Testfragen zur Vorlesung "Mathematische Grundlagen der Informatik"

Mengen und Reliationen

- Wie Zeigt man Mengnegleichheit?
- Wieviele Elemente hat die Menge $M = \Big\{2, \{\emptyset\}, \{1,3\}\Big\}$?
- Relationen können asymmetrsich oder antisymmetrisch sein. Was für ein Unterschied ist hier?
- Wie unterscheidet sich eine Äquivalenzrelation und eine Ordnungsrelation?
- Warum sind je zwei verschiedene Äquivalenzklassen disjunkt?
- Wenn eine Funktion bijektiv ist, ist dann sie auch surjektiv?
- Sei A eine endliche Menge. Gebe eine Funktion $f : A \to A$ an, die surjektiv aber nicht injektiv ist.
- Zwei unendlichen Mengen haben die gleiche Kardinalität, wenn ...?
- Sei $f \subseteq \{\text{Fahrgäste}\} \times \{\text{Sitzplätze}\}$ eine Relation. Wann ist f eine Funktion? Wann ist f injektiv? Wann ist f surjektiv? Wann ist f bijektiv?
- Sei A eine beliebige Menge. Warum gibt es keine surjektive Abbildung $f : A \to 2^A$?
- Warum ist die Menge $\mathbb{R}$ nicht abzählbar?

Graphen

- Wann ist ein Graph zusammenhängend? Wann sind zwei Graphen isomorph? Möge zwei Graphen isomorph sein, was kann man dann über die Grade ihrer Knoten sagen?
- Wie unterscheiden sich Euler'sche und Hamilton'sche Kreise? Welche Graphen besitzen Euler'sche Kreise?
- Entnimmt man eine Kante aus einem Baum. Was entsteht dann? Wird in einem Baum eine Kante hinzugefügt, was ensteht dann?
- Ein Baum hat N Bläter. Wie tief muss er dann sein?

Logik

- Wie lautet die Kontrapositionsregel?
- Ist $\neg B \to \neg A$ eine Negation von $A \to B$?
- Wie negiert man die Aussagen mit Quantoren? Was ist $\neg(\exists x\ A(x) \to \forall y\ \neg B(y))$?
- Gebe die Aussageform (mit Quantoren) für die Aussage "Jede Primzahl ist ungerade" und negiere sie.
- Negiere die Induktionsformel $P(0) \wedge \forall n[P(n) \to P(n+1))]$. Wie lautet die Negation in Umgangssprache?
- Warum ist Induktion richtig?
- Was ist schwer an der mathematischen Induktion? Warum ist sie ein *konstruktives* Beweisverfahren?
- Was hat die Induktion mit dem Entwurf von Algorithmen zu tun?

Kombinatorik

- Warum gilt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$?
- Wieviele k-elementige Teilmengen hat eine n-elementige Menge?
- Wieviele gibt es Vektoren $(x_1, \ldots, x_k)$ mit $x_i \in \{1, \ldots, n\}$?
- Wieviele Möglichkeiten gibt es einen Vektor $(x_1, \ldots, x_k)$ mit $x_i \in \{1, \ldots, n\}$ und $x_i \neq x_j$ auszuwählen?
- Wieviele Lösungen hat eine Gleichheit $x_1 + \cdots + x_n = k$ unter der Bedignung, dass alle $x_i \geqslant 0$ sind?
- Was ist $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = ?$
- Warum muss es in *jeder* Menge $S \subseteq \mathbb{N}$ von $|S| = 8$ ganzen Zahllen zwei Zahlen $x \neq y \in S$ geben, so dass $x - y$ durch 7 teilbar ist?
- Warum muss es in jeder Gruppe von 6 Leuten 3 Leute geben, die paarweise befreundet oder die paarweise verfeindet sind?
- Warum ist $|A \cup B \cup C| = ?$ Warum?
- Sei K das dürchschnittliche Kapital (in Euro) eines deutchen Bürgers. Betrachte eine Person als "reich", falls sie mindestens $K/2$ Euro besitzt. Zeige, dass die reichen Personen mindestens die Hälfte aller Gelder haben.

