1 Pirminiai skaičiai

1.1. Raskite didžiausią bendrą daliklį $\mathrm{dbd}(455, 1235)$.

1.2. Naudodami Eratosteno rėtį raskite visus pirminius skaičius mažesnius už 100.

1.3. Įrodykite, kad aritmetinėje progresijoje $6x - 1$ yra be galo daug pirminių skaičių.

1.4. Įrodykite, kad $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi(x)}{x} = 0$.

1.5. Tarkime a, b, c, n yra sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad

(a) jei $\mathrm{dbd}(a, b) = 1$, $a \mid n$ ir $b \mid n$, tai $ab \mid n$.

(b) jei $a \mid bc$ ir $\mathrm{dbd}(a, b) = 1$, tai $a \mid c$.

1.6. Tarkime a, b, c, d ir m yra sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad

(a) jei $a \mid b$ ir $b \mid c$, tai $a \mid c$.

(b) jei $a \mid b$ ir $c \mid d$, tai $ac \mid bd$.

(c) jei $m \neq 0$, tai $a \mid b$ tada ir tik tada, kai $ma \mid mb$.

(d) jei $d \mid a$ ir $a \neq 0$, tai $|d| \leq |a|$.

1.7. Naudodami dalybos algoritmą, raskite tokius q ir r, kad $a = bq + r$ ir $0 \leq r < |b|$:

$$a = 300, b = 17,$$
$$a = 729, b = 31,$$
$$a = 300, b = -17,$$
$$a = 389, b = 4.$$

1.8. Raskite skaičių 323 ir 437 didžiausią bendrą daliklį naudodami Euklido algoritmą.

1.9. (a) Tarkime, kad a, b ir n yra natūralieji skaičiai. Įrodykite, kad jei $a^n \mid b^n$, tai $a \mid b$.

(b) Tarkime, kad p yra pirminis skaičius, o a ir k yra natūralieji skaičiai. Įrodykite, kad jei $p \mid a^k$, tai $p^k \mid a^k$.

1.10. (a) Įrodykite, kad jei natūralusis skaičius n yra pilnas kvadratas, tai n negali būti užrašytas kaip $4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$).

(b) Įrodykite, kad joks sekos

$$11, 111, 1111, 11111, 111111, \ldots$$

narys nėra pilnas kvadratas.

1.11. Įrodykite, kad natūralusis skaičius n yra pirminis skaičius tada ir tik tada, kai n nesidalija iš jokio pirminio skaičiaus mažesnio už $\sqrt{n}$.

1.12. Raskite 1000 dalybos iš 7 liekaną.

1.13. Raskite kiek yra skaičių, kurių

- vienas iš daliklių yra 3 ir vienas iš kartotinių yra 30?
- vienas iš daliklių yra 3 ir vienas iš kartotinių yra 31?

1.14. Raskite bent vieną skaičių, kuris yra 3, 4, 5 ir 6 kartotinis. Kiek tokių skaičių yra?

1.15. Kiek yra skaičių nuo 1 iki 1000, besidalijančių iš 13?

1.16. Įrodykite, kad bet kaip sudėliojus devynis skaitmenis $1, 2, \ldots, 9$, gautas devynženklis skaičius dalinsis iš 9.

1.17. Įrašykite žvaigždučių vietoje tokius skaitmenis, kad skaičius $15{*}{*}15$ dalytųsi iš 99.

1.18. Tegu a yra b kartotinis. Ar tiesa, kad bet kuris a daliklis yra ir b daliklis? O atvirkščiai, ar bet kuris b daliklis yra ir a daliklis?

1.19. Ar skaičius, kurio skaitmenų suma lygi 5, gali dalintis iš 11?

1.20. Įrodykite, kad skaičiaus, kuris dalijasi iš 99, skaitmenų suma yra ne mažesnė už 18.

1.21. Raskite bent vieną n, kad intervale $[n, n+10]$ nebūtų nė vieno pirminio skaičiaus.

1.22. Duotas 100-ženklis skaičius a, kuris dalijasi iš 9. Žinome, kad b yra a skaitmenų suma, c yra b skaitmenų suma, d yra c skaitmenų suma. Kam lygus skaičius d?

1.23. Nurodykite kokį nors skaičiaus $n = 27^{28} + 4$ daliklį skirtingą nuo 1 ir paties n.

1.24. Raskite visus n, su kuriais $n^2 + 1$ dalijasi iš $n + 1$.

1.25. Kokius skaičius galime išreikšti suma $8x + 5y$, kur $x, y \in \mathbb{Z}$?

1.26. Raskite visus sveikuosius n, su kuriais skaičius $\frac{n^3+3}{n^2+7}$ yra sveikasis.

1.27. Duota, kad $11|3x + 7y$ ir $11|2x + 5y$. Įrodykite, kad $121|x^2 + 3y^2$.

1.28. Samprotaudami panašiai kaip įrodyme, kad pirminių skaičių yra be galo daug, įrodykite, kad pirminių skaičių pavidalo $4k+3$ yra be galo daug.

1.29. Raskite visus pirminius skaičius p ir q, tenkinančius $p|q+6$ ir $q|p+7$.

1.30. Įrodykite, kad $\underbrace{11\cdots1}_{3^n}$ dalijasi iš 3^n.

1.31. Tegu $n \geq 2$ natūralusis skaičius, kurio dalikliai yra $1 = d_1 < d_2 \cdots < d_k = n$. Įrodykite, kad $d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$ yra visuomet mažesnis už n^2, ir raskite, kada jis yra n^2 daliklis.

1.32. Raskite didžiausią bendrąjį skaičių 1234 ir 5678 daliklį.

1.33. Raskite sveikuosius x, y, tenkinančius $182x + 413y = 7$.

1.34. Raskite tris skaičius, kurie neturi bendro daliklio, tačiau nėra tarpusavyje pirminiai imant po du.

1.35. Įrodykite, kad jei $\mathrm{dbd}(a, b) = \mathrm{mbk}(a, b)$, tai $a = b$.

