Antroji LMA jaunųjų mokslininkų konferencija
"Fizinių ir technologijos mokslų tarpdalykiniai tyrimai"

Silpnas didžiųjų skaičių dėsnis beveik nestacionariems pirmos eilės autoregresiniams procesams funkcinėse erdvėse

The weak law of large numbers for nearly nonstationary process in functional spaces

Jurgita Markevičiūtė[1,2]

[1]Vilniaus universiteto, Matematikos ir informatikos fakulteto doktorantė

[2]Lille 1 universiteto, UFR. Mathématiques, Laboratoire Paul Painlavé doktorantė

Kontaktai: jurgita.markeviciute@mif.vu.lt

2012 m. Vasario 14 d.

1 Įvadas ir žymejimai

Didžiųjų skaičių dėsnis matematikoje yra labai svarbus, nes "užtikrina" stabilumą ilguoju laikotarpiu. Šiame dokumente mes nagrinėjame silpnąjį didžiųjų skaičių dėsnį funkcinėse erdvėse procesui:

$$S_n^{\mathrm{pl}}(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} y_{k-1} + (nt - [nt])y_{[nt]}, \tag{1}$$

čia $(y_k)_{k\geq 0}$ yra pirmos eilės beveik nestacionarus autoregresinis procesas. Šis procesas generuojamas lygybe:

$$y_k = \phi_n y_{k-1} + \varepsilon_k, \tag{2}$$

čia $\phi_n = 1 - \frac{\gamma_n}{n}$, ir $\gamma_n \to \infty$, kai $n \to \infty$, lėčiau nei n, bei $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ yra i.i.d. atsitiktiniai dydžiai su $\mathbb{E}\varepsilon_0 = 0$. Iš tikrųjų, $y_k = y_{k,n}$, $k = 1, \ldots, n$ yra trikampis masyvas, tačiau nebūtina pridėti papildomą indeksą. Taip pat, paprastumo dėlei apibrėžkime $y_0 = 0$.

Laužčių procesas S_n^{pl} gali būti apibrėžtas kaip atsitiktinis erdvių $\mathrm{C}[0,1]$ arba $\mathrm{H}_\alpha^o[0,1]$ elementas. Tolydžiųjų funkcijų erdvė $\mathrm{C}[0,1]$ apibrėžiama su tolygiąją norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)| \qquad f \in \mathrm{C}[0,1].$$

Separabili Hiolderio erdvė $\mathrm{H}_\alpha^o[0,1]$

$$\mathrm{H}_\alpha^o[0,1] := \left\{ f \in C[0,1] : \lim_{\delta\to 0} \omega_\alpha(f,\delta) = 0 \right\}, \qquad \alpha \in (0,1)$$

apibrėžiama su norma

$$\|f\|_\alpha := |f(0)| + \omega(f,1),$$

čia

$$\omega_\alpha(f,\delta) := \sup_{\substack{s,t\in[0,1] \\ 0<t-s<\delta}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha}.$$

Klasikinis silpnas didžiųjų skaičių dėsnis sako, kad

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$$

kai $\mathbb{E}\varepsilon_0 = 0$ ir $\mathbb{E}\,|\varepsilon_0| < \infty$.

Rastenė savo disertacijoje [2] įrodė silpnąjį didžiųjų skaičių dėsnį laužčių procesui sukonstruotam iš i.i.d. atsitiktinių dydžių Hiolderio erdvėje.

Teorema. 1.1. (Rastene.) *Tarkime $\alpha \in (0,1)$ ir $(\eta_k)_{k\geq 1}$ yra i.i.d. atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu. Apibrėžkime laužčių procesą:*

$$W_n^{\mathrm{pl}} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i + (nt - [nt])\eta_{[nt]+1}, \quad t \in [0,1]. \tag{3}$$

Jei

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/(1-\alpha)} \mathbb{P}(|\eta| > t) = 0, \tag{4}$$

tada

$$n^{-1} W_n^{\mathrm{pl}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0 \quad \textit{erdvėje} \quad \mathrm{H}_\alpha^o[0,1]. \tag{5}$$

2 Preliminarūs rezultatai

Mes pradėsim savo darbą nuo tolydžių didžiųjų skaičių dėsnių. Šie rezultatai naudingi mūsų galutiniam rezultatui. Pradėkime nuo nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų.

