Diskrečioji matematika, IT 1 kursas

Dr. Robertas Petuchovas

Vilniaus universitetas

2016 - 2017 m.

IV skyrius.
Ekvivalentiškumas, tvarkos ir matematinė indukcija

4.1 Binariųjų sąryšių savybės

Ap. Bet kurį poaibį $R \subset A \times A$ vadiname binariuoju sąryšiu virš aibės A.

Kai $(x, y) \in R$, dažnai rašysime xRy.

Binariųjų sąryšių virš aibės $A = \{0, 1\}$ pavyzdžiai:

$$\emptyset, \quad A \times A, \quad eq = \{(0,0),(1,1)\}, \quad less = \{(0,1)\}.$$

Tegul R yra binarusis sąryšis virš A, o x, y, z yra bet kurie A elementai. Turime tokias sąvokas:

- R yra refleksyvusis reiškia, kad xRx su visais $x \in A$.
- R yra simetrinis reiškia, jeigu xRy, tai yRx.
- R yra tranzityvusis reiškia, jeigu xRy ir yRz, tai xRz.
- R yra antirefleksyvusis reiškia, kad $(x, x) \notin R$ su visais $x \in A$.
- R yra antisimetrinis reiškia, jeigu xRy ir yRx, tai $x = y$.

Išnagrinėsime, kuriomis savybėmis pasižymi duoti sąryšiai:

1. $\emptyset$

   Ats.: simetrinis, tranzityvusis, antirefleksyvusis, antisimetrinis.

2. $A \times A$

   Ats.: refleksyvusis, tranzityvusis, simetrinis.

3. $eq = \{(0,0),(1,1)\}$

   Ats.: refleksyvusis, simetrinis, tranzityvusis, antisimetrinis.

4. $less = \{(0,1)\}$.

   Ats.: antirefleksyvusis, tranzityvusis, antisimetrinis.

Kompozicija

Ap. Jeigu R ir S yra binarieji sąryšiai, tai R kompoziciją su S vadiname sąryšį

$$R \circ S = \{(x, z) \mid xRy \text{ ir } ySz\}.$$

Pavyzdžiai:

1. Jeigu $R = \{(0,0),(1,1)\}$, o $S = \{(0,1)\}$, tai
$$R \circ S = \{(0,1)\}.$$

2. Jeigu $R = \{(0,0),(1,0)\}$, o $S = \{(0,1)\}$, tai
$$R \circ S = \{(0,1),(1,1)\}.$$

Klausimas. Kam lygios kompozicijos:

$$R \circ \emptyset,$$

$$\mathit{isMotherOf} \circ \mathit{isFatherOf}$$

ir

$$\mathit{isSonOf} \circ \mathit{isSiblingOf}?$$

Ats.:

$$R \circ \emptyset = \emptyset,$$

$$\mathit{isMotherOf} \circ \mathit{isFatherOf} = \mathit{IsPaternalGrandmotherOf},$$

$$\mathit{isSonOf} \circ \mathit{isSiblingOf} = \mathit{IsNephewOf}.$$

Pavyzdys (vaizdavimas digrafu). Tegul

$$R = \{(a,b),(b,a),(b,c)\}$$

yra sąryšis virš $A = \{a,b,c\}$, tada

$$R, \quad R^2 = R \circ R \quad \text{ir} \quad R^3 = R \circ R \circ R$$

galime pavaizduoti digrafais:

R :
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left] & b \arrow[l, bend left] \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$

R^2 :
$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop above] \arrow[rr, bend right] & b \arrow[loop above] & c \end{tikzcd}$$

R^3 :
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left] & b \arrow[l, bend left] \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$

Uždariniai

Ap. Sąryšio R uždariniu, tam tikros savybės atžvilgiu, vadiname mažiausią sąryšį, kuriam priklauso R ir kuris tenkina nurodytą savybę.

Turime tris žymenis ir savybes:

1. R refleksyvusis uždarinys yra
$$r(R) = R \cup Eq;$$
čia Eq yra lygybės sąryšis virš A.
2. R simetrinis uždarinys yra
$$s(R) = R \cup R^c;$$
čia $R^c = \{(b, a) \mid aRb\}$.

3. R tranzityvusis uždarinys yra

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$$

Pastaba. Jeigu $|A| = n$, tai

$$t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n.$$

Pavyzdys. Tegul

$$R = \{(a, b),\ (b, a),\ (b, c)\}$$

virš $A = \{a, b, c\}$. Parašysime visus tris sąryšio R uždarinius:

$$\begin{aligned} r(R) &= R \cup Eq \\ &= \{(a, b),\ (b, a),\ (b, c),\ (a, a),\ (b, b),\ (c, c)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(R) &= R \cup R^c \\ &= \{(a, b),\ (b, a),\ (b, c),\ (c, b)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(R) &= R \cup R^2 \cup R^3 \\ &= \{(a, b),\ (b, a),\ (b, c),\ (a, a),\ (b, b),\ (a, c)\}. \end{aligned}$$

Užduotis. Tegul

$$R = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

Rasime $t(R)$, $rt(R)$ ir $st(R)$.

Atsakymas:

$$t(R) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \text{ ir } x < y\},$$

$$rt(R) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \text{ ir } x \leq y\},$$

$$st(R) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \text{ ir } x \neq y\}.$$

Kelio paieška (Ar yra kelias iš i į j?)

Tegul

$$R = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}.$$

Galime R pavaizduoti gretimumo matrica

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix},$$

čia, matome, M_{ij} yra i-os eilutės ir j-ojo stulpelio susikirtimo reikšmė. Atsakyti į iškeltą klausimą mums padės sąryšio $t(R)$ matrica. Joje tiesiog patikrinsime, ar $M_{ij} = 1$.

Varšalo algoritmas (Warshall's algorithm)

Tai algoritmas sąryšio $t(R)$ matricai sudaryti, kai turime R matricą. Jis sukuria briauną (i, j), jeigu randa briaunas (i, k) ir (k, j). Jo veikimas:

for $k := 1$ **to** n **do**
  for $i := 1$ **to** n **do**
    for $j := 1$ to n **do**
      if $M_{ik} = M_{kj} = 1$ **then** $M_{ij} := 1$.

