# Diskrečioji matematika, IT 1 kursas

**Dr. Robertas Petuchovas**

Vilniaus universitetas

2016 - 2017 m.

# I skyrius. Pagrindinės sąvokos ir žymėjimai

## 1.1 Įrodymo abėcėlė

Nagrinėsime teiginius, kurie yra tiesa arba netiesa (true or false). Jeigu A ir B yra du teiginiai, tada:

> „not A" – teiginio A neiginys;
>
> „A and B" – teiginių A ir B konjunkcija;
>
> „A or B" – teiginių A ir B disjunkcija.

Teiginiams suprasti sudarinėjame jų teisingumo lenteles.

## Sąlyginiai teiginiai

| A | B | If A then B | If not B then not A | If B then A |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| F | T | T | T | F |
| T | F | F | F | T |
| F | F | T | T | T |

Turime, kad

$$„\text{If A then B}" \equiv „\text{If not B then not A}",$$

todėl teiginiai vadinami ekvivalentiškais.

Teiginys „If B then A" vadinamas priešingu teiginiui „If A then B".

## Įrodymo technikos

Panagrinėsime keletą įrodymų, susijusių su skaičiais, bet iš pradžių paminėsime reikalingas sąvokas.

- Sveikieji skaičiai: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
- Nelyginiai skaičiai: $\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots$
- Lyginiai skaičiai: $\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots$
- Sakome $m$ dalija $n$ ir rašome $m|n$, jeigu $m \neq 0$ ir $n = km$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Skaičius $p$ yra vadinamas pirminiu, jeigu $p > 1$ ir vieninteliai jo sveikieji teigiami dalikliai yra $1$ ir $p$.

## Atrankos būdas

Kai kurie teiginiai gali būti įrodyti atrankos būdu, tikrinant baigtinį atvejų skaičių.

*1 pavyzdys.* Tarp skaičių 200 ir 220 yra pirminis skaičius.

*Įrodymas.* Imdami skaičius iš eilės nuo 200 iki 220, išsiaiškiname, jog 211 yra pirminis skaičius, todėl teiginys teisingas. $\square$

*2 pavyzdys.* Kiekvienas iš skaičių 288, 198 ir 387 dalinasi iš devynių.

*Įrodymas.* Patikriname, kad 9 dalija kiekvieną skaičių. $\square$

## Sąlyginio teiginio įrodymas

Tariame, kad prielaida yra tiesa, ir dedukciniu būdu stengiamės gauti išvadą.

*3 pavyzdys.* Jeigu $x$ yra nelyginis skaičius, o $y$ lyginis, tada $x - y$ yra nelyginis.

*Įrodymas.* Pagal prielaidą, turime $x = 2k + 1$ ir $y = 2m$; $k, m \in \mathbb{Z}$. Tokiu atveju

$$x - y = 2k + 1 - 2m = 2(k - m) + 1,$$

o tai yra nelyginis skaičius, nes $k - m \in \mathbb{Z}$. $\square$

*4 pavyzdys.* Jeigu $x$ nelyginis, tai $x^2$ yra nelyginis skaičius.

*Įrodymas.* Pagal prielaidą, $x = 2k + 1$; $k \in \mathbb{Z}$. Todėl

$$\begin{aligned} x^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1, \end{aligned}$$

o tai yra nelyginis skaičius, nes $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$. □

*5 pavyzdys.* Jeigu $x^2$ nelyginis, tai $x$ yra nelyginis skaičius.

*Įrodymas.* Ekvivalentus tvirtinimas šiam tvirtinimui yra

„Jeigu $x$ yra lyginis, tai $x^2$ yra lyginis skaičius",

todėl užtenka įrodyti pastarąjį teiginį. □

## Teiginio „... tada ir tik tada ...” įrodymas

Teiginys

„A tada ir tik tada, jeigu B”

(trumpinys A $\Leftrightarrow$ B ) reiškia

„jeigu A, tai B”

ir

„jeigu B, tai A”.