Lema. 2.1. *Tegu $(\eta_j)_{j\geq 0}$ yra i.i.d.atsitiktinių dydžių seka su nuliniu vidurkiu bei $\mathbb{E}|\eta_0| = \mu < \infty$. Apibrėžkime*

$$z_k = \sum_{j=1}^{k} \eta_j \tag{6}$$

Tada

$$\max_{1\leq k\leq n} |z_k| = o_P(n).$$

Įrodymas. Kadangi z_k sudaryta iš nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių, todėl tai yra martingalas su natūralia filtracija ir galime taikyti Dubo (angl., Doob's) nelygybę:

$$P := \mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq n} |z_k| > \lambda\right) \leq \lambda^{-1}\mathbb{E}|z_n|.$$

Renkantis $\lambda = n\epsilon$ bet kokiam $\delta > 0$ gauname

$$P := n^{-1}\epsilon^{-1}\mathbb{E}|z_n|.$$

Klasikinis rezultatas sako

$$z_n/n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}_1} 0$$

ir tai mums duoda $\max_{1\leq k\leq n} |z_k| = o_P(n)$.

◁

Toliau parodysime, kad $\max_{1\leq k\leq n} |y_k| = o_{\mathrm{P}}(n)$ tardami, kad $\mathbb{E}|\varepsilon_0|^{1+\delta} < \infty$ kokiam nors kaip norima mažam $\delta > 0$.

Lema. 2.2. *Tegu $(\varepsilon_j)_{j\geq 0}$ yra i.i.d. atsitiktinių dydžių seka su nuliniu vidurkiu bei $\mathbb{E}|\varepsilon_0|^{1+\delta} < \infty$ kokiam nors $\delta > 0$. Apibrėžkime*

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{j=1}^{k} \phi_n^{k-j}\varepsilon_j \\ \phi_n &= 1 - \frac{\gamma_n}{n}, \quad \gamma_n \to \infty, \text{ kai } n \to \infty, \text{ lėčiau nei } n. \end{aligned} \tag{7}$$

Tada

$$\max_{1\leq k\leq n} |y_k| = o_P(n).$$

Įrodymas. Įrodymo idėja remiasi tuo, kad $a < k \leq b$,

$$|y_k| = \phi_n^k \left|\sum_{j=1}^{k} \phi_n^{-j}\varepsilon_j\right| \leq \phi_n^a \left|\sum_{j=1}^{k} \phi_n^{-j}\varepsilon_j\right|.$$

Čia $\{\sum_{j=1}^{k} \phi_n^{-j}\varepsilon_j,\ a < k \leq b\}$ yra martingalas su natūralia filtracija ir jei mes pakartosime šia procedūrą su reguliariais tarpais a ir b, mes išlaikysime geometrinės sumos struktūrą koeficientams ϕ_n^a. Toliau išskaidysime blokais

$$n = MK, \quad \max_{1\leq k\leq n} |y_k| = \max_{1\leq m\leq M} \max_{(m-1)K<k\leq mK} |y_k|,$$

čia M ir K (nebūtinai sveikieji skaičiai) priklauso nuo n (priklausomybė bus apibrėžta vėliau). Taikydami šiuos blokus pirmiausia gauname:

$$P := \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} |y_k| > \lambda\right) \leq \sum_{1\leq m\leq M} \mathbb{P}\left(\phi_n^{(m-1)K} \max_{1\leq k\leq mK}\left|\sum_{j=1}^{k} \phi_n^{-j}\varepsilon_j\right| > \lambda\right).$$

Tada naudojant Markovo ir Dubo $1+\delta$ eilės nelygybes gauname

$$P \leq \sum_{1\leq m\leq M} \frac{\phi_n^{(1+\delta)(m-1)K} T_m}{\lambda^{1+\delta}} \quad \text{čia} \quad T_m := \mathbb{E}\left|\sum_{1\leq j\leq mK} \phi_n^{-j}\varepsilon_j\right|^{1+\delta}. \tag{8}$$

ir

$$T_m = \mathbb{E}\left|\sum_{1\leq j\leq mK} \phi_n^{-j}\varepsilon_j\right|^{1+\delta} \leq \mathbb{E}\,|\varepsilon_0|^{1+\delta}\, \frac{\phi_n^{-(1+\delta)mK}}{1-\phi_n}.$$

Apibrėžiant $M = \gamma_n$, $K = \frac{n}{\gamma_n}$ ir pasirenkant $\lambda = n\epsilon$ kokiam nors $\epsilon > 0$ mes randame

$$\begin{aligned} P &\leq \sum_{1\leq m\leq M} \phi_n^{(1+\delta)(m-1)K} \lambda^{-(1+\delta)} \mathbb{E}\,|\varepsilon_0|^{1+\delta}\, \phi_n^{-(1+\delta)mK} \frac{n}{\gamma_n} \\ &\leq 2\mathrm{e}^{1+\delta} n^{-\delta} \epsilon^{-(1+\delta)} \mathbb{E}\,|\varepsilon_0|^{1+\delta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

◁

Toliau pateiksime panašų rezultatą $\max_{1\leq k\leq n} |y_k|$, kuris naudingas Holderio erdvėje.