Pavyzdys. Turime pradinę matricą R, paleidę algoritmą, gauname tokius pokyčius:

$$\underset{\substack{\text{k=1}\\\text{(nepakito)}}}{\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}} \to \underset{\substack{\text{k=2}\\M_{13}:=1}}{\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}} \to \underset{\substack{\text{k=3}\\M_{14}:=1,\ M_{24}:=1}}{\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}} \to \underset{\substack{\text{k=4}\\\text{(nepakito)}}}{\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}};$$

čia dešiniausia matrica yra $t(R)$ matrica.

Kelio paieška (Koks yra trumpiausias kelio iš i į j ilgis?)

Tarkime, kad kiekvienai digrafo briaunai priskirtas neneigiamas skaičius, t.y., jos svoris arba, šiuo atveju, ilgis. Reikia taip pakeisti gretimumo matricą M, kad M_{ij} būtų trumpiausio kelio iš i į j ilgis; $M_{ii} = 0$ ir visi kiti įrašai, kuriuose nėra kelio, būtų ∞.

Floido algoritmas (Floyd's algorithm)

Tai algoritmas, kuris sukonstruoja $t(R)$ matricą su trumpiausiais kelių ilgiais:

for $k := 1$ to n
  for $i := 1$ to n
    for $j := 1$ to n
      do $M_{ij} := \min\{M_{ij}, M_{ik} + M_{kj}\}$.

Pavyzdys. Tegul

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & \infty \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}.$$

Pritaikę Floido algoritmą, gauname

$$\underset{\text{(nepakito)}}{\overset{\text{k=1}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & \infty \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}}} \to \overset{\substack{\text{k=2} \\ M_{14} := 5}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}} \to \overset{\substack{\text{k=3} \\ M_{14} := 4}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}} \to \overset{\substack{\text{k=4} \\ \text{(nepakito)}}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}}.$$

Dešiniausia matrica yra $t(R)$ gretimumo matrica, kurioje yra apskaičiuoti trumpiausių kelių ilgiai. Norėdami įsitikinti, nubrėžkite M digrafą.

Kelio paieška (Koks yra trumpiausias kelias iš i į j?)

Papildome Floido algoritmą, kad jis dar sukurtų ir matricą P, kurios įrašai – P_{ij}. Jeigu briauna (i, j) yra trumpiausias kelias, iš viršūnės i į j, tai $P_{ij} = 0$ (čia $M_{ij} \neq 0$), kitu atveju $P_{ij} = k$ reiškia, kad trumpiausias kelias iš i į j eina per viršūnę k, t.y., $M_{ij} = M_{ik} + M_{kj}$.

Modifikuotas Floido algoritmas

Sukonstruoja $t(R)$ gretimumo matricą, nusako trumpiausio kelio ilgį ir sukonstruoja matricą P. Pradžioje, matricos P visi įrašai yra lygūs nuliui.

Taigi, algoritmas:

for $k := 1$ to n

  for $i := 1$ to n

    for $j := 1$ to n do

      if $M_{ik} + M_{kj} < M_{ij}$ **then**

        $M_{ij} := M_{ik} + M_{kj}$;

        $P_{ij} := k$

Pavyzdys. Prisimename paskutinį pavyzdį. Šį kartą naujas algoritmas sudaro ir matricą P.

$$M \to \overset{\substack{\text{k=1}\\ \text{(nepakito)}}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & \infty \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}} \to \overset{\substack{\text{k=2}\\ M_{14} := 5}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}} \to \overset{\substack{\text{k=3}\\ M_{14} := 4}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}} \to \overset{\substack{\text{k=4}\\ \text{(nepakito)}}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}}$$

$$P \to \overset{\text{(nepakito)}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \to \overset{P_{14} := 2}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \to \overset{P_{14} := 3}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \to \overset{\text{(nepakito)}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}.$$

Matome, trumpiausias kelias iš 1 į 4 yra $1 \to 3 \to 4$. Iš tikrųjų, jeigu kelią sudaro daugiau nei viena briauna, matrica P parodo trumpiausio kelio priešpaskutinę viršūnę.

Ekvivalentiškieji sąryšiai

Ap. Binarusis sąryšis yra vadinamas <u>ekvivalentiškuoju sąryšiu</u>, jeigu jis yra refleksyvusis, simetrinis ir tranzityvusis (**RST**).

Pavyzdžiai:

a. Lygybės sąryšis virš bet kurios aibės.

b. $x \sim y \Leftrightarrow |x| = |y|$ virš $\{a, b, c\}^*$.

c. $x \sim y \Leftrightarrow x$ ir y gimę tą pačią dieną virš žmonių aibės.

d. Tarkime, turime bet kokią aritmetinių reiškinių aibę E. Tegul e_1, e_2 yra bet kurie elementai iš E ir $e_1 \sim e_2$ t.t.t., kai e_1 ir e_2 įgyja tą pačią reikšmę su bet kuriomis argumentų reikšmėmis. Pvz., $4x + 2 \sim 2(2x + 1)$. Tada $\sim$ yra **RST**.

Klausimas. Kuris iš sąryšių yra **RST**?

a. $xRy \Leftrightarrow x \leq y$ arba $x > y$ virš $\mathbb{Z}$.
b. $xRy \Leftrightarrow |x - y| \leq 2$ virš $\mathbb{Z}$.
c. $xRy \Leftrightarrow x$ ir y yra lyginiai sk. virš $\mathbb{Z}$.

Atsakymai: Taip, ne, ne.

Sankirtos savybė. Jeigu E ir F yra **RST** virš A, tai $E \cap F$ yra **RST** virš A.

Pavyzdys. Tegul $x \sim y$ t.t.t., kai x ir y turi tas pačias gimimo datas ir vienodą pavardę. Tada $\sim$ yra **RST**, nes jis yra dviejų **RST** sąryšių sankirta.