1.36. Tegu $a|b$. Kam lygūs $\mathrm{dbd}(a, b)$ ir $\mathrm{mbk}(a, b)$?

1.37. Raskite $\mathrm{dbd}(n, n + 1)$ ir $\mathrm{mbk}(n, n + 1)$.

1.38. Tegu $(a, b) = 1$. Įrodykite, kad $(a + b, a - b)$ lygus 1 arba 2.

1.39. Ar teisingi šie teiginiai:

(a) Jei $\mathrm{dbd}(a, b) = \mathrm{dbd}(a, c)$, tai $\mathrm{mbk}(a, b) = \mathrm{mbk}(a, c)$,

(b) Jei $(a, b) = (a, c)$, tai $(a^2, b^2) = (a^2, c^2)$,

(c) Jei $(a, b) = (b, c)$, tai $(a, b) = (a, b, c)$,

(d) $\mathrm{mbk}(a^2, b^2) = \mathrm{mbk}(a^2, ab, b^2)$,

(e) $(a, b, c) = ((a, b), (b, c))$?

1.40. Įrodykite, kad $(a, a + k)|k$.

1.41. Įrodykite, kad $\mathrm{mbk}(a, b) \cdot \mathrm{dbd}(a, b) = ab$.

1.42. Raskite visus trejetus a, b, c, kurie tenkina $(a, b, c) = 10$ ir $\mathrm{mbk}(a, b, c) = 100$.

1.43. Ar teisinga lygybė $\text{mbk}(a, b, c) \cdot \text{dbd}(a, b, c) = abc$?

1.44. Tegu a, b, c sveikieji. Įrodykite, kad lygtis $ax + by = c$ turi sveikųjų sprendinių tada ir tik tada, kai $(a, b)|c$.

1.45. Kiek yra sveikųjų skaičių $1 \leq n \leq 100$, kad

(a) $\text{dbd}(n^2 + 1, n + 1) > 1$,

(b) $\text{dbd}(n^2 + 1, n + 2) > 1$?

1.46. Įrodykite, kad $a|bc$ tada ir tada, kai $\frac{a}{(a,b)}|c$.

1.47. Duota, kad trupmena $\frac{a}{b}$ yra suprastinama. Ar trupmena $\frac{a-b}{a+b}$ būtinai yra suprastinama? Ir atvirkščiai, jei žinoma, kad trupmena $\frac{a-b}{a+b}$ yra suprastinama, ar trupmena $\frac{a}{b}$ būtinai yra suprastinama?

1.48. Tegu $(a, b) = 1$. Įrodykite, kad $(a + b, a^2 - ab + b^2)$ lygus 1 arba 3.

1.49. Įrodykite, kad trupmena $\frac{21n+4}{14n+3}$ yra nesuprastinama su visomis natūraliosiomis n reikšmėmis.

1.50. Įrodykite, kad nėra tokių sveikųjų a, b, $n > 1$, su kuriais $(a^n - b^n)|(a^n + b^n)$.

1.51. Įrodykite, kad nėra tokių sveikųjų a, $b > 2$, su kuriais $2^b - 1|2^a + 1$.

1.52. Įrodykite, kad $(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1$, kai $n \in \mathbb{N}$.

1.53. Įrodykite, kad jei $(a, b) = 1$ ir p yra nelyginis pirminis, tai

$$\left(a + b, \frac{a^p + b^p}{a + b}\right) = 1 \text{ arba } p.$$

1.54. Tegu k ir m, $k > m$, tokie natūralieji skaičiai, kad $km(k^2 - m^2)$ dalijasi iš $k^3 - m^3$. Įrodykite, kad $(k - m)^3 > 3km$.

1.55. Raskite visus skaičiaus 60 daliklius, besidalijančius iš trijų.

1.56. Su kuriomis natūraliosiomis n reikšmėmis skaičius $n^2 + 5n + 6$ pirminis?

1.57. Tegu $(a, b) = p$, kur p – pirminis. Kokias reikšmes gali įgyti

(a) (a^2, b),

(b) (a^3, b),

(c) (a^3, b^2)?

1.58. Tegu $(a^2, p) = p$ ir $(b, p^3) = p^2$, kur p – pirminis. Kokias reikšmes gali įgyti

(a) $(a + b, p^4)$,

(b) (ab, p^4)?

1.59. Su kuriomis $a, b > 1$ reikšmėmis $a - b|a + b$?

1.60. Tegu $(a, b) = 1$. Įrodykite, kad jei $a|c$ ir $b|c$, tai $ab|c$.

1.61. Įrodykite, kad skaičius turi nelyginį daliklių skaičių tada ir tik tada, kai jis yra sveikojo skaičiaus kvadratas.

1.62. Įrodykite, kad jei $(a, b) = 1$ ir ab kvadratas, tai ir a, b kvadratai.

1.63. Ar egzistuoja skaičius n, su kuriuo $3n$ turi 60 daliklių, o $7n$ turi 80 daliklių?

1.64. Raskite mažiausią sveikąjį skaičių turintį 75 daliklius ir besidalijantį iš 75.

1.65. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kurio pusė yra sveikojo skaičiaus kvadratas, trečdalis yra sveikojo skaičiaus kubas, o penktadalis yra sveikojo skaičiaus penktasis laipsnis.

1.66. Su kuriomis n reikšmėmis $n|(n-1)!$?

1.67. Įrodykite, kad $\mathrm{mbk}(a,b,c)\cdot\mathrm{dbd}(ab,bc,ca)=abc$, kur $a,b,c\in\mathbb{N}$.

1.68. Įrodykite, kad $(ab,cd,ac+bd)|(ac,bd)$. Ar visuomet $(ac,bd)|(ab,cd,ac+bd)$?

1.69. Įrodykite, kad n^4+4 ir n^4+n^2+1 yra sudėtiniai, kai $n>1$.

1.70. Su kuriomis neneigiamomis n reikšmėmis vienu metu $2n+1$ ir $3n+1$ yra pilnieji kvadratai ir $5n+3$ yra pirminis?

1.71. Kokius skaičius galima išreikšti kaip sumą dviejų ar daugiau iš eilės einančių natūraliųjų skaičių? Kokių nelyginių skaičių negalima išreikšti suma trijų ar daugiau iš eilės einančių natūraliųjų skaičių?