Algebra

- Warum ist der Euklid-Alogorithmus korrekt?
- Wann hat $a \in \mathbb{Z}_n$ die multiplikative Inverse modulo n?
- Was ist $2 - 3$ in $\mathbb{Z}_4$?
- Was sind $3/2$ und $2/3$ in $\mathbb{Z}_5$?
- Wie findet man die multiplikative Inverse von 13 modulo 54?
- Sei p prim. Was ist $a^{-1} \bmod p$?
- Welche Bijektion beschreibt der Chinesischer Restsatz in dem Fall von zwei Gleichungen?
- Seien $1 \leqslant a \neq b \leqslant N$ zwei ganze Zahlen. Wieviele primzahlen p mit $p \geqslant M$ mit $a \equiv b (\bmod p)$ kann dann es geben?
- Ist $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe? Ist $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe? Wann ist $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe?
- Wenn die Kürzungsregel in $(G, \circ)$ gilt, welche Eigenschaften G und $\circ$ noch haben müssen, um eine Gruppe zu bilden?
- $n \geqslant 2$ sei beliebig. Welche elemente $a \in \mathbb{Z}_n$ eine multiplikative Gruppe bilden?
- Wie lautet der Satz von Lagrange über die Gruppenordnung?
- Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe und $a \in G$. Was ist $a^{|G|} = ?$
- Wann ist eine endliche Gruppe $(G, \circ)$ zyklisch?
- Wann sind zwei endliche Gruppen $(G, \circ)$ und $(H, *)$ isomorph?
- Wann sind zei *zykliche* Gruppen $(G, \circ)$ und $(H, *)$ isomorph?
- Was ist die Charakteristik eines endlichen Körpers?
- Wann ist $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ein Körper?
- Wie dividiert man zwei Polynome?
- Wieviele Nullstellen ein Polynom vom Grad n haben kann?

- Polynome $p(x)$ und $q(x)$ mögen Grad höchstens d haben. Wie groß kann dann die Menge $A = \{a \in \mathbb{R} : p(a) = q(a)\}$ sein?
- Seien n verschiedene Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ beliebige n Werte. Gebe ein Polynom $p(x)$ vom Grad $\leqslant n-1$ mit $p(a_i) = b_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$ an. Viewiele soche Polynome p gibt es?

Folgen und Reihen

- Wie unterscheiden sich arithmetische und geometrische Folgen?
- $\sum_{k=1}^{n} k =$? Wie zeigt man dass?
- $\sum_{k=0}^{n} x^k =$? Wie zeigt man dass?
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(?)$
- Warum divergiert die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$?
- Was ist eine Nullfolge? Was ist $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ für eine Zahl x mit $|x| < 1$? Und mit $x > 1$?
- Eine Folge sei monoton. Wann konvergiert sie?
- Was ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$?
- (a_n) sei eine monoton fallende und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Konvergiert dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?
- (a_n) sei *keine* fallende Nullfolge. Kann dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ immer noch konvergent sein?
- Was besagt das Cauchy-Kriterium für Folgen?
- f ist stetig und die Folge $a_{n+1} = f(a_n)$ konvergiert . Wie bestimmt man dann den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$?
- Sei $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ fest. Sei $a_0 > 0$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right)$ Warum $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{b}$ gilt?
- $\sum_{k=0}^{\infty} x^k =$?
- Wann konvergiert bzw. divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$?
- Warum gilt $0,9999999\ldots = 1$?
- Wozu ist *absolute* Konvergenz gut?
- Majoranten-, Wurzel- und Quotientenkriterien für absolute konvergenz.
- Wann konvergiert bzw. divergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$?
- Was sag die Regel von der l'Hospital? Wozu ist diese Regel gut?