Todėl šiuo atveju reikalingi du įrodymai. Kartais šie du įrodymai gali būti apjungti į vieną

„A $\Leftrightarrow$ C $\Leftrightarrow$ D $\Leftrightarrow$ ... $\Leftrightarrow$ B”,

kai kiekvienas teiginys aiškus iš prieš jį einančio.

*6 pavyzdys.* $x$ yra lyginis tada ir tik tada, kai $x^2 - 2x + 1$ yra nelyginis skaičius.

*Įrodymas.*

$$
\begin{aligned}
x \text{ yra lyginis } &\Leftrightarrow x = 2k, \ k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x - 1 = 2k - 1 \\
&\Leftrightarrow x - 1 = 2(k - 1) + 1 \\
&\Leftrightarrow x - 1 \text{ yra nelyginis skaičius} \\
&\Leftrightarrow (x - 1)^2 \text{ yra nelyginis skaičius (4 ir 5 pavyzdžiai)} \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \text{ yra nelyginis skaičius}
\end{aligned}
$$

$\square$

## Įrodymas prieštaros būdu

**Ap.** Klaidingas teiginys vadinamas prieštara.

Pvz., teiginys „$S$ ir *not* $S$" yra prieštara su bet kuriuo teiginiu $S$. Galime įsitikinti, kad

$$\text{„jeigu } A\text{, tai } B\text{"} \equiv \text{„jeigu } A \text{ ir } \mathit{not}\ B\text{, tai prieštara"}.$$

Tad, norint įrodyti pirmąjį teiginį, pakanka įrodyti antrąjį. Ši įrodymo technika vadinama įrodymu prieštaros būdu.

***1 pavyzdys.*** Jeigu $x^2$ yra nelyginis, tai $x$ yra nelyginis skaičius.

*Įrodymas:* Tarkime, $x$ yra lyginis. Tada $x = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ ir $x^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$ - lyginis skaičius. Gavome, kad $x^2$ yra nelyginis ir lyginis skaičius, kas yra prieštara. $\square$

***2 pavyzdys.*** Jeigu $2|5n$, tai $n$ yra lyginis.

*Įrodymas:* Tarkime, kad $n$ yra nelyginis. Turime $5n = 2d$, $n = 2k + 1$; $d, k \in \mathbb{Z}$. Todėl

$$\begin{aligned} 2d &= 5n \\ &= 5(2k + 1) \\ &= 10k + 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 5 = 2d - 10k = 2(d - 5k).$$

Gavome, kad 5 yra lyginis skaičius – prieštara. $\square$

# 1.2 Aibės

**Ap.** Aibė yra elementų rinkinys.

- $x \in S$ arba $x \notin S$.
- $\{x_1, \ldots, x_n\}$ yra aibė, kurią sudaro elementai $x_1, \ldots, x_n$.
- Tuščia aibė yra aibė, kuri neturi elementų. Ją žymime $\{\}$ arba $\emptyset$.
- $\{a\}$ - vieno elemento aibė, $\{a, b\}$ - dviejų elementų aibė ir t.t.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ ir } n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$,

$\mathbb{I}$ – iracionaliųjų skaičių aibė, todėl $\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$, o $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.

## Tapačios aibės

**Ap.** Jeigu aibes $A$ ir $B$ sudaro tie patys elementai, tada sakome, kad aibės $A$ ir $B$ yra lygios ir rašome $A = B$.

1 pvz., $\{a, b, c\} = \{c, b, a\}$ (neturi tvarkos sąryšio).

2 pvz., $\{a, a, b, c\} = \{a, b, c\}$ (neturi pasikartojančių elementų).

Tegul $S$ yra savybė, tada $\{x \mid S\}$ reiškia aibę, kurią sudaro elementai $x$, tenkinantys savybę $S$.

3 pvz., $\{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, \ldots\}$.

## Poaibiai

**Ap.** Jeigu kiekvienas aibės $A$ elementas priklauso ir aibei $B$, sakome, kad aibė $A$ yra aibės $B$ poaibis ir rašome $A \subset B$.

Pavyzdžiai:

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
2. $S \subset S$; čia $S$ bet kokia aibė.
3. $\emptyset \subset S$; čia $S$ bet kuri aibė.