Branduoliniai sąryšiai

Ap. Tegul f yra funkcija, kurios apibrėžimo sritis A. Sąryšis $\sim$, apibrėžtas tokiu būdu

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y),$$

yra ekvivalentiškasis sąryšis virš A ir yra vadinamas f branduoliniu sąryšiu.

Pavyzdys. Tegul

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x \mod n = y \mod n$$

virš bet kurios aibės $S \subset \mathbb{N}$. Tada $\sim$ yra **RST**, nes jis yra funkcijos

$$f : S \to \mathbb{N} \quad \text{ir} \quad f(x) = x \mod n$$

branduolinis sąryšis.

Pavyzdys. Tegul

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x + y = 2k$$

virš $\mathbb{Z}$. Tada $\sim$ yra **RST**, nes

$$x + y = 2k \;\Leftrightarrow\; x \mod 2 = y \mod 2.$$

Matome, $\sim$ yra funkcijos f, apibrėžtos kaip

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \quad \text{ir} \quad f(x) = x \mod 2,$$

branduolinis sąryšis.

Ekvivalentiškumo klasės

Ap. Jeigu R yra **RST** virš A, tai bet kurio elemento $a \in A$ ekvivalentiškumo klase vadiname aibę

$$[a] = \{x \mid xRa\} \subset A.$$

Savybė: Paėmę bet kurią elementų porą $a, b \in A$, turime

$$[a] = [b] \quad \text{arba} \quad [a] \cap [b] = \emptyset.$$

Pavyzdys. Tarkime,

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x \mod 3 = y \mod 3$$

virš $\mathbb{N}$, tada $\sim$ ekvivalentiškumo klasės yra tokios:

$$[0] = \{0, 3, 6, \ldots\} = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\},$$
$$[1] = \{1, 4, 7, \ldots\} = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$
$$[2] = \{2, 5, 8, \ldots\} = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Galime pastebėti, kad:

$$[0] = [3] = [6],$$

$$[1] \cap [2] = \emptyset,$$

$$[0] \cap [2] = \emptyset,$$

$$[0] \cap [1] = \emptyset.$$

Ap. Aibės A skaidiniu vadiname jos netuščių poaibių aibę, kurios elementai – A poaibiai – paporiui neturi bendrų elementų ir kurių sąjunga lygi A.

Pavyzdžiui, aibė

$$\{[0], [1], [2]\}$$

yra aibės $\mathbb{N}$ skaidinys, nes:

$$\mathbb{N} = [0] \cup [1] \cup [2],$$

$$[0] \cap [1] = \emptyset,$$

$$[0] \cap [2] = \emptyset,$$

$$[1] \cap [2] = \emptyset.$$

Teorema

1. **RST** sąryšio virš A ekvivalentiškumo klasės sudaro aibės A skaidinį.
2. Bet kuris aibės A skaidinys generuoja **RST** virš A tokiu būdu, kad skaidinio elementai yra šio **RST** ekvivalentiškumo klasės.

Pavyzdys. Tegul

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x \mod 2 = y \mod 2$$

virš $\mathbb{Z}$. Tada $\sim$ yra **RST**, kurio ekvivalentiškumo klasės

$$[0] \quad \text{ir} \quad [1].$$

Todėl aibė

$$\{[0], [1]\}$$

yra $\mathbb{Z}$ skaidinys.

Pavyzdys. Turime $\mathbb{R}$ skaidinį:

$$\{(n, n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

todėl galime sudaryti **RST** sąryšį $\sim$ virš $\mathbb{R}$ tokį, kad

$$x \sim y \iff x, y \in (n, n+1],\ n \in \mathbb{Z}.$$

Šį sąryšį galima apibrėžti ir tokiu būdu:

$$x \sim y \iff \lceil x \rceil = \lceil y \rceil.$$

Skaidinio rafinatas

Ap. Tarkime, P ir Q yra tos pačios aibės skaidiniai. P vadiname skaidinio Q rafinatu, jeigu kiekvienai aibei $A \in P$ egzistuoja aibė $B \in Q$ tokia, kad $A \subset B$.

Pavyzdys.

Tegul $\sim_3$ ir $\sim_6$ yra toliau nurodyti **RST** sąryšiai virš $\mathbb{N}$.

- $x \sim_3 y \iff x \mod 3 = y \mod 3$
- $x \sim_6 y \iff x \mod 6 = y \mod 6$

Matome, $\sim_3$ turi tris ekvivalentiškumo klases:

$$[n]_3 = \{3k + n \mid k \in \mathbb{N}\}, \text{ čia } n \in \{0, 1, 2\},$$

o $\sim_6$ turi šešias ekvivalentiškumo klases:

$$[n]_6 = \{6k + n \mid k \in \mathbb{N}\}, \text{ čia } n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Aišku, kad skaidinys

$$\{[0]_6, [1]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6, [5]_6\}$$

yra skaidinio

$$\{[0]_3, [1]_3, [2]_3\}$$

rafinatas.

Klausimas. Ar kuris iš sąryšių $\sim_3$ ir $\sim_2$ yra kito rafinatas?
Atsakymas. Ne, kadangi $[0]_2$ ir $[1]_2$ yra atitinkamai lyginių ir nelyginių skaičių aibės, o į aibes $[0]_3$, $[1]_3$ ir $[2]_3$ patenka ir lyginiai, ir nelyginiai skaičiai.

Teorema (dviejų **RST** sąryšių sankirtos savybė)

Jeigu E ir F yra **RST** sąryšiai virš A, tai $E \cap F$ ekvivalentiškumo klasės yra

$$[x]_{E\cap F} = [x]_E \cap [x]_F, \quad x \in A.$$

Pavyzdys.

Tegul $\sim_1$ ir $\sim_2$ yra toliau nurodyti **RST** sąryšiai virš $\mathbb{N}$.

