É. I. Nechiporuk, Rectifier networks, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1963, Volume 148, Number 1, 50–53

Доклады Академии наук СССР
1963. Том 148, № 1

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Э. И. НЕЧИПОРУК

О ВЕНТИЛЬНЫХ СХЕМАХ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 4 VII 1962)

Рассмотрим реализацию булевских матриц вентильными схемами*. Назовем глубиной вентильной схемы наибольшую из длин цепей, соединяющих входные и выходные полюса схемы. Обозначим через $B_m(p, q)$ функцию Шеннона для реализаций (p, q)-матриц** схемами глубины не более чем m и через $B(p, q)$ — функцию Шеннона для реализаций схемами произвольной глубины. В [1] получена асимптотическая оценка для $B(p_n, q_n)$ при условии $\nu_n = \dfrac{\lg_2 q_n}{\lg_2 p_n} \to 0$ (и некоторых других). При этом оказывается, что $B(p_n, q_n) \sim B_2(p_n, q_n)$. Ниже удается получить оценку $B(p_n, q_n) \sim B_3(p_n, q_n)$ при условии, что $\lim \nu_n$ существует и принадлежит некоторому нигде не плотному множеству точек интервала $[0,1]$.

Оценки сложности вентильных схем имеют многочисленные приложения, например, вентильными схемами почти однозначно описывается реализация линейных преобразований.

1^0. Обозначим через $\chi(\mathfrak{A})$ матрицу, реализуемую схемой $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A}'$ — (p, r)-схема и $\mathfrak{A}''$ — (r, q)-схема. Обозначим через $\mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}''$ (p, q)-схему, получающуюся в результате отождествления l-го выходного полюса схемы $\mathfrak{A}'$ с l-м входным полюсом схемы $\mathfrak{A}''$ $(l = 1, \ldots, r)$.

Лемма.

$$\chi(\mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}'') = \chi(\mathfrak{A}') \times \chi(\mathfrak{A}'').$$

(*Символ* $\times$ *обозначает также умножение матриц.*)

Обозначим через $\|A\|$ число единиц в матрице A. Обозначим через $\mathfrak{B}(p_n, q_n, \alpha_n)$ класс всех булевских (p_n, q_n)-матриц A таких, что $\|A\| = \alpha_n p_n q_n$ (условия $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$ и $\alpha_n p_n q_n$—натуральное число в дальнейшем подразумеваем, не оговаривая).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*:

а) $q_n \leqslant p_n$;

б) $\alpha_n q_n \to \infty$;

в) $\lg_2 p_n / \lg_2 \dfrac{1}{\alpha_n} \to \rho$, *где* ρ — *целое число, большее нуля*;

г) $p_n \alpha_n^\rho \to \infty$.

Тогда для $\mathfrak{B}(p_n, q_n, \alpha_n)$

$$B_2(p_n, q_n) \sim \frac{\alpha_n p_n q_n}{\rho}.$$

Доказательство. Нижняя оценка получается как в [1].

Верхняя оценка. Пусть $D_n \in \mathfrak{B}(p_n, q_n, \gamma_n)$, $\beta_n \leqslant \gamma_n \leqslant \alpha_n$, где β_n — произвольный параметр, удовлетворяющий условиям

$$\frac{\beta_n}{\alpha_n} \to 0, \quad \beta_n q_n \to \infty, \quad p_n \beta_n^\rho \to \infty.$$

* В настоящей работе используется определение вентильной (p, q)-схемы, введенное в [1]

** (p, q)-матрицей называем матрицу, имеющую p строк и q столбцов.

Если n достаточно велико, то в матрице D_n существует (t_n, ρ)-подматрица, состоящая из одних единиц, при этом $t_n \to \infty$. Действительно, число всех $(1, \rho)$-подматриц матрицы D_n, состоящих из одних единиц, не меньше чем $p_n C^{\rho}_{[\gamma_n q_n]}$ (в силу того, что наименьшее число таких подматриц будет в случае равномерного распределения единиц по строкам матрицы D_n). Назовем типом $(1, \rho)$-подматрицы систему номеров столбцов матрицы D_n, в которых расположена эта подматрица. t_n различных $(1, \rho)$-подматриц одного типа образуют (t_n, ρ)-подматрицу. Так как число типов равно $C^{\rho}_{q_n}$, то существует, по крайней мере, один тип, к которому принадлежат, по крайней мере,

$$t_n = \left] \frac{p_n C^{\rho}_{[\gamma_n q_n]}}{C^{\rho}_{q_n}} \right[$$

$(1, \rho)$-подматриц, состоящих из одних единиц. $t_n \sim p_n \gamma_n^{\rho}$, так как $\gamma_n q_n \to \infty$.