**Ap.** Visų aibės $S$ poaibių aibę žymime $\mathrm{power}(S)$.

4. $\mathrm{power}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Galima įrodyti, kad $\mathrm{power}(A) = 2^{|A|}$.

Tegul $A = \{2k + 7 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ir $B = \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

*Klausimas.* Ar $A \subset B$?

*Atsakymas:* Ne, nes $9 \in A$, bet $9 \notin B$.

*Klausimas.* Ar $B \subset A$?

*Atsakymas:* Taip. Tegul $x \in B$. Kadangi $x = 4k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$, turime

$$\begin{aligned} x &= 4k + 3 \\ &= 4k - 4 + 7 \\ &= 2(2k - 2) + 7 \end{aligned}$$

ir todėl $x \in A$. Gavome, kad $B \subset A$.

**Lygybė per poaibių sąvokas:**

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \textbf{ ir } B \subset A.$$

*Pavyzdys.* Tegul $A = \{2k+5 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ir $B = \{2k+3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Parodysime, kad $A = B$.

*Įrodymas:* Iš pradžių parodysime, kad $A \subset B$. Tegul $x \in A$. Tada

$$x = 2k+5 = 2(k+1)+3 \in B.$$

Gavome, kad $A \subset B$. Dabar parodysime, kad $B \subset A$. Tegul $y \in B$. Tada

$$y = 2k+3 = 2(k-1)+5 \in A.$$

Gavome, kad $B \subset A$. Kadangi $A \subset B$ ir $B \subset A$, tai $A = B$. $\square$

## Veiksmai su aibėmis

Sąjunga: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ arba } x \in B\}$.

Sankirta: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ir } x \in B\}$.

Skirtumas: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ ir } x \notin B\}$.

Simetrinis skirtumas:
$A \oplus B = \{x \mid x \in A \text{ arba } x \in B, \text{ bet ne } x \in A \text{ ir } x \in B\}$.

Papildinys: Tarkime, kad turime universalią aibę $U$ ir $A \subset U$, tada rašome

$$A' = U - A$$

ir $A'$ vadiname aibės $A$ papildiniu.

*Pavyzdys.* Kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ tegul $D_n = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ir } x|n\}$. Tada

1. $D_0 = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} - \{0\}$, $D_5 = \{1, 5\}$, $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$, $D_9 = \{1, 3, 9\}$.
2. $D_5 \cup D_6 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$.
3. $D_5 \cap D_6 = \{1\}$.
4. $D_9 - D_6 = \{9\}$.
5. $D_5 \oplus D_6 = \{2, 3, 5, 6\}$.
6. Tegul $\mathbb{N}$ yra universali aibė. Tada $D_0' = \mathbb{N} - D_0 = \{0\}$ ir $\{0\}' = D_0$.

*Užduotis.* Turime trijų aibių $A, B, C$ Veno diagramas. Užrašykite užtušuotos srities išraišką veiksmų su aibėmis pavidalu.

**Veiksmų su aibėmis savybės**

- Komutatyvumas:
  $A \cup B = B \cup A$ ir $A \cap B = B \cap A$.
- Distributyvumas:
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ir
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Absorbcija:
  $A \cup (A \cap B) = A$ ir $A \cap (A \cup B) = A$.
- De Morgano dėsniai:
  $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ir $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

## Elementų aibėse skaičiavimas

**Ap.** Aibės $S$ elementų skaičių vadiname jos <u>dydžiu</u> arba <u>galia</u> ir žymime $|S|$ arba $\#S$.

- Rėčio principas: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- Skirtumo taisyklė: $|A - B| = |A| - |A \cap B|$.

*Užduotis.* Raskite formulę trijų aibių sąjungos galiai $|A \cup B \cup C|$ apskaičiuoti.

*Atsakymas:*
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

*Užduotis.* Tegul $A$, $B$ ir $C$ yra pieštukų aibės. Žinoma, kad $|A| = 20$, $|B| = 40$, $|C| = 60$, $|A \cap B| = 10$, $|A \cap C| = 8$, $|B \cap C| = 6$ ir $|U| = 100$. Nustatykite aibės $A \cap B \cap C$ galią.