1.72. Raskite visas skirtingų sveikųjų skaičių aibes, susidedančias bent iš trijų elementų, kurių bet kurio elementų trejeto suma dalinasi iš kiekvieno to trejeto elemento.

1.73. Įrodykite, kad $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}$ nėra sveikasis su visomis $n>1$ reikšmėmis.

1.74. Įrodykite, kad kiekvienas pirminis p dalo $\binom{p}{i}$, jei $0<i<p$, kur $\binom{i}{p}$ yra binominis koeficientas. Ar teiginys teisingas sudėtiniams skaičiams?

1.75. Nagrinėdami seką $2^{2^1}+1$, $2^{2^2}+1$, $2^{2^3}+1$,..., įrodykite, kad pirminių skaičių yra be galo daug.

1.76. Raskite visus skaičius n, kurių bet kurių dviejų daliklių nelygių nei 1 nei n skirtumas taip pat yra n daliklis.

2 Lyginiai

2.1. Įrodykite, kad $\mathbb{Z}_n$ yra grupė daugybos atžvilgiu.

2.2. Naudodami Euklido algoritmą, raskite tokius x, $y\in\mathbb{Z}$, kad $2261x+1275y=17$.

2.3. Įrodykite, kad binominis koeficientas

$$\frac{p!}{r!(p-r)!}$$

yra sveikasis skaičius.

2.4. Įrodykite, kad jei a ir b yra sveikieji skaičiai, ir p yra pirminis skaičius, tai $(a+b)^p\equiv a^p+b^p \pmod p$.

2.5. (a) Įrodykite, kad jei x,y yra lygties $ax+by=d$ sprendinys ($\mathrm{dbd}(a,b)=d$), tai su visais $c\in\mathbb{Z}$

$$x'=x+c\cdot\frac{b}{d},\qquad y'=y-c\cdot\frac{a}{d}$$

taip pat yra lygties $ax+by=d$ sprendinys.

(b) Raskite du skirtingus lygties $2261x+1275y=17$ sprendinius.

(c) Įrodykite, kad visi sprendiniai yra (a) punkte nurodyto pavidalo.

2.6. Raskite visų liekanų moduliu 7 aibę R, kurios elementai yra: (1) neneigiami, (2) nelyginiai, (3) lyginiai, (4) pirminiai.

2.7. Įrodykite dalybos iš 5, 9 ir 11 požymius.

2.8. *(1998 Putnam)* Dešimtainė sveikųjų skaičių seka apibrėžta taip: $a_1=0$, $a_2=1$, o a_{n+2} gaunamas „sulipinus“ a_{n+1} su a_n. Pavyzdžiui, $a_3=10$, $a_4=101$, $a_5=10110$ ir t. t.

(a) Raskite tokį mažiausią sveikąjį skaičių $n > 1$, kad a_n dalytųsi iš 11.

(b) Įrodykite, kad a_n dalijasi iš 11 tada ir tik tada, kai $n \equiv 1 \pmod 6$.

2.9. Išspręskite lygtį $37x \equiv 1 \pmod{101}$.

2.10. Kokia yra 2 eilė moduliu 17?

2.11. Įrodykite, kad jei p yra pirminis, tai $\mathbb{Z}_p$ yra kūnas.

2.12. Raskite tokį $x \in \mathbb{Z}$, kad $x \equiv -4 \pmod{17}$ and $x \equiv 3 \pmod{23}$.

2.13. Įrodykite, kad jei $n > 4$ yra sudėtinis skaičius, tai

$$(n-1)! \equiv 0 \pmod n.$$

2.14. Su kuriomis n reikšmėmis, $\varphi(n)$ yra nelyginis skaičius?

2.15. Raskite liekanas, gaunamas dalijant

(a) $1 + 11 + 111 + 1111 + 11111$ iš 9,

(b) $555 \cdot 777 + 666 \cdot 888$ iš 9,

(c) 7^{777} iš 10.

2.16. Įrodykite, kad $ab + cd \equiv ad + bc \pmod{a - c}$.

2.17. Įrodykite, kad jei $a \equiv 1 \pmod 6$, tai $a \equiv 1 \pmod 3$. Ar teisingas atvirkščias teiginys?

2.18. Įrodykite, kad su visais n:

(a) $2|n^2 - n$

(b) $30|n^5 - n$

(c) $42|n^7 - n$

2.19. Įrodykite, kad $n^2 + 2$ niekada nesidalina iš 4.

2.20. Įrodykite, kad jei $3|a^2 + b^2$, tai $3|a$ ir $3|b$.

2.21. Įrodykite, kad jei $a \equiv b \pmod n$, tai $\mathrm{dbd}(a, n) = \mathrm{dbd}(b, n)$.

2.22. Įrodykite dalumo požymius iš 3, 9 ir 11.

2.23. Įrodykite, kad skaičiaus ir jo skaitmenų sumos dalybos iš 9 liekanos sutampa.

2.24. Tegu n – nelyginis. Įrodykite, kad $8|n^2 - 1$.

2.25. Tegu n nesidalija nei iš dviejų nei iš trijų. Įrodykite, kad $24|n^2 - 1$.

2.26. Įrodykite, kad $10^n + 45n - 1$ dalijasi iš 27.

2.27. Įrodykite, kad $n^2 + 3n + 5$ nesidalija iš 121 su visomis n reikšmėmis.

2.28. Įrodykite, kad su visomis sveikomis n reikšmėmis skaičius $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$ yra sveikasis.

2.29. Įrodykite, kad $6|a + b + c$ tada ir tik tada, kai $6|a^3 + b^3 + c^3$

2.30. Tegu q daugianaris su sveikaisiais koeficientais. Įrodykite, kad bet kokiems sveikiesiems x ir y teisinga $q(x) \equiv q(x + y) \pmod y$.

2.31. Ar egzistuoja daugianaris su sveikaisiais koeficientais, kurio visos reikšmės yra pirminiai skaičiai?

2.32. Raskite visus pirminius p ir q tenkinančius lygybę $p^2 - 2q^2 = 1$.

2.33. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis reiškinys $36^n + 24^n - 7^n - 5^n$ dalijasi iš 899 be liekanos.