- $x \sim_1 y \iff \lfloor x/4 \rfloor = \lfloor y/4 \rfloor$
- $x \sim_2 y \iff \lfloor x/6 \rfloor = \lfloor y/6 \rfloor$

Galime įžvelgti, kad $\sim_1$ ekvivalentiškumo klasės yra tokios:

$$[4n]_1 = \{4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3\},\ n \in \mathbb{N},$$

o $\sim_2$ ekvivalentiškumo klasės –

$$[6n]_2 = \{6n, 6n+1, \ldots, 6n+5\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Tegul $\sim = \sim_1 \cap \sim_2$. Išrašysime keletą $\sim$ ekvivalentiškumo klasių:

$$[0]_\sim = [0]_1 \cap [0]_2 = \{0,1,2,3\} \cap \{0,1,2,3,4,5\} = \{0,1,2,3\},$$
$$[4]_\sim = [4]_1 \cap [4]_2 = \{4,5,6,7\} \cap \{0,1,2,3,4,5\} = \{4,5\},$$
$$[6]_\sim = [6]_1 \cap [6]_2 = \{4,5,6,7\} \cap \{6,7,8,9,10,11\} = \{6,7\},$$
$$[8]_\sim = [8]_1 \cap [8]_2 = \{8,9,10,11\} \cap \{6,7,8,9,10,11\} = \{8,9,10,11\}.$$

Klausimas. Ar įžvelgiate dėsningumą likusioms ekvivalentiškumo klasėms iš $\sim$ aprašyti?

Atsakymas:

$$[12n]_\sim = \{12n, 12n+1, 12n+2, 12n+3\},$$
$$[12n+4]_\sim = \{12n+4, 12n+5\},$$
$$[12n+6]_\sim = \{12n+6, 12n+7\},$$
$$[12n+8]_\sim = \{12n+8, 12n+9, 12n+10, 12n+11\}, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Ekvivalentiškųjų sąryšių generavimas

Ap. Mažiausias ekvivalentiškasis sąryšis, kuriam priklauso sąryšis R, yra vadinamas R ekvivalentiškuoju uždariniu ir sutampa su $tsr(R)$.

Seka tsr yra svarbi. Pavyzdžiui, turime

$$R = \{(a, b), (a, c)\}$$

virš $\{a, b, c\}$. Tada

$$tsr(R) = \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$$

yra ekvivalentiškasis sąryšis, bet

$$str(R) = \{a, b, c\} \times \{a, b, c\} - \{(b, c), (c, b)\}$$

nėra ekvivalentiškasis, nes jis nėra tranzityvusis.

Kruskalo algoritmas (Kruskal's algorithm)

Šis algoritmas - skirtas rasti grafo minimalųjį dengiantįjį medį.

1. Sudarome grafo briaunų sąrašą L, kuriame briaunos išsidėsčiusios svorių didėjimo tvarka.
2. Minimalųjį dengiantįjį medį pažymime T. Iš pradžių $T := \emptyset$.
3. Kiekvienai viršūnei sukuriame ekvivalentiškumo klasę

$$[v] = \{v\}.$$

4. Vykdome algoritmą:

while turime dvi ar daugiau ekvivalentiškumo klasių **do**
$\quad\{x, y\} := head(L);$
$\quad L := tail(L);$
if $[x] \neq [y]$ **then**
$\quad T := T \cup \{\{x, y\}\};$
$\quad$pakeičiame $[x]$ ir $[y]$ į $[x] \cup [y]$
fi od

Gauta aibė T yra mūsų ieškomas medis.

Pavyzdys. Sudarome grafo briaunų sąrašą:
$L := \langle \{a, b\}, \{b, c\}, \{d, f\}, \{e, f\}, \{a, d\}, \{c, e\}, \{f, g\}, \{b, g\}, \{c, d\}, \{b, e\} \rangle$.
Surašytos briaunos yra atitinkamai 1,1,1,1,2,2,2,2,3,3 ilgio.

Algoritmo realizacija:

T	ekvivalentiškumo klasės
$\{\}$	$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}$
$T \cup \{\{a, b\}\}$	$\{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}$
$T \cup \{\{b, c\}\}$	$\{a, b, c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}$
$T \cup \{\{d, f\}\}$	$\{a, b, c\}, \{d, f\}, \{e\}, \{g\}$
$T \cup \{\{e, f\}\}$	$\{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{g\}$
$T \cup \{\{a, d\}\}$	$\{a, b, c, d, e, f\}, \{g\}$
T	$\{a, b, c, d, e, f\}, \{g\}$
$T \cup \{\{f, g\}\}$	$\{a, b, c, d, e, f, g\}$

Priešpaskutiniu žingsniu ėmėme briauną $\{c, e\}$, bet $[c] = [e]$, todėl pakitimų neįvyko. Gavome

$$T = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d, f\}, \{e, f\}, \{a, d\}, \{f, g\}\},$$

tai yra mūsų ieškomas dengiantysis medis. Įsitikinkite, nubrėžkite pradinį grafą ir T.

Tvarka yra sąryšis

Ap. Binarusis sąryšis yra vadinamas daline tvarka, jeigu jis yra tranzityvusis, antisimetrinis ir refleksyvusis arba antirefleksyvusis.

Aibę, virš kurios apibrėžiame dalinę tvarką, vadiname dalinai sutvarkyta aibe arba, sutrumpintai, – dsaibe.

Jeigu norime pabrėžti, kad S yra dalinai sutvarkyta aibė, sąryšio R atžvilgiu, tada rašome

$$\langle S, R \rangle$$

ir šį sąrašą vadiname dsaibe.

Penki dsaibių pavyzdžiai:

- $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$;
- $\langle \mathbb{N}, < \rangle$;
- $\langle \mathbb{N}, \mathsf{divides} \rangle$;
- $\langle \mathsf{power}(\{a, b, c\}), \subset \rangle$;
- $\langle$Recepto žingsniai, $R\rangle$, čia $iRj \Leftrightarrow i$ atliekam prieš j.