Опишем процесс построения матриц $D_n^{(k)}$, $k = 1, \ldots, N_n(\beta_n) + 1$. Обозначим через $\gamma_n^{(k)}$ число $\|D_n^{(k)}\| / p_n q_n$. Положим $D_n^{(1)} = A_n$. Если $\beta_n \leqslant \gamma_n^{(k)}$, то, по предыдущему, выделим в матрице $D_n^{(k)}$ $(t_n^{(k)}, \rho)$-подматрицу, состоящую из одних единиц; обозначим ее через $a_n^{(k)}$. Обозначим через $A_n^{(k)}$ матрицу, получающуюся из $D_n^{(k)}$ заменой всех элементов на нули, кроме элементов подматрицы $a_n^{(k)}$, и через $D_n^{(k+1)}$ —матрицу, получающуюся из $D_n^{(k)}$, заменой на нули всех элементов подматрицы $a_n^{(k)}$; имеем $D_n^{(k)} = A_n^{(k)} \vee D_n^{(k+1)}$. Если $\gamma_n^{(k)} < \beta_n$, то полагаем $k = N_n(\beta_n) + 1$. Таким образом, процесс состоит в последовательном выделении подматриц, заполненных одними единицами; образующиеся матрицы становятся все более «жидкими», и процесс заканчивается, как только образуется матрица, содержащая менее чем $\beta_n p_n q_n$ единиц.

Обозначим через H_n матрицу $D_n^{(N_n(\beta_n)+1)}$. Имеем $A_n = A_n^{(1)} \vee \ldots \vee A_n^{(N_n(\beta_n))} \vee H_n$, $\min\limits_{k=1, \ldots, N_n(\beta_n)} t_n^{(k)} \gtrsim p_n \beta_n^{\rho}$, $\|H_n\| < \beta_n p_n q_n$. Представим каждую матрицу $A_n^{(k)}$ в виде $A_n^{(k)} = F_n^{(k)} \times G_n^{(k)}$, где $F_n^{(k)}$ —$(p_n, 1)$-матрица, $G_n^{(k)}$—$(1, q_n)$-матрица $\|F_n^{(k)}\| = t_n^{(k)}$, $\|G_n^{(k)}\| \rho$, и пусть

$$F_n = (F_n^{(1)}, \ldots, F_n^{(N_n(\beta_n))}), \quad G_n = \begin{pmatrix} G_n^{(1)} \\ \vdots \\ G_n^{(N_n(\beta_n))} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A_n = F_n \times G_n \vee H_n, \tag{1}$$

$$\|F_n\| \leqslant \frac{\alpha_n p_n q_n}{\rho}, \quad \|G_n\| \lesssim \frac{\alpha_n q_n}{\beta_n^{\rho}}, \quad \|H_n\| < \beta_n p_n q_n. \tag{2}$$

Реализуя каждую матрицу F_n, G_n, H_n схемой глубины 1, получаем, в силу леммы, схему для A_n. В силу (2) $B_2(p_n, q_n) \lesssim \alpha_n p_n q_n / \rho$. Теорема доказана.

Замечание. Если выполнены условия а), б), г) и в условии в) ρ — нецелое число, то

$$B_2(p_n, q_n) \lesssim \frac{\alpha_n p_n q_n}{[\rho]}.$$

Можно показать, что в этом случае тривиальная мощностная нижняя оценка неэффективна, т. е. может быть улучшена.

2°. Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

а) $q_n \leqslant p_n$;

б) $q_n \to \infty$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg_2 q_n}{\lg_2 p_n} = \frac{\mu}{\mu(\rho-1)+\rho}$, *где* μ, ρ — *целые числа, бо́льшие нуля* *.

Тогда

$$B(p_n, q_n) \sim B_3(p_n, q_n) \sim \frac{p_n q_n}{\lg_2(p_n q_n)}.$$

Доказательство. Нижняя оценка — мощностная.