Asymptotische Notation $\Rightarrow$ klein-o und groß-O

- Sei $f = o(g)$. Gilt dann $f = O(g)$? Und wie mit $g = O(f)$?
- Sei $f = O(g)$. Kann dann auch $f = o(g)$ gelten? Und wie mit $g = o(f)$?
- Sei $f = \Theta(g)$. Gilt dann $f = O(g)$? Und wie mit $g = O(f)$?
- Folgt aus $f_1(n) = O(n), \ldots, f_n(n) = O(n)$, dass auch $f_1(n) + \ldots + f_n(n) = O(n)$?
- Ist $(\log_2 n)^{100} = o(n^{1/100})$?
- Ist $n^{100} = o(2^{n/1000})$?
- Ist $\sqrt{n} = o\left(2^{\sqrt{\log_2 n}}\right)$?
- Ist $\sqrt{n}^{\log_2 n} = o\left(n^{\sqrt{\log_2 n}}\right)$?
- Folgt aus $f(n) = o(g(n))$ auch $\ln f(n) = o(\ln g(n))$?

- Sei $\ln f(n) = o(\ln g(n))$. Gilt dann auch $f(n) = o(g(n))$?
- Wir wissen, dass $4^n \neq O(2^n)$. Und wie mit $\left(\frac{5}{4}\right)^n = O\left(\frac{3}{2}\right)^n$?

Wahrscheinlichkeit

- Sei $(\Omega, \Pr)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Welche Eigenschaften muss Pr haben?
- Wie berechnet man $\Pr\{A \cup B\}$?
- Die Ereignisse A und B seien disjunkt. Gilt dann $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$? Und wie mit $\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A\} \cdot \Pr\{B\}$?
- Warum werden in jeder Gruppe von 28 Leuten mindesten zwei denselben Geburtstag mit Wahrscheinlichkeit $> 1/2$ haben? Was ist hier der Wahrscheinlichkeitsraum? Was ist das für uns interessante Ereignis E? Wie berechnet man $\Pr\{E\}$?
- Wann sind zwei Ereignisse (stochastisch) unabhängig?
- Die Ereignisse A und B seien unabhängig. Sind dann auch die Ereignisse A und $\overline{B}$ unabhängig? Und wie mit $\overline{A}$ und $\overline{B}$?
- Sind zwei Ereignisse unabhängig, so müssen die Ereignisse disjunkt sein. Ist das richtig?
- Sind zwei Ereignisse disjunkt, so müssen die Ereignisse unabhängig sein. Ist das richtig?
- Wir haben eine Gleichverteilung (Laplace-Verteilung). Wie ist dann die bedingte Wahrscheinlichkeit $\Pr\{A \mid B\}$ zu interpretieren?
- Ich kenne nur die Wahrscheinlichkeiten $\Pr\{A\}$, $\Pr\{B \mid A\}$ und $\Pr\{C \mid A \cap B\}$. Wie sieht dann die Wahrscheinlichkeit $\Pr\{A \cap B \cap C\}$ aus?
- Ich werfe dreimal eine faire Münze. Sei A das Ereignis "es gibt mehr Wappen als Köpfe" und $B =$ "Wappen im dritten Schritt". Sind diese Ereignise unabhängig?
- Ich kenne nur die bedingte Wahrscheinlichkeiten $\Pr\{A \mid B\}$ und $\Pr\left\{A \mid \overline{B}\right\}$. Was brauche ich noch, um $\Pr\{A\}$ zu bestimmen? Wie sieht dann $\Pr\{A\}$ aus?
- Warum sollte der Zuschauer in einem Game-Show (a la "Gehe auf Ganze") die bereits gewählte Tür stets wechseln?