Palyginamumas

Tegul $\langle S, R \rangle$ yra dsaibė. Turime tokius apibrėžimus:

Ap. Elementai $x, y \in S$ yra vadinami palyginamais, jeigu $(x, y) \in R$ arba $(y, x) \in R$.

Ap. Jeigu visos elementų iš S poros yra palyginamos, tada R vadiname pilna arba tiesine tvarka.

Ap. Aibę elementų, kurie tarpusavyje yra palyginami, vadiname grandine.

Žymėjimai

Dalinėms tvarkoms žymėti dažnai naudosime simbolius

$$\prec \quad \text{ir} \quad \preceq \, ,$$

todėl turėsime omenyje platesnę prasmę, nei jų reikšmė aritmetikoje. Jeigu

$$x \prec y,$$

tai reiškia, kad

$$x \text{ eina prieš } y,$$

t.y., y eina po x, bet nebūtinai x yra didesnis už y.

Pavyzdžiui. Gali būti atvejis, kai $2 \prec 1$, jeigu tik $(2, 1) \in R$.

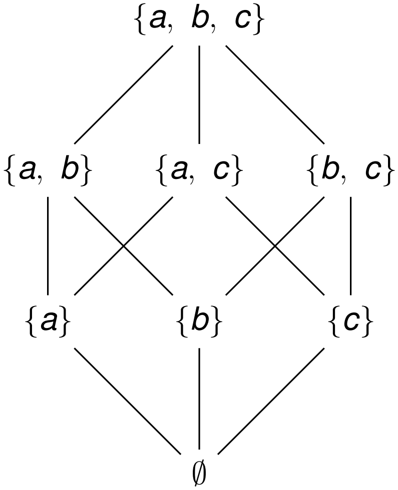
Ap. Elementą x vadiname y pirmtaku, o y vadiname x palikuoniu, jeigu

$$\{z \mid x \prec z \prec y\} = \emptyset.$$

Dsaibės diagrama (Hasė diagrama (Hasse diagram))

Ap. Tai grafas, vaizduojantis dsaibę, kurį sudaro tik briaunos, jungiančios pirmtakus su palikuoniais. Briaunos diagramoje brėžiamos iš apačios į viršų, tokiu būdu, kad pirmtakų viršūnės visada yra žemiau už jų palikuonių viršūnes.

Pavyzdžiui. Dsaibės $\langle \mathit{power}(\{a, b, c\}), \subset\rangle$ Hasė diagrama:



Minimumas, maksimumas ir rėžiai

Tegul $S \subset P$, P – dsaibė.

Ap. Elementas $x \in S$ yra vadinamas minimaliu S elementu, jeigu jis neturi pirmtakų aibėje S.

Ap. Minimalus elementas $x \in S$ yra vadinamas mažiausiu S elementu, jeigu $x \preceq y$ su visais $y \in S$.

Ap. Elementas $x \in P$ yra vadinamas apatiniu aibės S rėžiu, jeigu $x \preceq y$ su visais $y \in S$.

Ap. Aibės S apatinis rėžis $x \in P$ yra vadinamas tiksliu apatiniu rėžiu ir žymimas $\mathsf{tar}(S)$, jeigu visi S apatiniai rėžiai $y \in P$ yra tokie, kad $y \preceq x$.

Sąvokos: maksimalus S elementas, didžiausias S elementas, viršutinis S rėžis, tikslus S viršutinis rėžis – $\mathsf{tvr}(S)$ apibrėžiamos analogiškai.

Tegul

$$P = \mathsf{power}(\{a, b, c\}) \quad \text{ir} \quad S = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}.$$

Tada, jau turėtoje P diagramoje, matome:

$\{a\}$ – vienintelis minimalus S elementas, todėl jis yra mažiausias S elementas ir tikslus S apatinis rėžis.

$\{a\}$ ir $\emptyset$ – S apatiniai rėžiai.

$\{a, b\}$ ir $\{a, c\}$ – maksimalūs S elementai, todėl S neturi didžiausio elemento.

$\{a, b, c\}$ – vienintelis S viršutinis rėžis, todėl jis yra tikslus S viršutinis rėžis, t.y., $\mathsf{tvr}(S) = \{a, b, c\}$.

Užduotis. Raskite aibės

$$S = \{6, 7, 8\}$$

minimumą, maksimumą ir rėžius, kai $S \subset P$, $\langle P, R \rangle$; čia

$$P = \{1, 2, \ldots, 9\},$$

$$R = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5), (5, 7), (4, 6), (4, 7), (6, 8), (7, 8), (8, 9)\}.$$

Sprendimas. Nusibrėžiame Hasė diagramą. Matome, minimalūs S elementai yra du, 6 ir 7, todėl S neturi mažiausio elemento. Apatiniai S rėžiai yra 1, 2, 4, o $\mathrm{tar}(S) = 4$. S turi vienintelį maksimalų elementą 8, todėl 8 yra didžiausias S elementas ir jos tikslus viršutinis rėžis. Viršutiniai S rėžiai yra 8 ir 9.

Gardelės

Ap. Gardele vadiname dsaibę, kurios kiekviena pora elementų turi tikslius apatinį ir viršutinį rėžius.

Pavyzdys. Kokią tik paimtume aibę S, dsaibė $\langle \mathsf{power}(S), \subset \rangle$ yra gardelė, nes paėmę bet kuriuos elementus $A, B \in \mathsf{power}(S)$, turime

$$\mathsf{tar}(A, B) = A \cap B \quad \text{ir} \quad \mathit{tvr}(A, B) = A \cup B.$$

1 klausimas. Ar $\langle \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mid \rangle$ yra gardelė?

Atsakymas. Ne. Nes, pavyzdžiui, elementai 2 ir 5 neturi tvr.

2 klausimas. Ar $\langle \{1, 2, 3, 6, 12\}, \mid \rangle$ yra gardelė?

Atsakymas. Taip.