Верхняя оценка. Пусть A_n — (p_n, q_n)-матрица. Введем параметр ϑ_n и разобьем матрицу A_n на $T_n = \left]\frac{q_n}{\vartheta_n}\right[$ неперемежающихся $(p_n, \vartheta_{n,k})$-подматриц $A_n^{(k)}$, $A_n = (A_n^{(1)}, \ldots, A_n^{(T_n)})$, так, что $\vartheta_{n,k} = \vartheta_n$ при $k = 1, \ldots, T_n - 1$ и $\vartheta_{n,T_n} \leqslant \vartheta_n$. Образуем $(2^{\vartheta_{n,k}}, \vartheta_{n,k})$-матрицу $\Sigma_{n,k}$, строки которой — всевозможные различные векторы, взятые в произвольном порядке. Очевидно, существуют такие $(p_n, 2^{\vartheta_{n,k}})$-матрицы $B^{(k)}(A_n)$, имеющие ровно по одной единице в каждой строке, что $A_n^{(k)} = B^{(k)}(A_n) \times \Sigma_{n,k}$, $k = 1, \ldots, T_n$. Введем матрицы $B(A_n) = (B^{(1)}(A_n), \ldots, B^{(T_n)}(A_n))$,

$$\Sigma_n = \begin{pmatrix} \Sigma_{n,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Sigma_{n,T_n} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A_n = B(A_n) \times \Sigma_n.$$

Обозначим через q_n' число $\sum\limits_{k=1}^{T_n} 2^{\vartheta_{n,k}}$. Введем параметр λ_n и разобьем матрицу $B(A_n)$ на $U_n = \left]\frac{p_n}{\lambda_n}\right[$ неперемежающихся $(\lambda_{n,i}, q_n')$-подматриц $B_i(A_n)$,

$$B(A_n) = \begin{pmatrix} B_1(A_n) \\ \vdots \\ B_{U_n}(A_n) \end{pmatrix}$$

так, что $\lambda_{n,i} = \lambda_n$ при $i = 1, \ldots, U_n - 1$ и $\lambda_{n,U_n} \leqslant \lambda_n$. Образуем $(\lambda_{n,i}, C_{\lambda_{n,i}}^{\mu+1})$-матрицу $\mathfrak{S}^{(n,i)}$, столбцы которой — всевозможные различные векторы, содержащие ровно по $\mu + 1$ единиц, взятые в произвольном порядке (если $\lambda_{n,i} < \mu + 1$, то полагаем $C_{\lambda_{n,i}}^{\mu+1} = 0$). Очевидно, существуют такие $(C_{\lambda_{n,i}}^{\mu+1}, q_n')$-матрицы $C_i(A_n)$ $(i = 1, \ldots, U_n)$, что $B_i(A_n) = \mathfrak{S}^{(n,i)} \times C_i(A_n) \vee B_i^*(A_n)$, где $\|B_i^*(A_n)\| \leqslant (\mu + 1) q_n'$, $\frac{\lambda_n T_n}{\mu+1} - q_n' \leqslant \|C_i(A_n)\| \leqslant \frac{\lambda_n T_n}{\mu+1}$ (произведение $(a, 0)$-матрицы на $(0, b)$-матрицу определяем как (a, b)-матрицу, состоящую из одних нулей). Введем матрицы

$$\mathfrak{S}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}^{(n,1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathfrak{S}^{(n,U_n)} \end{pmatrix}, \quad C(A_n) = \begin{pmatrix} C_1(A_n) \\ \vdots \\ C_{U_n}(A_n) \end{pmatrix}, \quad B^*(A_n) = \begin{pmatrix} B_1^*(A_n) \\ \vdots \\ B_{U_n}^*(A_n) \end{pmatrix}.$$

* Условие г) включает важный в приложениях случай, когда $p_n \asymp q_n$.

Тогда

$$B(A_n) = \mathfrak{S}^{(n)} \times C(A_n) \vee B^*(A_n). \tag{4}$$

Обозначим через p'_n число $\sum_{i=1}^{U_n} C_{\lambda_n, i}^{\mu+1}$; $C(A_n)$ — (p'_n, q'_n)-матрица; обозначим через α_n число $\|C(A_n)\| / p'_n q'_n$ и через ν_n — число $\lg_2 q_n/\lg_2 p_n$.

Введем для параметров ϑ_n, λ_n условия: 1) $\lambda_n/2^{\vartheta_n} \to \infty$; 2) $q_n/\vartheta_n\lambda_n^\mu \to \infty$. Тогда $T_n \sim q_n/\vartheta_n$, $q'_n \sim q_n 2^{\vartheta_n}/\vartheta_n$, $U_n \sim p_n/\lambda_n$, $p'_n \sim p_n\lambda_n^\mu/(\mu+1)!$, $\|C(A_n)\| \sim$ $\sim p_n q_n/(\mu+1)\vartheta_n$, $\alpha_n \sim \mu!/2^{\vartheta_n}\lambda_n^\mu$, $\alpha_n q'_n \to \infty$.

Введем, далее, условия: 3) $\lg_2 p'_n \Big/ \lg_2 \frac{1}{\alpha_n} \to \rho$; 4) $p'_n \alpha_n^\rho \to \infty$.

Введем параметр β_n и условия: 5) $\beta_n 2^{\vartheta_n}\lambda_n^\mu \to 0$; 6) $\beta_n q_n 2^{\vartheta_n}/\vartheta_n \to \infty$; 7) $p_n\lambda_n^\mu\beta_n^\rho \to \infty$.

Применим к $C(A_n)$ конструкцию теоремы 1; в силу (1), (3), (4) $C(A_n) = F_n \times G_n \vee H_n$ и

$$A_n = \mathfrak{S}^{(n)} \times F_n \times (G_n \times \Sigma_n) \vee (\mathfrak{S}^{(n)} \times H_n \vee B^*(A_n)) \times \Sigma_n.$$

Схему для A_n получаем из схем глубины 1 для F_n, $\mathfrak{S}^{(n)}$, $G_n \times \Sigma_n$, H_n, $B^*(A_n)$, Σ_n (лемма). Имеем $\|\mathfrak{S}^{(n)}\| \lesssim p_n\lambda_n^\mu$, $\|\Sigma_n\| \lesssim q_n 2^{\vartheta_n}$, $\|B^*(A_n)\| \lesssim$ $\lesssim \frac{p_n q_n 2^{\vartheta_n}}{\vartheta_n\lambda_n}$, и, в силу (2) $\|F_n\| \lesssim p_n q_n/(\mu+1)\rho\vartheta_n$, $\|G_n \times \Sigma_n\| \leqslant \vartheta_n \|G_n\| \lesssim$ $\lesssim \frac{q_n}{\lambda_n^\mu\beta_n^\rho}$, $\|H_n\| \lesssim \frac{\beta_n p_n q_n 2^{\vartheta_n}\lambda_n^\mu}{\vartheta_n}$.

Для того чтобы выполнялись соотношения $B_3(p_n, q_n) \sim \|F_n\| \lesssim$ $\lesssim p_n q_n/\lg_2(p_n q_n)$, достаточно, чтобы выполнялись еще условия:

8) $(\mu+1)\rho\vartheta_n \gtrsim (1+\nu_n)\lg_2 p_n$; 9) $\lambda_n^\mu \lg_2 p_n/q_n \to 0$; 10) $2^{\vartheta_n}\lg_2 p_n/p_n \to 0$; 11) $2^{\vartheta_n}\lg_2 p_n/\vartheta_n\lambda_n \to 0$; 12) $\lg_2 p_n/p_n\lambda_n^\mu\beta_n^\rho \to 0$; 13) $\beta_n 2^{\vartheta_n}\lambda_n^\mu \lg_2 p_n/\vartheta_n \to 0$.

По условиям теоремы, $\nu_n = \frac{\mu}{\mu(\rho-1)+\rho} + \varphi_n$, где $\varphi_n \to 0$.

Положим при достаточно больших n

$$\lambda_n = \left[p_n^{\frac{1}{\mu(\rho-1)+\rho}+\delta_n}\right], \quad \vartheta_n = \left[\left(\frac{1}{\mu(\rho-1)+\rho} + \xi_n\right)\lg_2 p_n\right]; \quad \frac{1}{\beta_n} = p_n^{\frac{\mu+\cdot}{\mu(\rho-1)+\rho}+\eta_n};$$

$$\delta_n = \frac{\varphi_n - 3\lg_2\lg_2 p_n/\lg_2 p_n}{\mu}; \quad \xi_n = -3\frac{\lg_2\lg_2 p_n}{\lg_2 p_n} + \min\left[\delta_n\ \mu\left(\frac{1}{\rho} - 1\right)\delta_n\right];$$

$$\eta_n = \mu\delta_n + \xi_n + \frac{\lg_2\lg_2 p_n}{\lg_2 p_n}.$$

Тогда условия 1) — 13) выполнены. Теорема доказана.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
3 VII 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. Б. Лупанов, ДАН, 111, 6, 1171 (1956).