2.34. Kiek skaitmenų turi skaičius $1010\cdots101$, jeigu jis dalijasi iš 9999?

2.35. Raskite visus pirminius skaičius p, su kuriais $11 + p^2$ turi ne daugiau nei 11 daliklių.

2.36. Raskite tokius penkis skaičius $a_1, \cdots, a_5$, kad kiekvienas sveikasis x tenkintų bent vieną iš lyginių $x \equiv a_1 \pmod 2$, $x \equiv a_2 \pmod 3$, $x \equiv a_3 \pmod 4$, $x \equiv a_4 \pmod 6$, $x \equiv a_5 \pmod{12}$.

2.37. Raskite visus natūraliųjų skaičių trejetus a, b, c tenkinančius $a \equiv b \pmod c$, $b \equiv c \pmod a$, $c \equiv a \pmod b$.

2.38. Raskite, kokią liekaną gausime dalindami 3^{33} iš 13, 7^{77} iš 17, 9^{99} iš 19.

2.39. Raskite $11^{11^{11}}$ dalybos iš 15 liekaną.

2.40. Kodėl keldami laipsniais skaičius, kurie nėra tarpusavyje pirminiai su n, niekada negausime liekanos 1 moduliu n?

2.41. Įrodykite, kad $n^{13} - n$ visuomet dalinasi iš 2, 3, 5, 7 ir 13.

2.42. Įrodykite, kad jei a ir b tarpusavyje pirminiai su 91, tai $91|a^{12} - b^{12}$.

2.43. Tegu p, q skirtingi pirminiai. Įrodykite, kad $pq|n^{pq} - n^p - n^q + n$ su visais $n \in \mathbb{N}$.

2.44. Įrodykite, kad su visomis n reikšmėmis $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ dalijasi iš 7.

2.45. Kiek yra skaičių mažesnių už ab ir tarpusavyje pirminių su a, kur a ir b natūralieji? Atsakymą užrašykite naudodami φ funkciją.

2.46. Įrodykite, kad visų skaičių mažesnių už n ir tarpusavyje pirminių su n suma lygi $n\varphi(n)/2$.

2.47. Tegu p ir q pirminiai nedalantys a. Įrodykite, kad jei $q - 1|p - 1$, tai $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

2.48. Tegu p – pirminis. Įrodykite, kad jei $a^p \equiv b^p \pmod p$, tai $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$.

2.49. Tegu a, b, c sveikieji skaičiai ir $a + b + c = 0$. Ar gali $a^{47} + b^{47} + c^{47}$ būti pirminis?

2.50. Įrodykite, kad kiekvienam pirminiam p, išskyrus 2 ir 5, egzistuoja be galo daug pavidalo $11\ldots11$ skaičių, besidalijančių iš p.

2.51. Įrodykite, kad kiekvienas n turį kartotinį m, kurio skaitmenys yra tik 1 arba 0. Ar teiginys išlieka teisingas, jei m skaitmenimis gali būti tik 1 ir 2?

2.52. Kada $\varphi(ab) = a\varphi(b)$? Kada $\varphi(ab) = \varphi(b)$? Kada $\varphi(2n) > \varphi(n)$?

2.53. Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug tokių natūraliųjų skaičių n, kad $2003^n - 1$ dalijasi iš n be liekanos.

2.54. Iš sekos $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3^{a_n}$ gauta seka $\{b_n\}$ kur b_i lygus a_i dalybos iš 100 liekanai. Ar seka b_i periodinė?

2.55. Įrodykite, kad jei $n\varphi(n) = m\varphi(m)$, tai $n = m$.

2.56. Ant lentos užrašytas natūralusis skaičius. Prie jo dešinės galime prirašyti bet kokį skaitmenį išskyrus 9. Įrodykite, kad kaip berašinėtume, ilgainiui gausime sudėtinį skaičių.

2.57. Tegu $a_1, a_2, \dots, a_m$ natūralieji skaičiai, $m \geq 2$. Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug natūraliųjų n, su kuriais $a_1 1^n + a_2 2^n + \dots + a_m m^n$ yra sudėtinis.

2.58. Įrodykite, kad seka $1^1, 2^2, 3^3, \cdots$ yra periodinė moduliu p.

2.59. Raskite visus daugianarius $q(x)$ su sveikais koeficientais, tenkinančius $q(n)|2^n - 1$ su visais $n \in \mathbb{N}$.

2.60. Raskite sveikuosius skaičius, kurie yra tarpusavyje pirminiai su visais sekos $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ nariais.

2.61. Tegu $n \geq 2$ – natūralusis skaičius ir $n|3^n + 4^n$. Įrodykite, kad $7|n$.

2.62. Išspręskite lyginių sistemas:

$$\begin{cases} r \equiv 0 \pmod 5, \\ r \equiv 4 \pmod 7, \\ r \equiv 3 \pmod{11}; \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} 3r \equiv 1 \pmod 5, \\ 3r \equiv 1 \pmod 7, \\ 3r \equiv 1 \pmod{11}. \end{cases}$$

2.63. Kam lygūs du paskutiniai 3^{400} skaitmenys?

2.64. Kokią liekaną gausime dalindami skaičių $123456789101112\dots20082009$ iš 450?

2.65. Ar egzistuoja x, tenkinantis lyginius $x \equiv 29 \pmod{52}$ ir $x \equiv 19 \pmod{72}$?

2.66. Sekdami funkcijos φ multiplikatyvumo įrodymą, parodykite, kad $\varphi(24) = \varphi(3)\varphi(8)$. Raskite visas liekanas tarpusavyje pirmines su 24, visas poras liekanų, tarpusavyje pirminių su 3 ir 8 bei atitikmenį tarp jų (t.y. kuri pora, kuriai liekanai priskiriama).

2.67. Užbaikite funkcijos φ multiplikatyvumo įrodymą. Parodykite, kad bet kuriam skaičiui priskiriama pora (y_i, y'_j) tenkins $(y_i, m) = 1$ ir $(y'_j, n) = 1$, bei bet kuriai porai priskiriamas skaičius x_i tenkins $(x_i, mn) = 1$.

2.68. Raskite mažiausiąjį natūralųjį a, kad $5x^{13} + 13x^5 + 9ax$ dalintųsi iš 65 su visomis natūraliomis x reikšmėmis.