Topologinis rūšiavimas (narsto dsaibės diagramą)

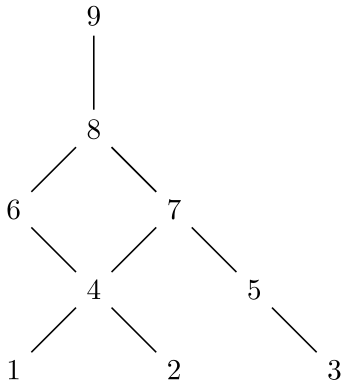
Idėja – paimti minimalųjį elementą, pašalinti jį iš dsaibės ir toliau taip pat elgtis su gauta dsaibe. Gauta elementų seka visada pasižymi tokia savybe: x yra kairiau už y, jeigu tik $x \prec y$.

Algoritmas

$p(x)$ – x pirmtakų skaičius;
$s(x)$ – aibė x palikuonių;
$\check{S}altiniai = \{x \mid p(x) = 0\}$.

while $\check{S}altiniai \neq \emptyset$ **do**
Atspausdinam x ir pašalinam iš $\check{S}altiniai$;
Kiekvienam $y \in s(x)$ sumažinam vienetu $p(y)$ ir atnaujinam $\check{S}altiniai$.
od

Pavyzdys. Tegul $\langle S, P \rangle$ yra jau minėta dsaibė, kurios Hasė diagrama yra



Du galimi šios aibės elementų topologiniai surūšiavimai:

$$3, 5, 2, 1, 4, 7, 6, 8, 9 \quad \text{ir} \quad 1, 2, 4, 6, 3, 5, 7, 8, 9.$$

Gerai-sudarytos tvarkos

Ap. Sakome, kad dsaibė yra gerai-sudaryta, jeigu kiekvienas jos netuščias poaibis turi minimalų elementą arba kiekviena jos grandinė, kurios elementus galime išrašyti tokiu būdu $x_1 \succ x_2 \succ \ldots$, yra baigtinė.

Norint suprasti, apibrėžime esančių teiginių ekvivalentiškumą, reikia pastebėti, kad kiekvienoje baigtinėje mažėjančių elementų grandinėje paskutinis elementas yra minimalus. Ir, jeigu visi netušti poaibiai turi minimalius elementus, negalėsime sudaryti begalinės mažėjančių elementų grandinės, kadangi tai prieštarautų pastarajai sąlygai.

Pavyzdys. Dsaibės $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ ir $\langle \mathsf{power}(\text{baigtinė aibė}), \subset \rangle$ yra gerai-sudarytos.

Pavyzdys. Dsaibės $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ ir $\langle \mathsf{power}(\text{begalinė aibė}), \subset \rangle$ nėra gerai-sudarytos. Nes, pavyzdžiui, turime, kad aibei

$$\mathsf{power}(\mathbb{N})$$

priklauso begalinė mažėjanti grandinė

$$\mathbb{N} \supset \mathbb{N} - \{0\} \supset \mathbb{N} - \{0, 1\} \supset \mathbb{N} - \{0, 1, \ldots, n\} \supset \ldots .$$

Leksikografinė aibės $\mathbb{N}^n$ tvarka

Leksikografinė n-kortežų tvarka apibrėžiama tokiu būdu:

$$(x_1, \ldots, x_n) \prec (y_1, \ldots, y_n) \;\Leftrightarrow\; x_1 \prec y_1$$

arba

$$x_i = y_i,$$

kai $1 \leq i < j$, ir

$$x_j \prec y_j.$$

Ši tvarka yra gerai-sudaryta. Pastebėkime, ji yra tiesinė.

Pavyzdys. Išsiaiškinsime, kodėl aibės $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ leksikografinė tvarka yra gerai-sudaryta. Iš pradžių pastebėkime, kad mažėjanti grandinė

$$(x, y_1) \succ (x, y_2) \succ \dots$$

turi būti baigtinė, nes

$$y_1 > y_2 > \dots$$

yra baigtinė $\mathbb{N}$ grandinė. Be to, norint pratęsti grandinę

$$(x, y_1) \succ (x, y_2) \succ \dots,$$

reikia sumažinti paskutinės poros pirmąjį argumentą x, bet tokių pratęsimų yra baigtinis skaičius, nes

$$x_1 > x_2 > \dots$$

yra baigtinė $\mathbb{N}$ grandinė. Todėl aibės $\mathbb{N}^2$ leksikografinė tvarka yra gerai-sudaryta.

Leksikografinė aibės A^* tvarka

Tegul A yra abėcėlė ir dsaibė. Jeigu x ir y yra žodžiai virš A, tada

$$x \prec y \;\Leftrightarrow\; x \text{ yra } y \text{ priešdėlis}$$

(t.y. $y = xz$ ir $z \neq \Lambda$) arba x ir y turi bendrą priešdėlį u:

$$x = uw \text{ ir } y = uz,$$

ir $head(w) \prec head(z)$ dsaibėje A.

PASTABA: Tai yra žodynuose įprasta tvarka ir ji nėra gerai-sudaryta, nors ir yra tiesinė tvarka.

Pavyzdys. Turime abėcėlę $\{a, b\}$ ir $a \prec b$. Grandinė

$$b \succ ab \succ aab \succ aaab \succ \ldots$$

yra begalinė ir leksikografinės aibės A^* tvarkos poaibis, todėl A^* leksikografinė tvarka nėra gerai-sudaryta.

Užduotis. Surašykite eilės tvarka visus ilgio 3 žodžius virš $\{a, b\}$, kai $a \prec b$.

Atsakymas:

$$aaa \prec aab \prec aba \prec abb \prec baa \prec bab \prec bba \prec bbb.$$

Standartiška aibės A^* tvarka

Tai yra gerai-sudaryta tvarka, kuri išrikiuoja žodžius pagal jų ilgį ir to paties ilgio žodžiams taiko leksikografinę tvarką.