Lema. 2.3. *Tegu $\alpha \in (0,1)$ ir $(\varepsilon_j)_{j\geq 0}$ i.i.d.atsitiktinių dydžių seka su*

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{1-\alpha}} \mathbb{P}\left(|\varepsilon_0| > t\right) = 0. \tag{9}$$

Apibrėžkime y_k pagal (7). Tada

$$\max_{1\leq k\leq n} |y_k| = o_P\left(n\gamma_n^{-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Įrodymas. Pirmiausia apibrėžkime nupjautuosius kintamuosius:

$$\varepsilon_j' := \varepsilon_j \mathbf{1}_{\{|\varepsilon_j|\leq b_n\}} - \mathbb{E}\left(\varepsilon_j \mathbf{1}_{\{|\varepsilon_j|\leq b_n\}}\right) \quad \varepsilon_j'' := \varepsilon_j \mathbf{1}_{\{|\varepsilon_j|> b_n\}} - \mathbb{E}\left(\varepsilon_j \mathbf{1}_{\{|\varepsilon_j|> b_n\}}\right)$$

o nupjovimo lygmuo b_n bus patikslintas vėliau. Toliau

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} |y_k| > 2\lambda\right) \leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} |y_k'| > \lambda\right) + \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} |y_k''| > \lambda\right) \tag{10}$$

čia

$$y_k' = \sum_{j=1}^{k} \phi_n^{k-j}\varepsilon_j' \quad \text{and} \quad y_k'' = \sum_{j=1}^{k} \phi_n^{k-j}\varepsilon_j''.$$

Pirmajam (10) nelygybės nariui naudosime Čebyševo nelygybę:

$$\begin{aligned} P' &:= \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n} |y_k'| > \lambda\right) \le \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(|y_k'| > \lambda\right) \\ &\le \lambda^{-2}\mathbb{E}\left|\varepsilon_0'\right|^2 n(1-\phi_n)^{-1}. \end{aligned}$$

Įvertinsime $\mathbb{E}\left|\varepsilon_0'\right|^2$:

$$\mathbb{E}\left|\varepsilon_0'\right|^2 \le 2\int_0^\infty 2t\mathbb{P}\left(|\varepsilon_0'| > t\right)\,\mathrm{d}t \le 2b_n^2.$$

Pasirenkant $\lambda = n\gamma_n^{-\frac{\alpha}{2}}\delta$ kokiam nors $\delta > 0$ ir $b_n = \gamma_n^{\frac{(1-\alpha)^2}{2}}$:

$$P' \le 2\lambda^{-2}b_n^2 n(1-\phi_n)^{-1} = 2\delta^{-2}\gamma_n^{-\alpha(1-\alpha)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Toliau antrajam (10) nelygybės nariui naudosimės ta pačia blokų idėja, kaip ir lemos 2.2 įrodyme. Tada

$$P'' \le \sum_{1\le m\le M} \frac{\phi_n^{(m-1)K} T_m}{\lambda} \quad \text{where} \quad T_m := \mathbb{E}\left|\sum_{1\le j\le mK} \phi_n^{-j}\varepsilon_j''\right|. \tag{11}$$

Įvertinam T_m:

$$T_m = \mathbb{E}\left|\sum_{1\le j\le mK} \phi_n^{-j}\varepsilon_j''\right| \le \mathbb{E}\left|\varepsilon_0''\right| \frac{\phi_n^{-mK}}{1-\phi_n}.$$

Pažymėkime $p = \frac{1}{1-\alpha}$ ir nagrinėkime $\mathbb{E}\left|\varepsilon_0''\right|$:

$$\mathbb{E}\left|\varepsilon_0''\right| = b_n\mathbb{P}\left(|\varepsilon_0| > b_n\right) + \int_{b_n}^\infty \mathbb{P}\left(|\varepsilon_0| > t\right)\,\mathrm{d}t = o_{\mathrm{P}}\left(b_n^{1-p}\right) + I_1,$$