*Atsakymas:* $|A \cap B \cap C| \leq 4$.

**Ap.** Multiaibe vadiname elementų rinkinį, kuriam tas pats elementas gali priklausyti daugiau nei vieną kartą.

Iš apibrėžimo seka, kad visos aibės yra multiaibės, bet ne visos multiaibės yra aibės.

Pvz., turime multiaibes: $[a, c, c, a] = [c, a, a, c] \neq [c, a, a]$, t.y., tvarka tarp elementų nėra svarbi, bet svarbus skirtingų elementų skaičius.

Multiaibių sąjunga ir sankirta apibrėžta tokiu būdu, kad imamas atitinkamai didžiausias ir mažiausias pasikartojančių elementų skaičius.

*Užduotis.* Tegul

$$A = [l, a, b, a, d, i, e, n, a]$$

ir

$$B = [l, a, b, a, s, l, a, b, a, s].$$

Išrašykite multiaibių $A \cup B$ ir $A \cap B$ elementus.

# 1.3 Tvarkingos struktūros

**Ap.** Kortežu vadiname elementų rinkinį, kuriame svarbi tvarka tarp elementų ir kuris gali turėti vienodų elementų.

Jeigu $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$, tai $x_i = y_i \ \forall i \in \overline{1, n}$.

**Ap.** Aibių $A$ ir $B$ Dekarto sandauga vadiname aibę

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ ir } y \in B\}.$$

Galima apibendrinti. Pvz.,

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) \mid x \in A,\ y \in B,\ z \in C\}.$$

Žymėjimai:

- $A^0 = \{()\}$,
- $A^1 = \{(x) \mid x \in A\}$,
- $A^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in A\}$.

*Klausimas.* Ar $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$?

**Ap.** Sąrašai yra panašūs į kortežus, tik nėra prieinama iš karto visa informacija.

Pvz., $\langle a, b, a, c \rangle$ sąrašas, kurį sudaro 4 elementai, o $\langle\rangle$ tuščias sąrašas.

Operacijos su sąrašais yra *head*, *tail* ir *cons*:

- $head(\langle a, b, a, c \rangle) = a$,
- $tail(\langle a, b, a, c \rangle) = \langle b, a, c \rangle$,
- $cons(a, \langle b, a, c \rangle) = \langle a, b, a, c \rangle$.

Aibę visų sąrašų, kurių visi elementai iš aibės $A$, žymime $lists(A)$.

*Klausimas.* Tegul $L = \langle \langle a \rangle, b, \langle c, d \rangle \rangle$. Kam lygūs $head(L)$ ir $tail(L)$?

**Ap.** Žodžiai (strings) yra panašūs į kortežus ir sąrašus, tik užrašomi kaip greta einantys vienas po kito elementai iš aibės, vadinamos abėcėle.

Pavyzdys. Jeigu $A = \{a, b\}$ yra abėcėlė, tai turime tokius žodžius virš aibės $A$:

$$a, b, aa, ba, bb, aaa, baa, \ldots$$

**Ap.** Dviejų žodžių junginiu vadiname žodį, kurio pradžią sudaro pirmas žodis, o pabaigą antras.

Pvz., žodžių $ab$ ir $bab$ junginys yra $abbab$.

- Tuščias žodis žymimas $\Lambda$.
- Su bet kuriuo žodžiu $z$, turime $z\Lambda = \Lambda z = z$.
- $z^n$ žymime žodį, t.y., $n$ raidžių junginį:
$$z^0 = \Lambda,\ z^1 = z,\ z^2 = zz \text{ ir t.t.}$$
  Pavyzdys. $(ab)^3 = ababab$.

## Kalbos

**Ap.** Kalba vadiname žodžių aibę, kuri paprastai sudaroma virš abėcėlės (raidžių aibės).

*Pavyzdys.* $\{ab^n a \mid n \in \mathbb{N}\} = \{aa, aba, abba, abbba, \ldots\}$ yra kalba virš $\{a, b\}$.

Jeigu $A$ abėcėlė, tai aibė visų žodžių virš $A$ žymima $A^*$.