Pavyzdys. Parašysime ilgiausią, mažėjančią $\{a, b\}^*$ grandinę, prasidedančią nuo aaa, kai $a \prec b$:

$$aaa \succ bb \succ ba \succ ab \succ aa \succ b \succ a \succ \Lambda.$$

Paprasta konstravimo technika gerai-sudarytoms tvarkoms gauti

Bet kuri f-ja $f : S \to \mathbb{N}$ apibrėžia gerai-sudarytą tvarką virš S tokiu būdu:

$$x \prec y \Leftrightarrow f(x) < f(y).$$

Pavyzdžiai:

- Tvarka virš sąrašų aibės yra gerai-sudaryta pagal ilgį.
- Tvarka virš binariųjų medžių aibės yra gerai-sudaryta pagal medžių gylį arba pagal jų viršūnių skaičių, arba pagal jų lapų skaičių.
- Tvarką virš $\mathbb{Z}$ galime gerai-sudaryti, paėmę skaičiaus modulį.

Atkreipkime dėmesį, šios tvarkos nėra tiesinės.

Pavyzdys. Tegul $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ ir

$$f(x) = \textbf{if } x \geq 0 \textbf{ then } 2x \textbf{ else } -2x - 1.$$

Tvarka virš $\mathbb{Z}$

$$x \prec y \Leftrightarrow f(x) < f(y).$$

Ši tvarka yra gerai-sudaryta ir tiesinė, nes

$$0 \prec -1 \prec 1 \prec -2 \prec 2 \prec \ldots.$$

Gerai-sudarytos tvarkos virš indukciškai apibrėžtų aibių

Jeigu S yra indukciškai apibrėžta aibė ir jokie du jos elementai nėra apibrėžti vienas per kitą, tai gerai-sudarytoms tvarkoms virš S gauti galime naudoti tokius du būdus:

1 būdas. Tegul $f : S \to \mathbb{N}$ ir $f(b) = 0$, kai b yra bazės elementas. Jeigu x yra apibrėžtas per

$$y_1, \ldots, y_n,$$

tada

$$f(x) = 1 + \max\{f(y_1), \ldots, f(y_n)\}.$$

Tariame, kad

$$x \prec y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$$

ir turime, kad $\prec$ yra gerai-sudaryta tvarka.

2 būdas. Bazės elementus laikome minimaliais S elementais. Jeigu x yra apibrėžiamas per $y_1, \ldots, y_n$, tariame, kad

$$y_i \prec x$$

kiekvienam i. Paimame šios tvarkos tranzityvųjį uždarinį ir taip gauname gerai-sudarytą tvarką.

Pavyzdys. $\mathbb{Z}$ indukciškai galime apibrėžti tokiu būdu:

Bazė: $0 \in \mathbb{Z}$
Indukcija: Jei $x \in \mathbb{Z}$, tai $x + 1, x - 1 \in \mathbb{Z}$.

Pastebėkime, kad 1 ir -1 yra sukonstruojami iš 0, o pastarasis yra sukonstruojamas iš -1, todėl, nei pirmu, nei antru būdu, negalime sudaryti dsaibės.

Pavyzdys. $\mathbb{N}^2$ indukciškai galime apibrėžti tokiu būdu:

Bazė: $(0,0) \in \mathbb{N}^2$.
Indukcija: Jei $(x,y) \in \mathbb{N}^2$, tai $(x,y+1),(x+1,y) \in \mathbb{N}^2$.

Tvarkoje, sudarytoje pirmuoju metodu, bet kuri pora (x,y), $x+y=n$, turi $n+2$ palikuonius. Pavyzdžiui, elemento $(0,1)$ palikuoniai yra $(0,2)$, $(1,1)$ ir $(2,0)$.

Tvarkoje, sudarytoje antruoju būdu, bet kuri pora (x,y) turi du palikuonius. Pavyzdžiui, elemento $(0,1)$ palikuoniai yra $(0,2)$ ir $(1,1)$.

4.4 Įrodymas matematinės indukcijos metodu

Toliau naudosime trumpinį MIP (matematinės indukcijos principas).

Pirma pastebėkime, kad bet kuris $\mathbb{N}$ poaibis turi mažiausią elementą, nes $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ yra gerai-sudaryta tvarka.

MIP bazė virš $\langle \mathbb{N}, < \rangle$

Tegul $S \subset \mathbb{N}$ ir $0 \in S$. Jeigu turime, kad

$$k \in S \;\Rightarrow\; k + 1 \in S,$$

tada

$$S = \mathbb{N}.$$

Įrodymas. Teiginį galima įrodyti prieštaros būdu. Įrodymas yra pateiktas knygos 254 psl., ten $W := \mathbb{N}$. □

Įrodymas remiantis matematine indukcija

Tegul $P(n)$ yra teiginys su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$. Norint įrodyti $P(n)$ teisingumą kiekvienam $n \in \mathbb{N}$, pakanka atlikti šiuos žingsnius:

1. Parodyti, kad $P(0)$ yra tiesa.
2. Parodyti, jeigu $P(k)$ yra tiesa, tai ir $P(k+1)$ yra tiesa.

Įrodymas. MIP logiką galima pagrįsti pritaikius MIP bazę. Įrodymas pateiktas knygos 255 psl., ten $m := 0$. $\square$

Pastaba. MIP taip pat veikia ir teiginiams $P(n)$, kai $n \in \{m, m+1, \ldots\}$, $m \in \mathbb{Z}$. Tokiu atveju mažiausias elementas yra m, todėl skirtumas tik tas, kad pirmu žingsniu tikriname ar $P(m)$ yra tiesa.

1 pavyzdys. Įrodysime, kad

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

su visais $n \in \mathbb{N}$.

Įrodymas. Nagrinėjamą lygybę pažymėkime $P(n)$.

1. $P(0)$ yra tiesa, nes

$$0 = \frac{0(0+1)}{2}.$$

2. Parodome, kad jeigu $P(k)$ yra tiesa, tai ir $P(k+1)$ yra tiesa:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) &= (1 + 2 + \ldots + k) + (k+1) \\ &= k(k+1)/2 + (k+1) \\ &= (k+1)((k+1)+1)/2. \end{aligned}$$

2 pavyzdys. Įrodysime, kad

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$$

su visais $n \in \mathbb{N}$.

