

Atsitiktinių procesų pratybos

Brauno judesio procesas.

2013/14 m.m. pavasario semestras

1. Kokios turi būti parametru λ_1 ir λ_2 reikšmės, kad procesas $\lambda_1 W^{(1)} + \lambda_2 W^{(2)}$ būtų standartinis Vynerio procesas, kai $W^{(1)}$ ir $W^{(2)}$ yra nepriklausomi standartiniai Vynerio procesai.
2. Tegu W yra standartinis Vynerio procesas. Ar $\sqrt{t}W(1)$, $-W(t)$, $W(2t) - W(t)$ yra Vynerio procesai?
3. Tegu W yra standartinis Vynerio procesas, $a > 0$. Ar šie procesai yra standartiniai Vynerio procesai:
 - (a) $V_t = aW_{t/a^2}$,
 - (b) $W_{t+a} - W_t$,
 - (c) $V_t = \omega W_{1/t}$, kai $t \neq 0$, $V_0 = 0$.
4. Įrodykite, kad Brauno judesio procesas yra tolydus pagal tikimybę.
5. Su tikimybe lygia vienetui $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}B(t) = 0$, čia B Brauno judesio procesas. Įsitikinkite šiuo teiginiu, imdami sveikuosius laiko momentus, t.y. įrodykite, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}B(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6. Tegu B Brauno judesio procesas. Kuris iš teiginių teisingas:
 - a) $B(t) + B(t+s) \sim N(0, 2t+s)$;
 - b) $B(t) + B(t+s) \sim N(0, 4t+s)$?

Atsakymą pagrįskite.

7. Tegu B Brauno judesio procesas. Apibrėžkime atsitiktinį procesą ($X_t, t \geq 0$)

$$X(t) = B(t) + B(t^2), \quad t \geq 0.$$

Raskite a. proc. (X_t) vidurkio ir autokovariacinę funkcijas.

8. Tegu ($B, t \geq 0$) Brauno judesio procesas, $\alpha > 0$ apibrėžkime procesą

$$V(t) = e^{-\alpha t/2} B(e^{\alpha t}).$$

Raskite šio proceso vidurkio ir autokovariacinę funkcijas.

9. Lenktyniauja du dviratininkai. Tegu ($Y_t, t \in [0, 1]$) žymi laiką sekundėmis, kiek pirmąja pirmasis dviratininkas, kai yra įveikta 100t procentų trasos ilgio. Tarkime, kad $Y(t)$ galime modeliuoti nestandartiniu Brauno judesio procesu su dispersijos parametru σ^2 .
 - a) Kokia tikimybė, kad laimės lenktynes pirmasis dviratininkas, jei įveikus pusę trasos jis pirmąja σ sekundžių?
 - b) Kokia tikimybė, kad pirmasis dviratininkas pirmavo ir įveikus pusę trasos, jei jis laimėjo lenktynes σ sekundžių?
10. Tarkime, ($B_t, t \geq 0$) standartinis Brauno judesio procesas, o ($X_t, t \in [0, 1]$) jį atitinkantis Brauno tiltas ($X_t = B_t - tB_1$). Įrodykite, kad kiekvienam $t \in [0, 1]$ a.d. $B(1)$ ir $X(t)$ yra nepriklausomi.