*Pavyzdys.* Turime tokias kalbas virš $A$: $\emptyset$, $\{\Lambda\}$, $A$, $A^*$, ...

## Veiksmai su kalbomis

Tegul $L$ ir $M$ yra kalbos.

**Ap.** Kalbų $L$ ir $M$ sandauga yra kalba

$$LM = \{st \mid s \in L \text{ ir } t \in M\}.$$

Žymėjimai:

- $L^0 = \{\Lambda\}$,
- $L^n = \{s_1 \dots s_n \mid s_i \in L,\ i \in \overline{1, n}\}$.

*Klausimas.* Kam lygios sandaugos $L\emptyset$ ir $L\{\Lambda\}$? Ats.: $\emptyset$ ir $L$.

*Užduotis.* Išspręskite lygybę
$\{\Lambda, a, b\}L = \{\Lambda, a, b, aa, ba, aba, bba\}$. Ats.: $L = \{\Lambda, a, ba\}$.

**Ap.** Kalbos $L$ uždariniu vadiname aibę

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup \ldots \cup L^n \cup \ldots$$

*Klausimas.* Kokie žodžiai sudaro kalbas $\{\Lambda\}^*$ ir $\emptyset^*$? Ats.: $\Lambda$.

*Pavyzdys.* Kokia yra atsitiktinai paimto žodžio $x \in L^*(ML)^*$ struktūra?

*Sprendimas.* Apibūdinsime $x$ žodžiais iš $L$ ir $M$:

1. Kadangi $x \in L^*(ML)^*$, tai $x = uv$, $u \in L^*$ ir $v \in (ML)^*$.
2. Kadangi $u \in L^*$, tai $u = \Lambda$ arba $u = s_1 \ldots s_n$, čia $s_i \in L$.
3. Kadangi $v \in (ML)^*$, tai $v = \Lambda$ arba $v = r_1 t_1 \ldots r_k t_k$, $r_i \in M$, $t_i \in L$.

*Ats.:* $x$ turi vieną iš keturių pavidalų: $\Lambda$, $s_1 \ldots s_n$, $r_1 t_1 \ldots r_k t_k$ arba $s_1 \ldots s_n r_1 t_1 \ldots r_k t_k$; čia $s_i, t_i \in L$, o $r_i \in M$.

## Sąryšiai

**Ap.** Aibę kortežų vadiname sąryšiu.

Todėl sąryšis yra kažkurios Dekarto sandaugos poaibis. Pvz.,

$$\begin{aligned} R &= \{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9),\ldots,(n,n^2),\ldots\} \\ &= \{(n,n^2) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &\subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Galimi žymėjimai: $(2,4) \in R$, $R(2,4)$ arba $2R4$.

## Sąryšių duomenų bazė

**Ap.** *Sąryšių duomenų baze* vadiname sąryšį, kurio kortežų indeksai turi savo asocijuotus vardus, vadinamus *atributais.*

*Pavyzdžiui.* Tegul

$S = \{(x, y, z) \mid x - \text{Vardas}, y - \text{Specialybė}, z - \text{Kreditai}\}.$

a) Kurie studentai studijuoja kompiuterines sistemas?

   $\{x \mid (x, \text{kompiuterinės sistemos}, z) \in S, z \in \mathbb{N}\}.$

b) Kiek yra studentų, studijuojančių matematiką ir surinkusių ne mažiau kaip 90 kreditų?

   $|\{x \mid (x, \text{matematika}, z) \in S \text{ ir } z \geq 90\}|.$

c) Ką studijuoja Ema Linkoln?

   $\{y \mid (\text{Ema Linkoln}, y, z) \in S,\ z \in \mathbb{N}\}.$

Ir t.t.

## Kortežų skaičiavimas

Daugybos taisyklė:

$$|A \times B| = |A||B|$$

ir

$$|A^n| = |A|^n.$$

*Pavyzdys.* Tegul $A = \{a, b\}$ ir $B = \{1, 2, 3\}$. Tada

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

ir

$$|A \times B| = |A||B| = 2 \cdot 3 = 6.$$

*Pavyzdys.* Kiek yra žodžių virš $A = \{a, b, c\}$, kuriuos sudaro aštuonios raidės ir kurie prasideda raidėmis $a$ arba $c$, ir turi bent vieną raidę $b$?