2.69. Įrodykite, kad nepaisant to, jog $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ yra sudėtinis, jam vistiek "galioja mažoji Ferma teorema", t.y. kiekvienam a teisinga $a^{561} \equiv a \pmod{561}$. (Tokie skaičiai yra vadinami *pseudopirminiais*).

2.70. Įrodykite, kad egzistuoja dešimt iš eilės einančių skaičių, kurie turi bent po 100 skirtingų pirminių daliklių.

2.71. Tegu $(a, b) = 1$ ir $c > 0$. Įrodykite, kad egzistuoja x tenkinantis $(a+bx, c) = 1$. (Užuomina: išskaidykite c pirminiais dauginamaisiais)

2.72. Tegu a, b, c trys skirtingi sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad egzistuoja be galo skaičių n, su kuriais $(a + n, b + n) = (a + n, c + n) = (b + n, c + n) = 1$.

2.73. Ar egzistuoja toks natūralusis a, kad skaičiai $a, 2a, 3a, \dots, 1997a$ būtų natūraliųjų skaičių laipsniai?

2.74. Tegu $\psi(n)$ žymi skaičių $\{1, 2, \cdots, n\}$ mažiausią bendrą kartotinį. Įrodykite, kad kiekvienam a egzsituoja b, toks kad $\psi(a+1) = \psi(a+2) = \cdots = \psi(a+b)$.

2.75. Įrodykite, kad bet kurioje didėjančioje begalinėje aritmetinėje progresijoje galime rasti kiek norima daug iš eilės einančių sudėtinių skaičių.

2.76. Įrodykite, kad kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ egzistuoja tokie didesni už vienetą tarpusavyje pirminiai skaičiai $k_1, k_2, \dots, k_n$, kad $k_1 k_2 \cdots k_n - 1$ išsiskaido kaip dviejų paeiliui einančių natūraliųjų skaičių sandauga.

2.77. Sveikųjų skaičių gardelės plokštumoje tašką vadinsime nematomu, jei jį ir koordinačių pradžios tašką jungiančiai atkarpai priklauso dar bent vienas gardelės taškas. Įrodykite, kad kiekvienam n atsiras kvadratas, kurio kraštinės ilgis n ir kurio visi viduje esantys taškai yra nematomi.

2.78. Natūralųjį skaičių n vadinsime *neįtikėtinu*, jei pavyks rasti tris natūraliuosius skaičius a, b, c, tenkinančius $n = (b, c)(a, bc) + (c, a)(b, ca) + (a, b)(c, ab)$. Įrodykite, kad egzistuoja 2011 iš eilės einančių neįtikėtinų skaičių.

2.79. Įrodykite, kad egzistuoja tokia natūraliųjų skaičių seka $\{a_n\}$, kad su bet kuriuo k sekoje $\{k + a_n\}$ yra tik baigtinis skaičius pirminių.

2.80. Tegu $P(x)$ daugianaris su sveikaisiais koeficientais. Tegu aibė $\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$, tokia, kad su kiekviena x reikšme $P(x)$ dalijasi bent iš vieno tos aibės elemento. Įrodykite, kad tuomet $P(x)$ visada dalinsis iš kažkurio vieno tos aibės elemento.

2.81. Įrodykite, kad kiekvieniems tarpusavyje pirminiams a ir b egzistuoja tokie natūralieji m ir n, kad $a|m, b|n$, bet $a \nmid n, b \nmid m$, ir tenkinantys

$$m|n^2 + n \text{ ir } n|m^2 + m.$$

2.82. Raskite visų tarpusavyje pirminių su 8 liekanų moduliu 8 eiles.

2.83. Įrodykite, kad liekanos ir jos atvirkštinės liekanos eilės sutampa.

2.84. Kodėl visos liekanos moduliu sudėtinio skaičiaus nesudaro grupės?

2.85. Kam lygi visų liekanų moduliu n suma? Kam lygi visų tarpusavyje pirminių su n liekanų suma?

2.86. Tegu liekanos a moduliu p eilė lygi d. Parodykite, kad jei $a^r \equiv a^s \pmod p$, tai $r \equiv s \pmod d$.

2.87. Kiek šaknų moduliu pirminio p turi daugianaris $x^2 - 1$? Kam jos lygios?

2.88. Tegu liekanos a eilė moduliu pirminio p yra $2k$. Ar būtinai tuomet $a^k \equiv -1 \pmod p$?

2.89. Kiek šaknų moduliu 6 turi daugianaris $x^2 + x$? Pasirinkę šaknį 2 sekite teiginio apie šaknų skaičių moduliu p įrodymą. Kuri jo vieta neteisinga moduliu sudėtinio skaičiaus?

2.90. Įrodykite Vilsono (*Wilson*) teoremą: jei p pirminis, tai visų tarpusavyje pirminių su p liekanų sandauga yra lygi -1, arba kitaip:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p.$$

(Užuomina: nagrinėkite viena kitai atvirkštinių liekanų poras)

2.91. Parodykite, kad $61! + 1 \equiv 63! + 1 \equiv 0 \pmod{71}$.

2.92. Kiek šaknų daugianaris $x^2 - x$ turės moduliu sudėtinio n?

2.93. Įrodykite, kad jei $p \equiv 3 \pmod 4$, tai $\frac{p-1}{2}! \equiv \pm 1 \pmod p$.

2.94. Tegu p – pirminis. Įrodykite, kad $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod p$, su visomis k reikšmėmis $0 \le k \le p-1$.

2.95. Pažymėkime $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ visas liekanas moduliu p, tarpusavyje pirmines su p. Sumaišykime jas bet kaip ir pažymėkime $b_1, b_2, \ldots, b_{p-1}$. Ar gali taip atsitikti, kad sudauginę $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_{p-1}b_{p-1}$ gausime skirtingas liekanas?

2.96. Įrodykite, kad $(p-1)! \equiv p - 1 \pmod{1 + 2 + \cdots + (p-1)}$.

2.97. Įrodykite, kad jei $\mathrm{dbd}(a,b)=1$, tai

$$\mathrm{dbd}(a^n-b^n, a^m-b^m)=a^{\mathrm{dbd}(n,m)}-b^{\mathrm{dbd}(n,m)}.$$

2.98. Įrodykite, kad jei n ir a natūralieji, tai $n|\varphi(a^n-1)$.

