б)$ свойство функциональной эквивалентности не является даже рекурсивно перечислимым. С другой стороны, легко видеть, что класс всех программ в любом базисе является m-плотным для любого $m \geqslant 0$ и замкнутым относительно отображения R_0. Следовательно, используя теорему 3.2, получаем следующее альтернативное предложению 3.1 утверждение.

Предложение 3.2. *Для любого полного базиса $Б$ и любого $m \geqslant 1$ множество $\Pi_m(Б)$ не является даже рекурсивно-перечислимым.*

В заключение приведем пример нетривиального класса программ с разрешимой проблемой распознавания (∞, m)-надежности.

Пример. Пусть $\mathscr{Y}$ — класс программ циклической глубины один (т. е. все циклы в программах из $\mathscr{Y}$ не пересекаются) в полном базисе

$\{0, x+1; x=y\}$. Пусть $m \geqslant 0$. Ясно, что класс $\mathcal{Y}$ является m-плотным и замкнутым относительно отображения R_0. Из результатов работы Ю. И. Янова [11] следует, что в классе $\mathcal{Y}$ разрешимы все свойства, выразимые в арифметике Пресбургера и, в частности, свойство эквивалентности. Поэтому, используя теорему 3.2, получаем, что в классе $\mathcal{Y}$ разрешима и проблема распознавания (∞, m)-надежности.

Автор выражает искреннюю благодарность Ю. И. Янову за постановку задачи и ценные советы при ее решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириенко Г. И. О самокорректирующихся схемах из функциональных элементов.— Проблемы кибернетики, вып. 12. М.: Наука, 1964, с. 29—37.
2. Кириенко Г. И. Синтез самокорректирующихся схем из функциональных элементов для случая растущего числа ошибок в схеме.— Дискретный анализ, вып. 16, Новосибирск, 1970, с. 38—43.
3. Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем.— Проблемы кибернетики, вып. 10, М.: Физматгиз, 1963, с. 63—98.
4. Мадатян Х. А. О синтезе схем, корректирующих замыкание контактов.— Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 2, с. 290—293.
5. Нечипорук Э. И. О топологических принципах самокорректирования. I.— Проблемы кибернетики, вып. 21, М.: Наука, 1960, с. 5—102.
6. Нечипорук Э. И. О топологических принципах самокорректирования. II.— Проблемы кибернетики, вып. 26. М.: Наука, 1973, с. 19—26.
7. Потапов Ю. Г., Яблонский С. В. О синтезе самокорректирующихся контактных схем.— Докл. АН СССР, 1960, т. 134, № 3, с. 544—547.
8. Редькин Н. П. О самокорректировании контактных схем.— Проблемы кибернетики, вып. 33. М.: Наука, 1978, с. 119—138.
9. Улиг Д. О синтезе самокорректирующихся схем из функциональных элементов с малым числом надежных элементов.— Матем. заметки, 1974, т. 15, вып. 6, с. 937—944.
10. Улиг Д. Самокорректирующиеся контактные схемы, исправляющие большое число ошибок.— Докл. АН СССР, 1978, т. 241, № 6, с. 1273—1276.
11. Янов Ю. И. О вычислениях в одном классе программ.— Проблемы кибернетики, вып. 32. М.: Наука, 1977.

Поступило в редакцию 14 XII 1979