für die Kommunikationskomplexität $c(A)$ von A liefert. Somit haben Matrizen A mit $\mathrm{rk}(A) = n$ die maximale Kommunikationskomplexität.

6.3 Homogene Gleichungssysteme

Ein Gleichungssystem der Form $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ heißt *homogen*. Ist $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ die durch die Matrix A definierte lineare Abbildung, so ist die Lösungsmenge von $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ genau der Nullraum $\mathrm{Null}\, f_A$ dieser Abbildung. Der Bildraum $\mathrm{Bild}\, f_A = \{A\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^n\}$ der Abbildung f_A ist der Spaltenraum von A und seine Dimension ist daher gleich $\mathrm{rk}(A)$. Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen (Satz 5.48 in Abschnitt 5.6.2) gilt somit

$$\dim(\mathrm{Null}\, f_A) = \dim \mathbb{F}^n - \dim(\mathrm{Bild}\, f_A) = n - \mathrm{rk}(A)$$

und wir erhalten

Korollar 6.7: Dimensionsformel für homogene Gleichungssysteme
Für jede $m \times n$ Matrix A über einem Körper $\mathbb{F}$ ist der Lösungsraum von $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ein Unterraum von $\mathbb{F}^n$ der Dimension $n - \mathrm{rk}(A)$.

Insbesondere hat $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ mindestens eine nicht-triviale Lösung $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, wenn $m < n$ gilt, d. h. wenn die Zahl der Variablen größer als die Zahl der Gleichungen ist.

Mit homogenen Gleichungssystemen kann man die lineare Unabhängigkeit bzw. lineare Abhängigkeit von Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ überprüfen: Fasse die Vektoren als Spalten einer Matrix A auf und schaue, welche Lösungen das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ hat. Jede Lösung $\boldsymbol{x}$ gibt uns eine Linearkombination des Nullvektors. Also sind $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ genau dann linear unabhängig, wenn $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ keine weiteren Lösungen außer $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ hat, was nach Korollar 6.7 genau dann passiert, wenn $\mathrm{rk}(A) = n$ gilt.

Eine quadratische $n \times n$ Matrix heißt *singulär*, falls $\mathrm{rk}(A) < n$ gilt. Gilt $\mathrm{rk}(A) = n$, so sagt man, dass A einen *vollen Rang* hat; solche Matrizen nennt man auch *regulär*. Eine nützliche Merkregel ist:

$$A \text{ ist regulär (hat vollen Rang)} \iff \text{aus } A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ folgt } \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\,.$$

Ist $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ein lineares Gleichungssystem mit $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$, so bildet seine Lösungsmenge

$$L(A, \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^n \colon A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$

keinen Vektorraum mehr, da zum Beispiel der Nullvektor nicht in $L(A, \boldsymbol{b})$ liegt. Die Mengen von der Form $L(A, \boldsymbol{b})$ heißen in der Literatur *affine Räume*. Hat man aber mindestens eine einzige Lösung $\boldsymbol{x}_0$ von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ bestimmt, so kann man *alle* Lösungen eines inhomogenen Systems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ durch die Lösungen des homogenen Systems $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ einfach angeben:

$$L(A, \boldsymbol{b}) = L(A, \mathbf{0}) + \boldsymbol{x}_0 = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0 \colon A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}\,.$$

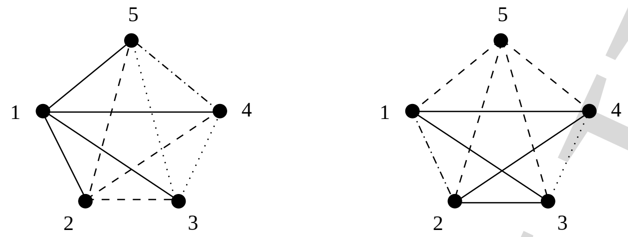

Bild 6.2: Zwei Zerlegungen von K_5 in jeweils 4 bipartiten Cliquen.

Wir haben also die folgende Merkregel:

> Eine *allgemeine* Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist eine *allgemeine* Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
> plus *irgendeine* Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Aus $A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$ folgt nämlich $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ genau dann, wenn $A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$ und somit auch $\boldsymbol{x} \in L(A, \boldsymbol{0}) + \boldsymbol{x}_0$ gilt.