2.99. Įrodykite, kad jei pirminis p dalo 2^{2^n}, tai $p\equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$.

2.100. Raskite mažiausią n, su kuriuo $2^{2005}|17^n-1$.

2.101. Įrodykite, kad multiplikatyvi liekanų grupė moduliu pq izomorfiška multiplikatyvių grupių moduliu p ir q sandaugai. Apibendrinkite šį rezultatą bet kuriai multiplikatyviai grupei moduliu n.

2.102. Įrodykite, kad n nedalo 2^n-1, kur $n>1$ natūralusis skaičius.

2.103. Raskite visus pirminius p, q su kuriais $p^2+1|2003^q+1$ ir $q^2+1|2003^p+1$.

2.104. Raskite visus pirminius p,q,r, su kuriais

$$p|q^r+1,\ q|r^p+1,\ r|p^q+1.$$

2.105. Raskite visus pirminius p ir q, su kuriais $pq|2^p+2^q$.

2.106. Įrodykite, kad 3^n-2^n nesidalija iš n.

2.107. Raskite liekanų grupės moduliu 11 generatorius.

2.108. Ar liekanų grupė moduliu 8 ciklinė?

2.109. Tegu p – nelyginis pirminis skaičius. Įrodykite, kad a yra liekanų mod p generatorius tada ir tik tada, kai $a^{\frac{p-1}{q}}\not\equiv 1 \pmod p$ su visais pirminiais $p-1$ dalikliais q.

2.110. Įrodykite, kad liekanų grupė moduliu pirminio p turi $\varphi(p-1)$ generatorių.

2.111. Įrodykite, kad generatoriaus atvirkštinis irgi yra generatorius. Remdamiesi tuo parodykite, kad visų grupės moduliu pirminio $p>3$ generatorių sandauga yra lygi 1.

2.112. Parodykite, kad jei g ir g' yra multiplikatyvios grupės moduliu p generatoriai, tai gg' nėra generatorius.

2.113. Išspręskite lygtį $x^{17}\equiv 1 \bmod 19$.

2.114. Parodykite, kad 2 – liekanų grupės moduliu 29 generatorius. Parodę išspręskite lygtis:

(a) $x^7\equiv 1 \pmod{29}$,

(b) $x^6+x^5+...+x+1\equiv 0 \pmod{29}$.

2.115. Tegu p – pirminis, o k bet koks skaičius, tarpusavyje pirminis su $p-1$. Įrodykite, kad keldami skirtingas liekanas laipsniu k gausime taip pat skirtingas liekanas. Parodykite, kaip iš to gauti, jog lygtis $x^k=a \pmod p$ turi tik vieną sprendinį moduliu p.

2.116. Įrodykite, kad $1^k+2^k+...+(p-1)^k\equiv 0 \pmod p$, jei $p-1$ nedalo k ir $\equiv -1 \pmod p$, jei $p-1$ dalo k.

2.117. Tegu g grupės moduliu p generatorius. Ar būtinai ir $-g$ generatorius?

2.118. Tegu $p=2^n+1, n\geq 2$ – pirminis skaičius. Įrodykite, kad 3 yra grupės moduliu p generatorius:
a) Tegu g vienas iš grupės moduliu p generatorių. Parodykite, kad visi nelyginiai g laipsniai taip pat bus generatoriais.
b) Parodykite, kad jei 3 nėra generatorius, tai $-3\equiv a^2 \pmod p$ su kažkokiu a.

c) Tegu $2u \equiv a-1 \pmod{p}$. Parodykite, kad u yra trečios eilės elementas.
d) Gaukite prieštarą.

2.119. Įrodykite, kad jei a yra trečios eilės elementas moduliu pirminio $p > 3$, tai $a+1$ yra šeštos eilės elementas mod p.

2.120. Įrodykite, kad liekanų grupė moduliu pq, kur p ir q skirtingi pirminiai skaičiai, nėra ciklinė.

2.121. Įrodykite, kad lygtis $x^{37} \equiv y^3 + 11 \pmod{p}$ turi sprendinių su visais pirminiais $p \leq 100$.

2.122. Įrodykite, kad multiplikatyvioji grupė moduliu p^n, kur $p > 2$ pirminis, yra ciklinė:

(a) Įrodykite, kad jei $a \equiv b \pmod{p^n}$, tai $a^p \equiv b^p \pmod{p^{n+1}}$

(b) Įrodykite, kad jei $n \geq 2$ ir $p \neq 2$, tai visiems a teisinga $(1+ap)^{p^{n-2}} \equiv 1 + ap^{n-1} \pmod{p^n}$.

(c) Įrodykite, kad jei $p \neq 2$ ir $p \nmid a$, tai liekanos $(1+ap)$ eilė moduliu p^n lygi p^{n-1}.

(d) Parodykite, kad egzistuoja ciklinės grupės moduliu p generatorius g, tenkinantis $g^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$.

(e) Parodykite, kad taip parinktas g yra grupės p^n generatorius su visomis $n \geq 1$ reikšmėmis.

2.123. Įrodykite, kad visų mažesnių už n ir tarpusavyje pirminių su n natūraliųjų skaičių kubų suma dalijasi iš n.

3 Kvadratinio apverčiamumo dėsnis

3.1. Raskite visas kvadratines liekanas moduliu 11.

3.2. Pasinaudodami Gauso lema raskite $\left(\frac{7}{13}\right)$.

3.3. Parodykite, kad lygtis $x^2 \equiv a \pmod{p}$ turi $1 + \left(\frac{a}{p}\right)$ sprendinių.

3.4. Įrodykite, kad iš visų nelygių nuliui liekanų moduliu pirminio p, pusė yra kvadratinės ir pusė nekvadratinės.

3.5. Kiek sprendinių turi lygtys

(a) $x^2 \equiv -1 \pmod{59}$,

(b) $x^2 \equiv -1 \pmod{244}$,

(c) $x^2 \equiv -1 \pmod{3599}$?

