Funkcinės ribinės teoremos beveik nestacionarių procesų liekanoms

Jurgita Markevičiūtė [1,2]
prof. Alfredas Račkauskas [1], prof. Charles Suquet [2]

[1]Vilniaus Universitetas

[2]Université des Sciences et Technologies de Lille

2011 m. Birželio 16 d.

Turinys

Struktūra

1. Beveik nestacionarūs procesai

Struktūra

1. Beveik nestacionarūs procesai
2. Kitų autorių pagrindiniai rezultatai

Struktūra

1. Beveik nestacionarūs procesai
2. Kitų autorių pagrindiniai rezultatai
3. Ribinės teoremos sumų procesams

Struktūra

1. Beveik nestacionarūs procesai
2. Kitų autorių pagrindiniai rezultatai
3. Ribinės teoremos sumų procesams
4. Ribinės teoremos liekanų procesams

Turinys

Procesas

Tarkime turime pirmos eilės autoregresinį procesą $\{y_{n,k}|k = 1, \cdots, n; n = 1, 2, \cdots\}$ generuotą

$$y_{n,k} = \phi_n y_{n,k-1} + \varepsilon_k \tag{1}$$

lygybe, čia $\phi_n \to 1$, kai $n \to \infty$, $\{\varepsilon_k, k = 1, \cdots, n\}$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių (n.v.p.a.d.) seka su $\mathbb{E}\varepsilon_k = 0$ ir $\mathbb{E}\varepsilon_k^2 = 1$, n sekos dydis ir pradžia $y_{n0} = y_0$. Šis procesas vadinamas *beveik nestacionariu procesu*.

ϕ_n parametrizavimas

1 atvejis

$\phi_n = \mathrm{e}^{\gamma/n}$ (γ yra neigiama konstanta), čia ribinis procesas atsitiktinė Brauno judesio ir Ornstein-Uhlenbeck proceso kombinacija.
Šį parametrizavimą pasiūlė P.C.B. Phillips'as (1986 m.).

2 atvejis

$\phi_n = 1 - \frac{\gamma_n}{n}$, $\gamma_n \to \infty$ lėčiau nei n, čia ribinis procesas Brauno judesys.
Šį parametrizavimą pasiūlė P.C.B. Phillipsas ir L. Giraitis (2004 m.)

Turinys

P.C.B. Phillips'o rezultatai

Jei $\{y_t\}$ yra beveik nestacionarus procesas generuotas (1) lygybe ir $\phi_n = \mathrm{e}^{\gamma/n}$, tada :

$$n^{-1/2} y_{[nt]} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}[0,1]} U_\gamma(t),$$

$$n^{-3/2} \sum_{j=1}^{n} y_j \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} \int_0^1 U_\gamma(r)\,\mathrm{d}r,$$

$$n^{-2} \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} \int_0^1 U_\gamma^2(r)\,\mathrm{d}r,$$

$$n^{-1} \sum_{j=1}^{n} y_{j-1}\varepsilon_j \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} \int_0^1 U_\gamma(r)\,\mathrm{d}W(r).$$

čia

$$U_\gamma(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\gamma}\,\mathrm{d}W(s) \quad 0 \le t \le 1.$$

P.C.B. Phillips'o ir L. Giraičio rezultatai

Jei $\{y_t\}$ yra beveik nestacionarus procesas generuotas (1) lygybe ir $\phi_n = 1 - \frac{\gamma_n}{n}$, tada :

$$\frac{\left(1-\phi_n^2\right)^{1/2}}{n^{1/2}} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j y_{j-1} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} \mathfrak{N}(0,\sigma^4),$$

$$\frac{1-\phi_n^2}{n} \sum_{j=1}^{n} y_{j-1}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \sigma^2,$$

$$\frac{(1-\phi_n)}{n^{1/2}} \sum_{j=1}^{n} y_j \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} \mathfrak{N}(0,\sigma^2).$$

Turinys

Sumų procesai

Apibrėžkime laiptinį ir laužčių procesus inovacijoms :

$$W_n^{\mathrm{st}}(t) := \sum_{k=1}^{[nt]} \varepsilon_k, \quad t \in [0,1],$$

$$W_n^{\mathrm{pl}}(t) := \sum_{k=1}^{[nt]} \varepsilon_k + (nt - [nt])\varepsilon_{[nt]+1}, \quad t \in [0,1].$$

bei procesui y_k :

$$S_n^{\mathrm{st}}(t) := \sum_{k=1}^{[nt]} y_{k-1}, \quad t \in [0,1],$$

$$S_n^{\mathrm{pl}}(t) := \sum_{k=1}^{[nt]} y_{k-1} + (nt - [nt])y_{[nt]}, \quad t \in [0,1].$$

Esminė lema

Esminis dalykas toliau einančioms ribinėms teoremoms yra $\max_{1\le k\le n}|y_k|$ elgesio kontrolė.