čia $I_1 := \int_{b_n}^\infty \mathbb{P}\left(|\varepsilon_0| > t\right)\,\mathrm{d}t$. Toliau

$$I_1 \le \int_{b_n}^\infty \mathbb{P}\left(|\varepsilon_0| > t\right)\,\mathrm{d}t \le T_p \int_{b_n}^\infty t^{-p}\,\mathrm{d}t = T_p b_n^{1-p}$$

čia $T_p := \sup_{t\ge 0} t^p \mathbb{P}\left(|\varepsilon_0| > t\right)$ ir pagal sąlygą (9) turime, kad $T_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Taigi pasirenkant $b_n = \gamma_n^{\frac{(1-\alpha)^2}{2}}$, $K = \frac{n}{\gamma_n}$, $M = \gamma_n$ ir $\lambda = n\gamma_n^{-\frac{\alpha}{2}}\delta$ kokiam nors $\delta > 0$ gauname

$$P'' \le \sum_{1\le m\le M} \frac{\phi_n^{(m-1)K}}{\lambda} \frac{\phi_n^{-mK}}{1-\phi_n} C T_p b_n^{1-p} = C T_p \mathrm{e}\delta^{-1}\gamma_n^{-\frac{2-\alpha^2}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

◁

3 Didžiųjų skaičių dėsnis

Dabar įrodysime didžiųjų skaičių dėsnius procesams apibrėžtiems (1) lygybe. Pradėsime nuo tolydžiųjų funkcijų erdvės C[0, 1].

Teorema. 3.1. *Tegu $(\varepsilon_j)_{j\geq 0}$ nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su $\mathbb{E}\varepsilon_0 = 0$ ir $\mathbb{E}|\varepsilon_0|^{1+\delta} < \infty$ kokiam nors $\delta > 0$. Apibrėžkime S_n^{pl} (1) lygybe bei $\phi_n = 1 - \frac{\gamma_n}{n}$, $\gamma_n \to \infty$, kai $n \to \infty$, lėčiau nei n. Tada*

$$\frac{1-\phi_n}{n} S_n^{\mathrm{pl}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0 \quad \textit{erdvėje} \quad \mathrm{C}[0,1] \tag{12}$$

Įrodymas. Pirmiausia sumuojame lygybę (2) pagal j ir pertvarkome ją:

$$\sum_{j=1}^{k} y_{j-1} = (1-\phi_n)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j - y_k\right).$$

Toliau pasinaudojame tolygiosios normos apibrėžimu:

$$\left\|(1-\phi_n)n^{-1}S_n^{\mathrm{pl}}\right\|_\infty = (1-\phi_n)n^{-1}\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{j=1}^{k} y_{j-1}\right| \leq n^{-1}\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j\right| + n^{-1}\max_{1\leq k\leq n}|y_k|.$$

Taigi remiantis lemomis (2.1) ir (2.2) gauname $(1-\phi_n)n^{-1}S_n^{\mathrm{pl}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$ erdvėje $\mathrm{C}[0,1]$.

$\triangleleft$

Toliau įrodysime silpnąjį didžiųjų skaičių dėsnį S_n^{pl} procesui Hiolderio erdvėje.

Teorema. 3.2. *Tarkime $\alpha \in (0,1)$ ir $(\varepsilon_j)_{j\geq 0}$ i.i.d. atsitiktiniai dydžiai su $\mathbb{E}\varepsilon_0 = 0$. Apibrėžkime S_n^{pl} (1) lygybe ir $\phi_n = 1 - \frac{\gamma_n}{n}$, $\gamma_n \to \infty$, kai $n \to \infty$, lėčiau nei n. Jei sąlyga (4) teisinga, tada*

$$\frac{1-\phi_n}{n} S_n^{\mathrm{pl}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0 \quad \textit{erdvėje} \quad \mathrm{H}_\alpha^o[0,1] \tag{13}$$

jeigu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_n}{n^{1-\alpha}} = 0. \tag{14}$$