(Atkreipkite dėmesį, kad 244 ir 3599 nėra pirminiai!)

3.6. Įrodykite, kad kvadratinių liekanų sandauga lygsta 1 moduliu p, kai $p \equiv 3 \pmod{4}$, ir -1, kai $p \equiv 1 \pmod{4}$.

3.7. Įrodykite, kad $1^2 3^2 5^2 \cdots (p-2)^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod{p}$.

3.8. Tegu $p \equiv 5 \pmod{8}$, ir $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Naudodamiesi lygybe $a^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}$ nustatykite, ar a bus kvadratinė liekana moduliu p.

3.9. Tegu q mažiausias natūralusis skaičius, kuris nėra kvadratinė liekana moduliu p. Parodykite, kad q turi būti pirminis.

3.10. Ar egzistuoja nors vienas sveikojo skaičiaus kvadratas, užsirašantis kaip $55k - 1$?

3.11. Įrodykite, kad jei pirminis $p \equiv 3 \pmod 4$, tai iš $p|a^2+b^2$ seka $p^2|a^2+b^2$.

3.12. Įrodykite, kad jei $19a^2 \equiv b^2 \pmod 7$, tai $19a^2 \equiv b^2 \pmod{7^2}$.

3.13. Parodykite, kad lygtis $x^2 \equiv a \pmod{p^n}$ turi $1 + \left(\frac{a}{p}\right)$ sprendinių su visomis $n > 0$ reikšmėmis.

3.14. Parodykite, kad lygtis $x^2 \equiv a \pmod n$ turi $\prod_{p|m}\left(1+\left(\frac{a}{p}\right)\right)$ sprendinių (dauginama pagal visus pirminius, dalijančius m).

3.15. Tegu q mažiausias natūralusis skaičius, kuris nėra kvadratinė liekana moduliu p. Parodykite, kad $q < \sqrt{p} + 1$.

3.16. Įrodykite, kad, kaip ir įprastai, kvadratinė lygtis $ax^2 + bx + c \pmod p), a \not\equiv 0, p \neq 2$ turės sprendinių tada ir tik tada, kai diskriminantas $b^2 - 4ac$ bus kvadratinė liekana (įskaitant nulį) moduliu p.

3.17. Raskite mažiausią pirminį, kuris dalo daugianarį $n^2 + 5n + 23$.

3.18. Tegu p – pirminis. Įrodykite, kad

$$\left(\frac{1\cdot 2}{p}\right) + \left(\frac{2\cdot 3}{p}\right) + \cdots + \left(\frac{(p-2)(p-1)}{p}\right) = -1.$$

3.19. Ar $2^{41} - 1$ dalijasi iš 83?

3.20. Skaičius N lygus pirmųjų $n \geq 2$ pirminių skaičių sandaugai. Įrodykite, kad nei vienas iš skaičių $N-1$ ir $N+1$ nėra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

3.21. Pasinaudoję lygybe $x^4 + 4 = ((x+1)^2+1)((x-1)^2+1)$ parodykite, kad -4 bus *bikvadratinė* liekana mod p tada ir tik tada, kai $p \equiv 1$ mod 4. (a yra bikvadratinė liekana, jei egzistuoja sprendinys $x^4 \equiv a$ mod p).

3.22. Raskite visus pirminius p, su kuriais lygtis $x^2 + y^2 = 2003 + pz$ turi sveikųjų sprendinių.

3.23. Raskite $\left(\frac{79}{101}\right)$ ir $\left(\frac{41}{61}\right)$.

3.24. Nustatykite, moduliu kurių pirminių, 6 yra kvadratinė liekana.

3.25. Įrodykite, kad jei pirminis $p > 3$ dalo skaičių $a^2 + 12$, tai tuomet $p \equiv 2 \pmod 3$. Kokie pirminiai p dalo $a^2 + 5$?

3.26. Tegu pirminis $p = 4n + 1$. Įrodykite, kad visi n dalikliai yra kvadratinės liekanos moduliu p.

3.27. Įrodykite, kad pirminiai daugianario $x^4 - x^2 + 1$ dalikliai lygsta 1 mod 12. (Skaičių vadiname daugianario P dalikliu, jei egzistuoja a su kuriuo $P(a)$ dalijasi iš to skaičiaus).

3.28. Įrodykite, kad visi pirminiai yra daugianario $x^6 - 11x^4 + 36x^2 - 36$ dalikliai.

3.29. Tegu p ir q du pirminiai skaičiai, tenkinantys $p = q + 2$. Įrodykite, kad $p|(a^2 - q)$ su kokiu nors sveikuoju a tada ir tik tada, kai $q|(b^2 - q)$ su kokiu nors sveikuoju b.

3.30. Jei a nėra kvadratinė liekana moduliu p ir q, ar lygtis $x^2 \equiv a \pmod{pq}$ turės sprendinių?

3.31. Įrodykite, kad $x^2 - 2$ niekada nesidalija iš $2y^2 + 3$.

3.32. Įrodykite, kad jei x nesidalija iš 3, tai $4x^2+3$ dalijasi iš bent vieno pirminio $p = 12k+7$.

3.33. Įrodykite, kad su visais pirminiais p lygtis $x^4 \equiv 16 \pmod p$ turi sprendinį.

3.34. Tegu pirminis $p \equiv 3 \bmod 4$, ir $q = 2p+1$ taip pat pirminis. Įrodykite, kad $q|2^p-1$.

3.35. Tegu $p = 4^n+1$ pirminis. Įrodykite, kad 3 nėra kvadratinė liekana moduliu p.

3.36. Žinoma, kad jei pirminis $p \equiv 1 \bmod 4$, tai jis užrašomas kaip dviejų kvadratų suma $p = a^2+b^2$. Tegu a – nelyginis dėmuo. Įrodykite:

(a) $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$;

(b) $\left(\frac{a+b}{p}\right) = (-1)^{\frac{(a+b)^2-1}{8}}$;

(c) $(a+b)^2 \equiv 2ab \pmod p$;

(d) $(a+b)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (2ab)^{\frac{p-1}{4}} \pmod p$.

(e) Tegu f toks, kad $b \equiv af \pmod p$. Įrodykite, kad $f^2 \equiv -1 \bmod p$ ir kad $2^{\frac{p-1}{4}} \equiv f^{ab/2} \pmod p$.