Lema 2 (M., Račkauskas & Suquet)

Tarkime ε_k tenkina $\lim_{t\to\infty} t^p P(|\varepsilon_0| > t) = 0$, savybę, kuriam nors $p > 2$ arba atskiru atveju, kai $p = 2$, turime $\mathbb{E}\varepsilon_0^2 < \infty$. Pažymėkime kiekvienam $p \ge 2$, $\alpha = 1/2 - 1/p$. Tada

$$n^{-1/2}\gamma_n^{\alpha} \max_{1\le k\le n} |y_k| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Konvergavimas $\mathrm{D}[0,1]$ and $\mathrm{C}[0,1]$ erdvėse

Teorema 3 (M., Račkauskas & Suquet)

Tarkime y_k generuotas (1) lygybe ir $\phi_n = 1 - \gamma_n/n$, čia γ_n neneigiama seka ir konverguoja į begalybę lėčiau nei n. Tarkime, kad inovacijų procesas $\{\varepsilon_k\}$ yra n.v.p.a.d. su $\mathbb{E}\varepsilon_k = 0$, $\mathbb{E}\varepsilon_k^2 = 1$. Pažymėkime standartinį Wiener'io procesą $W = \{W(t), 0 \le t \le 1\}$ Tada galioja :

$$n^{-1/2}(1-\phi_n)S_n^{\mathrm{st}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}[0,1]} W,$$

$$n^{-1/2}(1-\phi_n)S_n^{\mathrm{pl}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{C}[0,1]} W.$$

Konvergavimas Hölder'io $\mathrm{H}_\alpha^o[0,1]$ erdvėje

Didžiųjų skaičių dėsnis

Teorema 4 (M., Račkauskas & Suquet)

Galiojant lemos 2 sąlygoms

$$\frac{(1-\phi_n^2)^{1/2}}{n} S_n^{\mathrm{pl}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Konvergavimas $\mathrm{C}[0,1]$ and $\mathrm{H}_\alpha^o[0,1]$ erdvėse

Teorema 5 (M., Račkauskas & Suquet)

Tarkime, kad y_k generuotas (1) lygybe, $\phi_n = \mathrm{e}^{\gamma/n}$ ir laužčių procesas $n^{-1/2} W_n^{\mathrm{pl}}$ silpnai konverguoja į standartinį Brauno judesį W erdvėse $\mathrm{C}[0,1]$ arba $\mathrm{H}_\alpha^o[0,1]$ kuriam nors $0 < \alpha < 1/2$. Tada $n^{-3/2} S_n^{\mathrm{pl}}$ silpnai konverguoja toje pačioje erdvėje į integruotą Ornstein-Uhlenbeck procesą J apibrėžtą :

$$J(t) := \int_0^t U_\gamma(s)\,\mathrm{d}s, \quad 0 \le t \le 1, \tag{2}$$

čia $U_\gamma(s) = \int_0^s \mathrm{e}^{\gamma(s-r)}\,\mathrm{d}W(r)$.

Turinys

Apibrėžimas

Proceso y_k liekanos yra $\widehat{\varepsilon}_k = y_k - \widehat{\phi}_n y_{k-1}$, čia $\widehat{\phi}_n$ yra mažiausių kvadratų metodo įvertis

$$\widehat{\phi}_n = \frac{\sum_{j=1}^n y_j y_{j-1}}{\sum_{j=1}^n y_{j-1}^2}$$

Laužčių procesas :

$$\widehat{Z}_n^{\mathrm{pl}}(t) = \sum_{j=1}^{[nt]} \widehat{\varepsilon}_j + (nr - [nt])\widehat{\varepsilon}_{[nt]+1}.$$

Laiptinis procesas :

$$\widehat{Z}_n^{\mathrm{st}}(t) = \sum_{j=1}^{[nt]} \widehat{\varepsilon}_j$$

Konvergavimas $\mathrm{D}[0,1]$ ir $\mathrm{C}[0,1]$ erdvėse

Teorema 6 (M., Račkauskas & Suquet)

Pagal teoremos 3 sąlygas,

$$n^{-1/2}\widehat{Z}_n^{\mathrm{st}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}[0,1]} W,$$

$$n^{-1/2}\widehat{Z}_n^{\mathrm{pl}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{C}[0,1]} W.$$

Konvergavimas $\mathrm{H}_\alpha^o[0,1]$ erdvėje

Teorema 7 (M., Račkauskas & Suquet)

Pagal teoremos 4 sąlygas,

$$n^{-1/2}\widehat{Z}_n^{\mathrm{pl}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{H}_\alpha^o[0,1]} W.$$

Konvergavimas $\mathrm{D}[0,1]$ erdvėje

Shin (1998) parodė, kad

$$n^{-1/2}\widehat{Z}_n^{\mathrm{st}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}[0,1]} W - A^{-1}BJ, \tag{3}$$

čia $B = \int_0^1 U_\gamma(r)dW(r)$, $A = \int_0^1 U_\gamma(r)^2 dr$, $U_\gamma(s) = \int_0^s \mathrm{e}^{\gamma(s-r)}\,\mathrm{d}W(r)$ and J is defined by (2).

AČIŪ UŽ DĖMESĮ !
KLAUSIMAI ?