Korollar 6.8:

Ist A eine $m \times n$ Matrix über einem Körper $\mathbb{F}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{F}^m$, so gilt für die Lösungsmenge $L(A, \boldsymbol{b})$ des linearen Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\dim L(A, \boldsymbol{b}) \leq \dim L(A, \boldsymbol{0}) + 1 = n - \mathrm{rk}(A) + 1\,.$$

Wir geben nun eine Anwendung der Dimensionsformel für homogene Gleichungssysteme in einer Situation an, wo man auf den ersten Blick keine Verbindungen zur linearen Algebra erkennen kann. Dass solche überraschenden Verbindungen doch existieren, zeigt wie vielseitig die Anwendungen der linearen Algebra sein können.

6.3.1 Anwendung: Zerlegung in bipartiten Cliquen*

Sei K_n ein vollständiger ungerichteter Graph mit der Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$. Der Graph besitzt alle $\binom{n}{2}$ möglichen Kanten, und wir wollen diese Kanten in möglichst wenige disjunkte bipartite Cliquen zerlegen. Eine ***bipartite Clique*** ist ein bipartiter Graph $K_{A,B} = (A \cup B, E)$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $E = \big\{\{i, j\} \colon i \in A \text{ und } j \in B\big\}$. Zwei Graphen heißen disjunkt, falls sie keine gemeinsamen Kanten haben.

Sei $f(n)$ die kleinstmögliche Anzahl paarweise disjunkter bipartiter Cliquen in einer Zerlegung von K_n. Man kann sich leicht überzeugen, dass $f(n) \leq n - 1$ gilt. Dazu reicht es Knoten in der Reihenfolge 1,2, $\dots, n-1$ zusammen mit ihren inzidenten Kanten zu entfernen; dies erzeugt eine Zerlegung von K_n in disjunkte »Sterne«, d. h. bipartite Cliquen K_{A_i,B_i} mit $A_i = \{i\}$ und $B_i = \{i+1, \dots, n\}$, $i = 1, \dots, n-1$ (siehe Bild 6.2 links). Dies ist aber nur eine sehr spezielle Zerlegung und schließt die Existenz von anderen, eventuell besseren Zerlegungen nicht aus: So gibt uns Bild 6.2 (rechts) noch eine mögliche Zerlegung. Das klassische Resultat von Graham und Pollack aus dem Jahre 1972 besagt, dass die erste triviale Zerlegung in Sterne auch die beste ist! Es gilt nämlich $f(n) \geq n - 1$.

Der Originalbeweis blieb ziemlich kompliziert bis Trevberg 1982 einen überraschend einfachen Beweis mittels der linearen Algebra gefunden hat.

Zunächst lohnt es sich, die Frage zu verallgemeinern: [2] Was ist die kleinste Zahl d, so dass sich die Summe

$$S(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$$

als eine Summe der Produkte

$$S(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{d} \Big(\sum_{j\in A_i} x_j\Big)\cdot\Big(\sum_{j\in B_i} x_j\Big) = \sum_{i=1}^{d} L_i(\boldsymbol{x})\cdot R_i(\boldsymbol{x})$$

mit $A_i \cap B_i = \emptyset$ für alle $i = 1, \dots, d$ darstellen lässt? Dazu setzen wir

$$T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

und beobachten, dass

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\cdot\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j = T(\boldsymbol{x}) + 2S(\boldsymbol{x})$$

und somit auch

$$T(\boldsymbol{x}) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 - 2S(\boldsymbol{x}) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 - 2\cdot\sum_{i=1}^{d} L_i(\boldsymbol{x})\cdot R_i(\boldsymbol{x}) \tag{6.1}$$

für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt. Wir betrachten nun das homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} L_1(\boldsymbol{x}) &= 0\,, \\ &\dots \\ L_d(\boldsymbol{x}) &= 0\,, \\ x_1 + \dots + x_n &= 0 \end{aligned}$$

und nehmen an, dass $d \le n-2$ gilt. Dann besitzt das Gleichungssystem mehr Variablen als Gleichungen und muss daher nach Korollar 6.7 mindestens eine Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{0}$ haben. Aus $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ und $L_i(\boldsymbol{x}) = 0$ für alle $i = 1, \dots, d$ folgt, dass die rechte Seite der Gleichung (6.1) für dieses $\boldsymbol{x}$ gleich Null sein muss. Aber die linke Seite ist ungleich Null, denn aus $\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{0}$ folgt $T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \ne 0$. Somit liefert unsere Annahme $d \le n-2$ einen Widerspruch, woraus $d \ge n-1$ folgt. □

2 Dieser Trick – Verallgemeinerung der ursprünglichen Frage – ist als das »Erfinderparadox« bekannt: Allgemeinere Aussagen sind oft *leichter* zu behandeln!