Zufallsvariablen

- Was hat eine Zufallsvariable mit dem "Zufall" und "Variable" zu tun? Was ist eine Indikatorvariable? Wann sind zwei Zufallsvariablen unabhängig?
- Wann sind zwei Zufallsvariablen X und Y unabhängig?
- Wie ist die Erwartungswert $\mathrm{E}[X]$ einer Zufallsvariable X definiert? Wie kann man diesen Wert mechanisch interpretieren?
- Kann der Erwartungswert negativ sein?
- Sei $X : \Omega \to S$ eine Zufallsvariable mit $S \subseteq \mathbb{N}$. Kann $\mathrm{E}[X]$ kliener als $\min\{s : s \in S\}$ sein? Und wie mit $\max\{s : s \in S\}$?
- Sei $X : \Omega \to S$ eine Zufallsvariable. Dann gilt: $X(\omega) = \mathrm{E}[X]$ für mindestens ein $\omega \in \Omega$. Stimmt das?
- X sei eine Indikatorvariable für ein Ereignis A. Wie sehen dann $\mathrm{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$ aus?
- C sei eine Zufallsvariable, die nur einen Wert $c \in \mathbb{R}$ annimt, und X sei eine beliebige Zufallsvariable. Was sind dann: $\mathrm{E}[C] =?$, $\mathrm{Var}[C] =?$, $\mathrm{E}[CX] =?$ und $\mathrm{Var}[CX] =?$
- X und Y seien beliebige Zufallsvariablen. Was ist dann $\mathrm{E}[X + Y] =?$ Was kann man dann über $\mathrm{Var}[X \cdot Y]$ sagen?

- Sei X die Summe von n unabhängigen Bernoulli-Variablen. Dann ist $\Pr\{X = 0\} \leqslant ?$
- Für welche Zufallsvariablen X gilt $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} \Pr\{X > i\}$?
- Wie ist die Varianz $\mathrm{Var}[X]$ einer Zufallsvariable definiert? Was beschreibt diese Zahl? Kann die Varianz negativ sein?
- Wir wissen, dass $\mathrm{E}[X+Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$ für beliebigen Zufallsvariablen gilt. Gilt auch $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$?
- Ich würfle einen Spielwürfel bis eine 5 rauskommt und summieren die bis dahin erschienene Augenzahlen. Welchen Erwartungswert hat diese Summe?

Verteilungen

- Ich werfe eine faire Münze. Wieviel mal im Durschnitt muss ich die Münze werfen, bis ein "Kopf" kommt?
- Ich werfe eine unfaire Münze. Die Wahrscheinlichkeit für "Kopf" sei p. Wieviel mal im Durschnit muss ich die Münze werfen, bis ein "Kopf" kommt?
- Ich werfe n mal eine unfaire Münze. Die Wahrscheinlichkeit für "Kopf" sei p. Wie sieht die Wahrscheinlichkeit dafür aus, dass es genau k mal ein Wappen kommt?
- **Binomialverteilung**. Was ist das? Wie sehen $\Pr\{X = k\}$, $\mathrm{E}[X] =$ und $\mathrm{Var}[X] =$ aus?
- **Geometrische Verteilung**. Was ist das? Wie sehen $\Pr\{X = k\}$, $\mathrm{E}[X] =$ und $\mathrm{Var}[X] =$ aus?
- **Poison Verteilung** mit Parameter λ. Was ist das? Wie sehen $\Pr\{X = k\}$ und $\mathrm{E}[X] =$ aus?

Das Urnen-Model $\Rightarrow$ Hashing

- m Kugeln sind rein zufällig in n Urnen geworfen.
  $X =$ Anzahl der Kugel in der *ersten* Urne $\Rightarrow$ $\mathrm{E}[X] = ?$
- m Kugeln sind rein zufällig in n Urnen geworfen.
  $X =$ Anzahl der Urnen mit *genau einer* Kugel $\Rightarrow$ $\mathrm{E}[X] = ?$
- Die Anzahl der Kugeln ist unbegrenzt und k Urnen sind bereits besetzt.
  $Z_k =$ Anzahl Versuche bis bis die Kugel in eine *leere* Urne fliegt $\Rightarrow$ $\mathrm{E}[Z_k] = ?$
- Die Anzahl der Kugeln ist unbegrenzt.
  $X =$ Anzahl der Versuche bis *keine* Urne leer wird $\Rightarrow$ $\mathrm{E}[X] = ?$