Įrodymas. Norint įrodyti konvergavimą Hiolderio erdvėje, mums reikia parodyti baigtiniamačių skirstinių konvergavimą bei tirštumą Hiolderio erdvėje. Baigtiniamačių skirstinių konvergavimas akivaizdus, tai mes koncentruosimės ties tirštumu. Tirštumo sąlygos yra apibrėžtos [1] straipsnyje. Šios sąlygos yra bendros (žr., teoremą 4.1). Sąlyga (a) akivaizdžiai tenkinama; sąlyga (b) tesinga dėl lemos 2.3 sąlygos (14). Toliau patikrinsime sąlygą (c) (žr., teoremą 4.1):

$$P_1 := \lim_{J\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{\max_{J\leq j\leq \log n} 2^{j\alpha}\frac{1-\phi_n}{n}\max_{0\leq k\leq 2^j}|S_n(t_{k+1}) - S_n(t_k)| \geq \epsilon\right\},$$

čia $\log n$ žymi logaritmą su baze 2, taip pat $S_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} y_{k-1}$ ir tada $|S_n(t_{k+1}) - S_n(t_k)| = \left|\sum_{l=[nt_k]}^{[nt_{k+1}]} y_l\right|$. Taigi P_1 tampa:

$$P_2 := \mathbb{P}\left\{\max_{J\leq j\leq \log n} 2^{j\alpha}\frac{1-\phi_n}{n}\max_{0\leq k\leq 2^j}\left|\sum_{l=[nt_k]}^{[nt_{k+1}]} y_l\right| \geq \epsilon\right\}$$

Toliau apibrėžiame nupjautuosius kintamuosius:

$$\varepsilon_j' := \varepsilon_j \mathbf{1}_{\{|\varepsilon_j|\leq b_n\}} - \mathbb{E}\left(\varepsilon_j\mathbf{1}_{\{|\varepsilon_j|\leq b_n\}}\right) \quad \varepsilon_j'' := \varepsilon_j\mathbf{1}_{\{|\varepsilon_j|> b_n\}} - \mathbb{E}\left(\varepsilon_j\mathbf{1}_{\{|\varepsilon_j|> b_n\}}\right)$$

ir nupjovimo lygmuo b_n bus apibrėžtas vėliau. Tada išskaidome P_2:

$$P_2 \leq P_2' + P_2'',$$

čia

$$P_2' := \mathbb{P}\left\{ \max_{J \leq j \leq \log n} 2^{j\alpha} \frac{1-\phi_n}{n} \max_{0 \leq k \leq 2^j} \left| \sum_{l=[nt_k]}^{[nt_{k+1}]} y_l' \right| \geq \epsilon \right\}$$
$$P_2'' := \mathbb{P}\left\{ \max_{J \leq j \leq \log n} 2^{j\alpha} \frac{1-\phi_n}{n} \max_{0 \leq k \leq 2^j} \left| \sum_{l=[nt_k]}^{[nt_{k+1}]} y_l'' \right| \geq \epsilon \right\}.$$

Taip pat

$$y_l' := \sum_{i=1}^{l} \phi_n^{l-i} \varepsilon_i' \quad \text{and} \quad y_l'' := \sum_{i=1}^{l} \phi_n^{l-i} \varepsilon_i''.$$

Nagrinėkime P_2'':

$$P_2'' \leq \sum_{J \leq j \leq \log n} 2^{\alpha j} \frac{1-\phi_n}{n} \sum_{0 \leq k \leq 2^j} \epsilon^{-1} (1-\phi_n)^{-1} n 2^j \mathbb{E} \left| \varepsilon_0'' \right|.$$

Naudosime tą patį įvertį $\mathbb{E} |\varepsilon_0''|$ kaip ir lemoje 2.3 gauname

$$P_2'' \leq \epsilon^{-1} C T_p b_n^{1-p} \sum_{J \leq j \leq \log n} 2^{\alpha j} \leq \epsilon^{-1} C T_p b_n^{1-p} n^{\alpha},$$

čia $p = \frac{1}{1-\alpha}$ ir $T_p := \sup_{t \geq 0} t^p \mathbb{P}(|\varepsilon_0| > t)$ ir pagal sąlygą (9) $T_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Taip pat apibrėžiant $b_n = n^{1-\alpha}$ gauname $b_n^{1-p} n^{\alpha} = 1$, taigi

$$P_2'' \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Toliau nagrinėkime P_2'. Kokiam nors $q > 2/\alpha$ turime

$$P_2' = \mathbb{P}\left\{ \max_{J \leq j \leq \log n} \max_{0 \leq k \leq 2^j} \left| \sum_{l=[nt_k]}^{[nt_{k+1}]} y_l' \right| \geq \epsilon \frac{n^2}{\gamma_n} 2^{-\alpha j} \right\} \leq \sum_{J \leq j \leq \log n} \sum_{k=0}^{2^j} \epsilon^{-q} \frac{\gamma_n^q}{n^{2q}} 2^{\alpha j q} \sum_{l=[nt_k]}^{[nt_{k+1}]} \mathbb{E} \left| y_l' \right|^q.$$