*Sprendimas:* Tegul $U$ yra 8 ilgio žodžių aibė, kurioje jie prasideda raide $a$ arba $c$, o $B \subset U$ yra 8 ilgio žodžių aibė, kurioje jie neturi raidės $b$. Tada ieškomas dydis yra $|U - B|$,

$$\begin{aligned}
|U - B| &= |U| - |U \cap B| \\
&= |U| - |B| \\
&= |\{a, c\}||A|^7 - |\{a, c\}|^8 \\
&= (2)3^7 - 2^8 \\
&= 4118.
\end{aligned}$$

## 1.4 Grafai ir medžiai

**Ap.** Grafu vadiname aibių porą

$$(V, B);$$

čia $V$ - viršūnių aibė, o $B$ - briaunų aibė. Briaunų aibę sudaro 2-dydžio aibės, kurių elementai yra viršūnės iš $V$.

*1 pavyzdys.* Turime grafą $G = (V, B)$, kurio viršūnių aibė

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$

o briaunų aibė

$$B = \{\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}.$$

*2 pavyzdys.* Nubrėšime grafą, kurio viršūnės atitinka Pietų Amerikos šalis, kurių krantus skalauja Ramusis vandenynas, ir joms kaimynines šalis, o briaunos jungia tik viršūnes, kurios yra kaimyninių šalių.


$V$={Co, V, E, Br, P, Bo, Ch, A}
$B$={ {Co, V},{Co, E}, … }

**Ap.** Grafas $(V, B)$ tampa digrafu, kai nustatome visų jo briaunų kryptis.

*3 pavyzdys.* Turime digrafą $D = (V, B)$, kurio viršūnių aibė

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$

o briaunų aibė

$$B = \{(v_1, v_5), (v_5, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_3), (v_3, v_2)\};$$

čia $(v_1, v_5) \neq (v_5, v_1)$.

## Elementarios grafų teorijos sąvokos

<u>Gretimos viršūnės</u> – dvi viršūnės, kurias jungia briauna.

<u>Kelias</u> – gretimų viršūnių seka.

<u>Trasa</u> – kelias, kuriame nepasikartoja briaunos.

<u>Takas</u> – kelias, kuriame nepasikartoja viršūnės.

<u>Kelio ilgis</u> – kelią sudarančių briaunų skaičius, įskaitant pasikartojančias briaunas.

<u>Ciklas</u> – uždaras takas, t.y., kuris prasideda ir baigiasi toje pačioje viršūnėje.

<u>Grafo pografis</u> – grafas, kurio viršūnių ir briaunų aibės atitinkamai yra nagrinėjamo grafo viršūnių ir briaunų aibių poaibiai.

n-spalvis grafas – grafas, kurio viršūnės gali būti nuspalvintos n skirtingų spalvų tokiu būdu, kad gretimos būtų skirtingų spalvų.

Chromatusis skaičius – tai mažiausias spalvų skaičius, kurio pakanka grafo viršūnes nuspalvinti taip, kad gretimos būtų skirtingų spalvų.

*1 klausimas.* Antrame pavyzdyje, kokio ilgio ilgiausia trasa iš A į V, kuri neturi ciklų?

Ats.: Ilgio 7. Pvz., ABrBoChPECoV.

*2 klausimas.* Antrame pavyzdyje, koks grafo chromatusis skaičius?
Ats.: 3.

## Grafo apkeliavimas

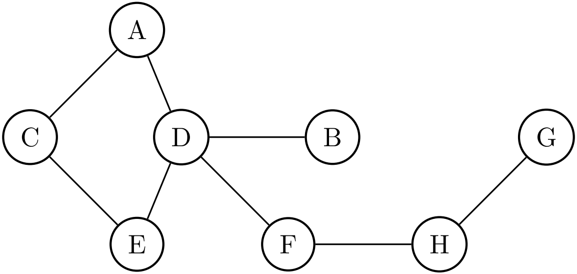
Grafo apkeliavimas prasideda pasirinktoje viršūnėje v ir aplanko visas viršūnes x, kurioms yra kelias iš v į x.