Abweichungen von $\mathrm{E}[X]$

- Wie kann man die Abweichung der Zufallsvariable X von ihrem Erwartungswert $\mathrm{E}[X]$ um mehr als $\pm k$ abschätzen?
- Sei X eine beliebige nicht-negative Zufallsvariable, und $K = \mathrm{E}[X]$ sei ihr Erwartungswert. Wie groß ist dann $\Pr\{X \geqslant 2K\} \leqslant ?$ Und was kann man über $\Pr\{X \leqslant K/2\} \leqslant ?$ sagen?
- Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ unabhängige Ereignisse. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es *kein* der Ereignisse vorkommen wird?
- Warum braucht man noch Markov- oder Tschebyschev-Ungleichungen, wenn Chernoff die beste Abschätzung gibt?
- Wir ziehen rein zufällig und unabhängig von einander zwei k-elementige Teilmengen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ aus $\{1, \ldots, n\}$. Mit welcher W'keit wird ein Element x in $\mathbf{A}$ liegen? Ab welchem k

können wir nicht mehr erwarten, dass die Mengen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ disjunkt sind?
Für welchen k gilt $\Pr\{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset\} \leqslant 2^{-100}$? Und $\Pr\{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset\} \geqslant 3/4$?

- Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige ± 1 Zufallsvariablen mit $\Pr\{X_i = +1\} = \Pr\{X_i = -1\} = 1/2$ und sei $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Wie sieht dann $\Pr\{|X| \geqslant 2\sqrt{n}\} \leqslant$ aus?
- Wie oft muss eine Münze mindestens geworfen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $3/4$ die relative Häufigkeit von Kopf von erwarteten Wert $p = 1/2$ um weniger als $0,1$ abweicht?

Lineare Algebra

- Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Vektorraum und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge der Vektoren. Welche Relation besteht zwischen den Aussagen $A \subseteq V$ und $\mathrm{span}(A) \subseteq V$?
- $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorraum. Wann ist $B \subseteq V$ eine Basis von V? Wie ist die Dimension $\dim(V)$ definiert?
- Wie *beweist* man, dass eine Menge $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subseteq \mathbb{R}^m$ linear unabhängig sind?
- Sei A eine $m \times n$ Matrix, und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Ist dann die Menge $U = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ ein Vektorraum? Ist dann die Menge $V = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ ein Vektorraum?
- Sei A eine $m \times n$ Matrix über $\mathbb{R}$, deren Zeilen linear unabhängig sind. Wie groß ist dann der Spaltenrang von A?
- Sei A eine $m \times n$ Matrix über einem endlichen Körper $\mathbb{F}$ mit $K = |\mathbb{F}|$ Elementen? Wieviele Lösungen hat dann das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$?
- Man kennt $\mathrm{rk}(A)$ und $\mathrm{rk}(A|\mathbf{b})$. Was kann man dann über die Lösungen des Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sagen?
- Wie funktioniert das Gauß Verfahren für lineare Gleichungssysteme?
- Wir haben eine $m \times n$ Matrix A und haben bereits die erweiterte Matrix $(A|\mathbf{b})$ zu einer Zeilenstufenform transformiert. Wann ist die Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar, universell lösbar, eindeutig lösbar?
- Was besagt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung?
- Was ist eine orthonormale Basis? Warum sind solche Basen gut?
- Was ist ein lineares Code? Was ist seine minimale Distanz? Generator Matrix? Kontorllmatrix?
- Was sind Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix?
- Wie kann man die Determinante 2×2 Matrizen interpretieren?
- Was ist die Determinante einer Dreiecksmatrix?
- Ist Matrixprodukt kommutativ? Falls nicht, gebe ein Gegenbeispiel.
- A ist eine $m \times n$ Matrix und B ist eine $n \times k$ Matrix. Dann ist AB eine $s \times r$ Matrix mit $s =?$ und $r =?$
- Wie berechnet man die Inverse A^{-1}? Was ist $(AB)^{-1}$?
- Wann ist eine $n \times n$ Matrix A invertierbar?
- A sei die Adjazenzmatrix eines Graphen G. Was sind dann die Einträge der k-ten Potenz A^k von A?