Taikysime Rozentalio nelygybę dydžiui $\mathbb{E} |y_l'|^q = \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^{l} \phi_n^{l-i} \varepsilon_i \right|^q$:

$$E_1 := \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^{l} \phi_n^{l-i} \varepsilon_i \right|^q \leq C_q \left(\left(\mathbb{E}(\varepsilon_0')^2 \right)^{q/2} \left(\sum_{i=1}^{l} \phi_n^{2(l-i)} \right)^{q/2} + \mathbb{E} \left| \varepsilon_0' \right|^q \sum_{i=1}^{l} \phi_n^{q(l-i)} \right).$$

Kadangi $q > 2$ turime, kad $\left(\mathbb{E}(\varepsilon_0')^2 \right)^{q/2} \leq \mathbb{E} |\varepsilon_0'|^q$ ir nemažinant bendrumo galime tarti, kad $\frac{n}{\gamma_n} > 1$, taigi $\frac{n}{\gamma_n} \leq \left(\frac{n}{\gamma_n} \right)^{q/2}$. Tada mes gauname

$$E_1 \leq 2 C_q \mathbb{E} \left| \varepsilon_0' \right|^q \left(\frac{n}{\gamma_n} \right)^{q/2}.$$

Toliau naudojant tuos pačius argumentus kaip ir lemoje 2.3 gauname

$$\mathbb{E} \left| \varepsilon_0' \right|^q \leq C b_n^q.$$

Galiausiai,

$$P_2' \leq \sum_{J\leq j\leq \log n} \sum_{k=0}^{2^j} \epsilon^{-q} \frac{\gamma_n^q}{n^{2q}} 2^{\alpha j q} \sum_{l=[nt_k]}^{[nt_{k+1}]} 2C_q C b_n^q \left(\frac{n}{\gamma_n}\right)^{q/2} \leq C'' \epsilon^{-q} b_n^q \gamma_n^{q-q/2} n^{-2q+1+q/2+\alpha q}.$$

Apibrėžiant $b_n = n^{1-\alpha}$ visiems $q\alpha > 2$:

$$P_2' \leq C'' \epsilon^{-q} \left(\frac{\gamma_n}{n^{1-\alpha}}\right)^{q/2} n^{1-q\alpha/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\triangleleft$

4 Priedas

Norint įrodyti tirštumą Hiolderio erdvėje straipsnyje [1] yra suformuluotos bendrosios sąlygos. Atkreipkime dėmesį, kad čia nėra jokių sąlygų $(X_n)_{n\geq 1}$ priklausomumo struktūrai:

Teorema. 4.1. (Juodis, Račkauskas, Suquet). *Tegu ξ_n dalinių sumų laužčių procesas suformuotas iš $(X_k)_{k\geq 1}$ ir apibrėžiamas lygybe*

$$\xi_n(t) := \sum_{k=1}^{[nt]} X_k + (nt - [nt])X_{[nt]+1}, \quad t \in [0,1].$$

Tada $(b_n^{-1}\xi_n)_{n\geq 1}$ yra tiršta $\mathrm{H}_\alpha^o[0,1]$ erdvėje jei

(a) kiekvienam $t \in [0,1]$, $(b_n^{-1}\xi_n)_{n\geq 1}$ yra tiršta $\mathbb{R}$ erdvėje;

(b) $n^\alpha b_n^{-1} \max_{1\leq i\leq n} |X_i|$ konverguoja pagal tikimybę į 0;

(c) $\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \max_{J\leq j\leq \log n} 2^{j\alpha} b_n^{-1} \max_{0\leq k\leq 2^j} \left| S_{[nt_{k+1}]} - S_{[nt_k]} \right| \geq \epsilon \right\} = 0,$

čia $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ ir $t_k = k2^{-j}$.

Literatūra

[1] M. Juodis, A. Račkauskas, and C. Suquet. Hölderian functional central limit theorems for linear processes. *Alea : Latin American journal of probability and mathematical statistics*, 5:47–64, 2009.

[2] I. Rastenė. *Testing and Estimating Changed Segment in Autoregressive Model.* PhD thesis, Vilnius University, 2011.