**Breadth-First:** Jeigu grafas turi n viršūnių, tai pradedame nuo viršūnės v ir toliau elgiamės tokiu būdu

**for** k:=0 **to** n-1 **do** visit(v,k) **od**;

čia visit(v,k) reiškia aplankome visas neaplankytas viršūnes x, jeigu tik yra k ilgio kelias iš v į x.

Paprastai tariant, Breadth-First apkeliavimas vyksta tokiu principu, kad visų pirma aplankomos viršūnės, esančios arčiausiai nuo pradinės.




*1 užduotis.* Raskite breadth-first apkeliavimą, kuris prasideda viršūnėje F. Vienas iš atsakymų: F,H,D,G,B,A,E,C.

*2 užduotis.* Raskite breadth-first apkeliavimą, kuris prasideda viršūnėje C. Vienas iš atsakymų: C,A,E,D,B,F,H,G.

**Depth-First:** Pradedame nuo viršūnės v ir iškviečiame procedūrą D(v), kuri apibrėžta taip:

D(v): **if** v viršūnė nebuvo aplankyta **then**
visit(v);
**for** kiekvienai briaunai iš v į x **do** D(x) **od**
**fi**

*3 užduotis.* Raskite depth-first apkeliavimą, kuris prasideda viršūnėje F. Vienas iš atsakymų: F,H,G,D,B,A,C,E.

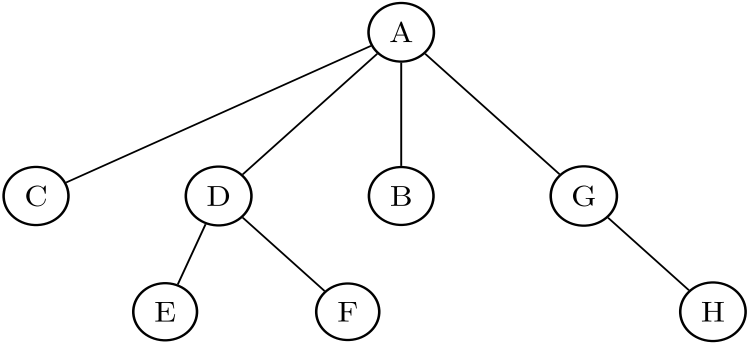
*4 užduotis.* Raskite depth-first apkeliavimą, kuris prasideda viršūnėje E. Vienas iš atsakymų: E,D,F,H,G,A,C,B.

## Medžiai

**Ap.** Jungiu grafu vadiname grafą, kuris turi kelią tarp bet kurių dviejų viršūnių.

**Ap.** Jungų beciklį grafą vadiname medžiu.

Medžio pavyzdys:



Keletas apibrėžimų, susijusių su medžiais:

<u>Šaknis</u> – viršutinė viršūnė.

<u>Vaikai</u> – viršūnės, esančios žemiau šaknies.

<u>Tėvas</u> – viršūnės gretima viršūnė, esanti per žingsnį aukščiau jos.

<u>Lapai</u> – žemiausiai esančios viršūnės.

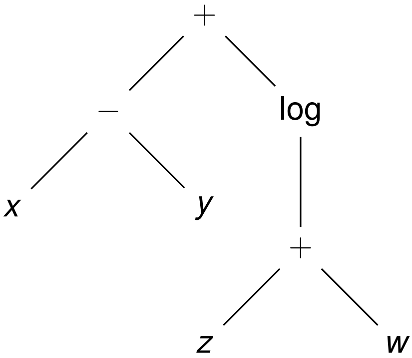
<u>Medžio ilgis</u> – ilgiausia trasa, prasidedanti šaknyje ir pasibaigianti lape.

Vienas iš būdų pateikti medį yra sąrašas, kurio *head* yra šio medžio šaknis, o *tail* - pografių sąrašas, kuriame kiekvienas pografis pateiktas tuo pačiu principu.