(f) Įrodykite, kad 2 yra bikvadratinė liekana moduliu p tada ir tik tada, kai p užrašomas kaip A^2+64B^2.

3.37. Tegu $p = 2^{2^n}+1$ pirminis. Įrodykite, kad jei $n > 1$, tai 3, 5 ir 7 yra ciklinės grupės moduliu p generatoriai.

3.38. Tegu $k = 2^{2^n}+1$, kur $n > 0$. Įrodykite, kad k yra pirminis tada ir tik tada, kai $k|3^{(k-1)/2}+1$.

3.39. Įrodykite, kad 2^n+1 nesidalija iš pirminių $p = 8k+7$.

3.40. Įrodykite, kad jei p yra pirminis, tai $A = 7p+3^p-4$ nėra pilnas kvadratas.

3.41. Tegu $S(n)$ skaičiaus n skaitmenų suma. Raskite mažiausią galimą $S(m)$ reikšmę, jei m dalijasi iš 2003.

4 Grandininės trupmenos

4.1. Raskite grandininę trupmeną kiekvienam iš šių skaičių:

a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{33}{23}$ d) $\frac{37}{31}$

4.2. Apskaičiuokite grandininę trupmeną atitinkantį skaičių:

a) $[2,3,2]$ b) $[1,4,6,4]$ c) $[2,3,2,3]$ d) $[9,12,21,2]$

4.3. Raskite iracionalių skaičių grandinines trupmenas:

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{6}$

4.4. Tarkime a ir b yra tarpusavyje pirminiai natūralieji skaičiai. Užrašykite

$$\frac{2a^2b+a^2+ab+2a+1}{2ab+a+2}$$

grandinine trupmena.

4.5. Duota, kad $x = [2,2,2,\dots]$. Įrodykite, kad

a) $p_k = \left(1+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^k + \left(1-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^k,$
$q_k = \left(1+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^{k-1} + \left(1-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^{k-1};$

b) $x = 1+\sqrt{2}$.

4.6. Tarkime c_n yra skaičiaus $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ n-toji konvergentė ir $a_0 > 0$. Įrodykite, kad

$$[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}} \quad \text{ir} \quad [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_0] = \frac{q_n}{q_{n-1}}$$

4.7. Raskite natūralųjį skaičių, kurį galima užrašyti 3 skirtingai būdais dviejų kvadratų suma.

4.8. Tarkime, kad p yra pirminis skaičius. Įrodykite, kad $p \equiv 1, 3 \pmod 8$ tada ir tik tada, kai $p = a^2 + 2b^2$.

4.9. Įrodykite, kad tarp 4 iš eilės einančių skaičių, bent vieno negalima užrašyti 2 kvadratų suma.

4.10. Atspėkite (ir patikrinkite) mažiausią lygties $x^2 - 2y^2 = 1$ sprendinį, iš kurio gaukite dar bent tris sprendinius.

4.11. Ar lygtis $x^2 - dy^2 = -1$ visuomet turės sprendinių, kai d bekvadratis?

4.12. Ar lygtis $x^2 - dy^2 = k$ visuomet turės sprendinių, kai d bekvadratis?

4.13. Tegu (x_0, y_0) lygties $x^2 - dy^2 = 1$ sprendinys, o (a, b) – lygties $x^2 - dy^2 = k$ sprendinys (d bekvadratis). Kaip iš jų gauti dar vieną lygties $x^2 - dy^2 = k$ sprendinį?

4.14. Įrodykite, kad jei lygtis $x^2 - dy^2 = k$, kur d bekvadratis, turi bent vieną sprendinį, tai jų turi be galo daug.

4.15. Įrodykite, kad pirmų n skaičių suma be galo dažnai dažnai būna pilnas kvadratas. Raskite pirmas 6 tokias n reikšmes

4.16. Įrodykite, kad su begalo daug n reikšmių $n^2 + (n+1)^2$ yra pilnas kvadratas.

4.17. Sugalvokite kaip išskleisti duotą skaičių tęstine trupmena ir pasinaudoję skleidiniu raskite lygties $x^2 - 7y^2 = 1$ mažiausiąjį sprendinį.

4.18. 1657m. išspręsti lygtį $x^2 - 61y^2 = 1$ buvo nemenkas iššūkis Europos matematikams (tarp jų ir pačiam P. Ferma). Ar pajėgsite rasti nors vieną sprendinį?

4.19. Įrodykite, kad jei (x_1, y_1) ir (x_2, y_2) yra, atitinkamai, lygčių

$$x^2 - dy^2 = a \quad \text{ir} \quad x^2 - dy^2 = b$$

sprendiniai, tai

$$(x_3, y_3) = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 + dy_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

yra lygties $x^2 - dy^2 = ab$ sprendinys.

4.20. Įrodykite, kad $x^2 + xy - y^2 = 1$ turi be galo daug sprendinių ir raskite bent 2 teigiamus sprendinius.

4.21. Raskite visus lygčių sprendinius:

a) $x^2 - 4y^2 = 45$,

b) $x^2 - y^2 = 6$,

c) $x^2 - 9y^2 = 7$.

4.22. Raskite lygties $x^2 = x + 2$ sveikuosius sprendinius.

4.23. Raskite lygties $x^2 + y^2 = 100$ sveikuosius sprendinius.

4.24. Raskite lygties $x^2 = 100 + y^2$ sveikuosius sprendinius.

4.25. Raskite lygties $xy = x + y$ sveikuosius sprendinius.

4.26. Raskite lygties $x^2 = 3y - 1$ sveikuosius sprendinius.

4.27. Raskite lygties $x^2 = 2^n - 1$ sveikuosius sprendinius.

4.28. Raskite lygties $x^2 + y^2 = 4z + 3$ sveikuosius sprendinius.

4.29. Raskite lygties $x^2 + 2x = 4y + 2$ sveikuosius sprendinius.

4.30. Raskite lygties $x^2 + y^2 = 2x + 3y + 4$ sveikuosius sprendinius.

4.31. Raskite lygties $2 + x^2 + x^3 = 6^n$ sveikuosius sprendinius