Įrodymas. Nagrinėjamą lygybę pažymime $P(n)$. Taikome MIP.

1. $P(0)$ yra tiesa, nes $0^3 = 0^2$.
2. Parodome, jeigu $P(k)$ yra tiesa, tai ir $P(k+1)$ tiesa:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 &= (1^3 + 2^3 + \ldots + k^3) + (k+1)^3 \\ &= (1 + 2 + \ldots + k)^2 + (k+1)^3 \\ &= (k(k+1)/2)^2 + (k+1)^3 \\ &= (k^2 + 4k + 4)(k+1)^2/4 \\ &= ((k+1)(k+2)/2)^2 \\ &= (1 + 2 + \ldots + (k+1))^2. \end{aligned}$$

$\square$

3 pavyzdys. Tegul $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ir

$$f(n) = \textbf{if } n = 0 \textbf{ then } 0 \textbf{ else } f(n-1) + n^2.$$

Tada

$$f(n) = n(n+1)(2n+1)/6$$

su visais $n \in \mathbb{N}$.

Įrodymas. Paskutinę lygybę pažymime $P(n)$. Taikome MIP.

1. $P(0)$ yra tiesa, nes $f(0) = 0 = 0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)/6$.
2. Parodome, jeigu $P(k)$ yra tiesa, tai ir $P(k+1)$ yra tiesa:

$$\begin{aligned} f(k+1) &= f(k) + (k+1)^2 \\ &= k(k+1)(2k+1)/6 + (k+1)^2 \\ &= (k+1)(2k^2+7k+6)/6 \\ &= (k+1)(k+2)(2k+3)/6 \\ &= (k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)/6. \end{aligned}$$

$\square$

MIP apibendrinimas virš gerai-sudarytų aibių

Samprotavimai panašūs kaip ir MIP virš $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ atveju.

MIP bazė virš gerai-sudarytos aibės

Tegul W yra gerai-sudaryta aibė ir S yra toks W poaibis, kad S priklauso visi minimalūs W elementai. Be to, jeigu $x \in W$ ir visi prieš x einantys elementai priklauso S, tai $x \in S$. Tada $S = W$.

Įrodymas. Knygos 259 puslapyje. $\square$

MIP virš gerai-sudarytos aibės

W – gerai-sudaryta aibė;

$P(x)$ – teiginys su bet kuriuo $x \in W$.

Norint įrodyti teiginio $P(x)$ teisingumą su visais $x \in W$, pakanka atlikti du žingsnius:

1. Parodyti, kad $P(m)$ yra tiesa su kiekvienu minimaliu W elementu m.
2. Parodyti, jeigu $P(y)$ yra tiesa su visais $y \prec x$, čia x fiksuotas, tai $P(x)$ yra tiesa; $y, x \in W$.

Įrodymas. Knygos 260 puslapyje. □

4 pavyzdys (MIP virš gerai-sudarytos aibės).

Tegul $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{ir} \quad f(n) = f(n-2) + 1, \quad \text{kai} \quad n \geq 2.$$

Įrodysime, kad

$$f(n) = \text{floor}\left(\frac{n}{2}\right)$$

su visais $n \in \mathbb{N}$.

Įrodymas. Paskutinę lygybę pažymime $P(n)$. Taikome MIP. Pastebėkime, šiuo atveju, minimalūs $\mathbb{N}$ elementai yra du, 0 ir 1.

1. $P(0)$ ir $P(1)$ yra tiesa, nes

   $$\text{floor}\,(0/2) = \text{floor}\,(1/2) = 0$$

   ir, pagal apibrėžimą,

   $$f(0) = f(1) = 0.$$

2. Tegul $k \geq 2$. Darome prielaidą, kad $P(i)$ yra tiesa, kai $i < k$, ir parodome, kad tada $P(k)$ yra tiesa:

$$\begin{aligned} f(k) &= f(k-2) + 1 \\ &= \text{floor}\left((k-2)/2\right) + 1 \\ &= \text{floor}\left((k/2) - 1\right) + 1 \\ &= \text{floor}\left(k/2\right) - 1 + 1 \\ &= \text{floor}\left(k/2\right). \end{aligned}$$

Remiantis MIP, įrodėme, kad $P(n)$ yra tiesa su visais $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

5 pavyzdys. Įrodysime, kad kiekvienas natūralusis skaičius $n \geq 2$ yra pirminis arba pirminių skaičių suma.

Įrodymas. Tegul $P(n)$ reiškia, kad n yra pirminis arba pirminių skaičių suma. Turime parodyti, kad $P(n)$ yra tiesa, kai $n \geq 2$.

1. $P(2)$ yra tiesa, nes 2 yra pirminis skaičius.
2. Tegul $k > 2$. Darome prielaidą, kad $P(m)$ yra tiesa, kai $m < k$, ir parodome, kad tokiu atveju ir $P(k)$ yra tiesa (žr. kitą skaidrę).

Jeigu k yra pirminis skaičius, tai $P(k)$ yra tiesa. Kitu atveju

$$k = ij$$

ir, remiantis prielaida,

$$P(i) \text{ ir } P(j)$$

yra teisingi teiginiai. Reiškia,

$$k = ij = j + j + \ldots + j$$

yra pirminių suma, nes j arba pirminis skaičius, arba gali būti užrašytas kaip pirminių skaičių suma. $\square$

MIP gali būti panaudotas įvairiems teiginiams matematikoje pagrįsti. Tai patvirtina ir šis pavyzdys:

6 pavyzdys. Tegul

$$L = \{a^m c^n b^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Matematinės indukcijos metodu galima įrodyti, kad kalbos L gramatika yra

$$\{S \to aSb, S \to T, T \to cT, T \to \Lambda\}.$$

Įrodymas sudėtingas.

Rekomenduojamos literatūros sąrašas

- James L. Hein, "Discrete Structures, Logic, and Computability"
- + StudentStudyGuide.pdf