Pavyzdžiui, anksčiau pavaizduotas medis, užrašytas kaip sąrašas, atrodo taip.

$$\langle A, \langle C\rangle, \langle D, \langle E\rangle, \langle F\rangle\rangle, \langle B\rangle, \langle G, \langle H\rangle\rangle\rangle.$$

Kiekvienas algebrinis reiškinys gali būti pavaizduotas kaip medis. Pvz., nubrėšime reiškinio $(x - y) + \log(z + w)$ medį.




*Užduotis.* Apkeliaukite šį medį depth-first (iš kairės į dešinę) principu.
*Atsakymas:* $+ - xy \log + zw$.

## Binarieji medžiai

**Ap.** Binariuoju medžiu vadiname tuščią medį $\langle\rangle$ arba medį, kurio kiekviena viršūnė turi du pografius, kurie yra binarieji medžiai.

Pastebime, kad binariojo medžio apibrėžimas yra rekurentinis.

**Ap.** Binariojo medžio viršūnių pografiai vadinami kairiuoju ir dešiniuoju.

Jeigu binarusis medis netuščias, mes jį galime pateikti kaip sąrašą

$$\langle L, x, R\rangle,$$

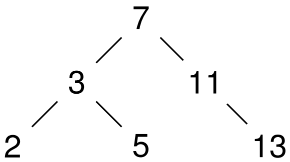
kuriame $x$ yra šaknis, o $L$ ir $R$ yra atitinkamai kairysis ir dešinysis $x$ pografiai.

*Pavyzdys.* Binarusis medis su vienintele viršūne $x$ turi pavidalą

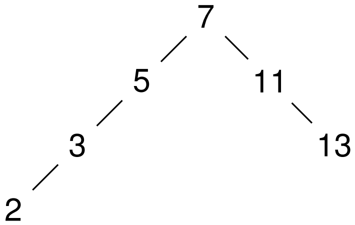
$$\langle \langle \rangle, x, \langle \rangle \rangle .$$

Binarusis paieškos medis pateikia sutvarkytą informaciją. Jame pradinė ir tolimesnė informacija yra atitinkamai viršūnės kairiajame ir dešiniajame pografiuose.

*Pavyzdys.* Nubrėšime pirmųjų šešių pirminių skaičių paieškos binarųjį medį.




arba

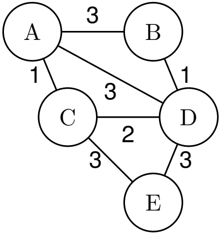


## Dengiantysis medis

**Ap.** Jungaus grafo dengiančiuoju medžiu vadiname medį, kurio viršūnės sutampa su grafo viršūnėmis ir kurio briaunų aibė yra grafo briaunų aibės poaibis.

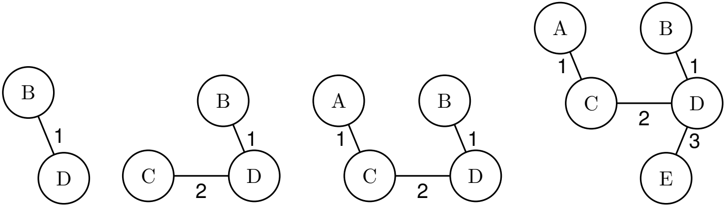
**Ap.** Minimalus dengiantysis medis – grafo dengiantysis medis, kurio briaunų svorių suma yra mažiausia.

*Pavyzdys.* Taikydami Primo algoritmą, rasime grafo

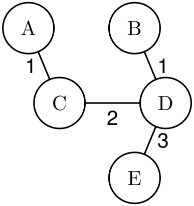



minimalų dengiantįjį medį. Sutariame pradėti nuo viršūnės D.

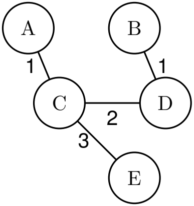
*Sprendimas:*




Ats.:




arba



# Rekomenduojamos literatūros sąrašas

- James L. Hein, "Discrete Structures, Logic, and Computability"
- + StudentStudyGuide.pdf