Atsitiktinių procesų pratybos

Markovo grandinės

2013/14 m.m. pavasario semestras

1. Markovo grandinėms su žemiau pateiktomis perėjimo matricomis nustatykite ekvivalentumo klases, kokios yra būsenos (grįžtamosios, tranzitinės) bei jų periodiškumas:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Raskite stacionarų sprendinį Markovo grandinei, kurios perėjimo matrica yra

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Tarkime, kad prekės atsargos papildomos laiko momentais $t_1, t_2, \ldots$ ir prekės paklausa laiko intervale (t_{n-1}, t_n) yra atsitiktinis dydis D_n, kurio skirstinys nepriklauso nuo laiko periodo:

$$P(D_n = k) = a_k, k = 0, 1, 2, \ldots,$$

čia $a_k \geq 0$ ir $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$. Kokiu kiekiu papildyti prekės atsargas nustatoma kiekvieno periodo pradžioje. Jei prekės likę ne daugiau nei s, prekės atsargos papildomos iki kiekio S, priešingu atveju nepapildomos. Tegu X_n žymi prekių kiekį prieš pat laiko momnetą t_n. Proceso $\{X_n, n \geq 0\}$ būsenos nusako galimas prekės atsargų reikšmes:

$$S, S-1, \ldots, s+1, s, s-1, \ldots, 0, -1, -2, \ldots,$$

čia neigiamos reikšmės interpretuojamos kaip nepatenkinta paklausa. Tarkime, kad a.d. D_n yra tarpusavyje nepriklausomi ir nepriklausomi su X_0. Raskite perėjimo matricą bei įrodykite, kad jei $a_k > 0$ su visais $k \geq 0$, tai (X_n) yra neredukuojama.

4. Dalelė su tikimybę p pajuda per vieną poziciją į dešinę ir su tikimybe q per vieną poziciją į kairę ($p + q = 1$). Dalelės pozicija laiko momentu n yra X_n. Markovo grandinės (X_n) perėjimo matricos tikimybės yra $P_{i,i+1} = p$, $P_{i,i-1} = q$, ir $P_{i,j} = 0$ visiems $j \neq i+1, i-1$. Įrodykite, kad (X_n) yra neredukuojama, kai $p \in (0, 1)$. Ištirkite Markovo grandinės grįžtamumą / tranzityvumą priklausomai nuo p reikšmės.

5. Nagrinėkime Markovo grandinę $(X_n, n \geq 0)$ su būsenų aibe $E = \{a, b, c, d\}$ ir perėjimo matrica

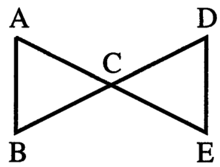
$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Schematiškai pavaizduokite Markovo grandinės būsenas su perėjimo tikimybėmis bei parodykite, kad grandinė yra neredukuojama. Kiekvienai būsenai nustatykite vidutinį žingsnių skaičių, per kurį grįžtama į tą pačią būseną.

6. Tegu X_n žymi kiek kartų iškrito 6 akutės metus lošimo kauliuką n kartų. Ar $\{X_n, n \geq 1\}$ yra Markovo grandinė? Kodėl? Jei taip, užrašykite perėjimo matricą.

7. Tegu X - Markovo grandinė, s - absorbuojanti būsena. Be to, būsena s yra pasiekiama iš bet kurios kitos būsenos i, t.y. $\exists n : p_{is}^{(n)} > 0$. Įrodykite, kad visos būsenos $i: \ i \neq s$ yra tranzitinės.

8. Nagrinėkime Markovo grandinę X su būsenų aibe $\{A, B, C, D, E\}$. Dalelė iš vienos būsenos į gretimas būsenas patenka su vienodomis tikimybėmis (gretimos būsenos žemiau esančiame paveikslėlyje sujungtos linijomis). Koks vidutinis žingsnių skaičius, per kurį dalelė pirmą kartą grįžta į būseną A?



SAVARANKIŠKO DARBO UŽDUOTYS: