Atsitiktinių procesų pratybos

Puasono procesas

2013/14 m.m. pavasario semestras

1. Tegu X ir Y yra nepriklausomi eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai su parametrais atitinkamai λ ir μ. Pažymėkite $U = \min\{X, Y\}, V = \max\{X, Y\}$. Raskite
   (a) $E(U)$,
   (b) $E(V)$,
   (c) $E(V - U)$,
   (d) kitokią išraišką vidurkiui EV ,pritaikę tapatybę $V = X + Y - U$.
2. Tarkime $(N_t, t \geqslant 0)$ yra Puasono procesas su intensyvumu λ=15. Suskaičiuokite
   (a) $P(N_6 = 9)$,
   (b) $P(N_8 = 10|N_9 = 6)$,
   (c) $P(N_9 = 6|N_8 = 10)$.
3. Tarkime $(N_t, t \geqslant 0)$ yra Puasono procesas su parametru $\lambda = 5$. Tegul T_n yra n-tojo kliento atvykimo laikas. Raskite
   (a) $E(T_{12})$,
   (b) $E(T_{12} = 10|N_2 = 5)$,
   (c) $E(N_5|N_2 = 5)$.
4. Pirmoji ir antroji futbolo komandos muša įvarčius pagal Puasono procesą su parametrais atitinkamai 1 ir 2. Tarkime $N_0^{(1)} = 2, N_0^{(2)} = 1$
   (a) Kokia tikimybė, kad $N_t^{(1)} = 5$ anksčiau nei $N_t^{(2)} = 5$?
   (b) Atsakykite į tą patį klausimą, kai atitinkamų Puasono procesų parametrai yra λ_1 ir λ_2
5. Pirkėjai į parduotuvę užeina pagal Puasono dėsnį su intensyvumu $\lambda = 10$ per valandą. Suraskite vidutinį pardavimų kiekį per darbo dieną (8val.),jei žinoma, kad pirkėjas ką nors nuperka su tikimybe 0.3.
6. Parduotuvė turi tris įėjimus. Per kiekvieną iš jų pirkėjai ateina pagal Puasono dėsnį su intensyvumais atitinkamai $\lambda_1 = 100$, $\lambda_2 = 90$ ir $\lambda_3 = 120$ per valandą. Be to, 30 procentų ateina vyrų. Vyrai ką nors nuperka su tikimybe 0.8, o moterys- 0.1. Kiekvienas pirkėjas vidutiniškai išleidžia 12 Lt.
   (a) Kiek vidutiniškai pirkėjai išleidžia parduotuvėje per 10 val?
   (b) Kokia tikimybė, kad trečioji pirkėja moteris apsipirkti ateis per pirmas 15 min.? Koks yra tikėtinas jos atvykimo laikas?

7. Tarkime, $Y_1, Y_2 ...$ yra neneigiami nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Tegu $Z_0 = 0, Z_n = Y_1 + ... + Y_n, n \geq 1$. Atsitiktinį dydį Z_n interpretuojame kaip n-ojo kliento atvykimo į parduotuvę laiką. Atsitiktinis procesas $(Z_n, n \geq 0)$ dar vadinamas atstatymo procesu. Tegu N_t yra atvykimų skaičius laike $[0, t]$.

   (a) Įrodykite, kad su visais $n \geq 1$ ir $t \geq 0$, $P(N_t \geq n) = P(Z_n \leq t)$;

   (b) Įsitikinkite, kad $\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$ b.t.;

   (c) Įrodykite, kad
   $$\frac{Z_{N_t}}{N_t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{b.t.}} a = EY_1;$$

   (d) Pritaikę nelygybes $Z_{N_t} \leq t < Z_{N_t+1}$ įrodykite, kad
   $$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{b.t.}} \frac{1}{EY_1}.$$

8. Tegu $\tau_1, \tau_2 ...$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai su parametru λ, o ν yra nepriklausomas atsitiktinis dydis su $P(\nu = n) = p(1-p)^{n-1}, n \geq 1$. Raskite sumos $S_\nu = \tau_1 + ... + \tau_\nu$ skirstinį.

9. Tegu N yra Puasono procesas su parametru λ, L yra paskutinio atvykimo intervale [0,t] laikas (L=0, jei atvykimų nebuvo). Raskite vidurkį $E(t - L)$ ir išnagrinėkite jo elgesį, kai $t \to \infty$

10. Tegu N nehomogeninis Puasono procesas su dažnumo funkcija $\lambda(r), r \geq 0$.

    a) Raskite pirmojo įvykio pasirodymo laiko T_1 tankio funkciją;

    b) Raskite ET_1, jei $\lambda(r) = \frac{c}{1+r}$ ir $c > 1$.

11. Tarkime, kad nehomogeninio Puasono proceso dažnumo funkcija $\lambda(r) = \Lambda$ su visais r, čia Λ yra atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes λ_1 ir λ_2 su vienodomis tikimybėmis. Raskite N_t tikimybių generuojančiąją funkciją, vidurkio ir dispersijos funkcijas.

12. Skruzdėlės atvyksta į virtuvę pagal Puasono procesą su parametru λ. r-toji skruzdėlė iš pradžių praleidžia X_r laiko indaujoje ir paskui Y_r laiko kriauklėje (iš viso $X_r + Y_r$ laiko virtuvėje). Vektoriai $V_r = (X_r, Y_r)$ ir $V_s = (X_s, Y_s)$ yra nepriklausomi, kai $r \neq s$. Laiko momentu $t = 0$ virtuvėje nėra nei vienos skruzdėlės. Tegu A_t ir $B(t)$ skruzdėlių skaičius laiko momentu t indaujoje ir kriauklėje atitinkamai. Raskite $A(t)$ ir $B(t)$ bendrą skirstinį.

13. Parodos ekspoziciją sudaro n salių, lankytojai aplanko jas visas laikydamiesi salių numeravimo eiliškumo. Be to, lankytojai į parodą atvyksta pagal Puasono procesą su parametru λ. r-tasis lankytojas s-tojoje salėje praleidžia $X_{r,s}$ laiko, čia $X_{r,s}, r \geq 1, 1 \leq s \leq n$ yra nepriklausomi. Tegu $t \geq 0$ ir $V_s(t)$ žymi lankytojų skaičių s-tojoje salėje laiko momentu t. Parodykite, kad fiksuotu laiko momentu t atsitiktiniai dydžiai $V_s(t), 1 \leq s \leq n$ yra nepriklausomi ir kiekvienas turi Puasono skirstinį.

14. Tarkime, į teritoriją A imigrantai atvyksta pagal Puasono procesą su parametru 1 per dieną. Tegu tikimybė, kad imigrantas yra B tautybės, lygi 1/12.

    (a) Koks vidutinis laikas, reikalingas atvykti pirmiems 10 imigrantų?

    (b) Kokia tikimybė, kad laiko tarpas tarp dešimtojo ir vienuoliktojo imigranto atvykimo bus ilgesnis nei 2 dienos?

    (c) Kokia tikimybė, kad per 4 dienas neatvyks nei vienas B tautybės imigrantas?

15. Tarkime $(N(t), t \geqslant 0)$ yra Puasono procesas su intensyvumu λ ir jį sudaro du nepriklaqusomi homogeniniai Puasono procesai $(N_1(t))$ ir $(N_2(t))$ $(N(t) = N_1(t) + N_2(t))$ su intensyvumais λ_1 ir λ_2 bei tikimybėmis p ir $1-p$ atitinkamai. Pažymėkime S_{ij} laiką, kada i-tajame procese $(i = 1, 2)$ pasirodė $j-$tasis įvykis. Raskite
    (a) tikimybes $P(N_1(t) = n), \quad P(N_2(t) = m)$;
    (b) intensyvumus $\lambda_1, \ \lambda_2$;
    (c) tikimybę, kad $S_{11} > S_{21}$;
    (d) tikimybę, kad $S_{12} < S_{21}$.
16. Tarkime, keleiviai į traukinių stotį vykti tam tikru traukiniu atvyksta pagal Puasono procesą su parametru λ. Tegu traukinys išvyksta laiko momentu t. Raskite visų keleivių, atvykusių į traukinių stotį laiko intervale $(0, t)$, vidutinį suminį traukinio laukimo laiką.
17. Tarkime įrenginys patiria šokus, kurie įvyksta pagal Puasono procesą su parametru λ. D_i žymėkime $i-$tojo šoko padarytą žalą, o N_t įrenginio patirtų šokų skaičių intervale $[0, t]$. Tarsime, kad $D_i, i \geq 1$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d. bei nepriklausomi su $\{N(t), t \geq 0\}$. Tarkime, kad patirtos dėl šokų žalos yra adityvios ir eksponentiškai didėja bėgant laikui, t.y. bendra įrenginiui padaryta žala laiko momentu t yra
$$D(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-\alpha(t-S_i)},$$
čia S_i žymi $i-$tojo šoko įvykimo laiko momentą. Raskite $ED(t)$.
18. Tegul įvykiai įvyksta pagal Puasono procesą su intensyvumu λ. Tarkime, $t > 0$. Jums pasiūlytos lažybos: turite pasakyti "stop" iškart po įvykio, kuris Jūsų manymu yra paskutinis iki laiko momento t. Jei atspėjate, lažybas laimite, priešingu atveju pralaimite. Jei iki momento t neįvyksta įvykis arba nepasakėte "stop", taip pat pralaimite lažybas. Nagrinėkime strategiją, pagal kurią pasirenkate pirmą įvykusį įvykį po tam tikro momento s, čia $0 < s < t$. Raskite tikimybę, kad laimėsite lažybas naudodami šią strategiją. Koks turi būti laiko momentas s, kad tikimybė laimėti lažybas būtų didžiausia?
19. Mieste laiko momentu $t = 0$ nėra nei vienos meškos. Baltosios ir rudosios meškos į miestą atvyksta pagal nepriklausomus Puasono procesus $N^{(B)}$ ir $N^{(R)}$ su intensyvumais β ir ρ. Raskite tikimybę, kad per laikotarpį tarp dviejų baltųjų meškų atvykimo atvyks lygiai r rudųjų meškų.
20. Tarkime, $X(t)$ Puasono procesas su intensyvumu λ. Tegu laiko momentu t neįvyko įvykis. Pažymėkime $W(t)$ laiką, likusį iki artimiausio įvykio pasirodymo. Įrodykite, kad a.d. $W(t)$ skirstinys nepriklauso nuo t ir yra eksponentinis su parametru λ.
21. Tarkime, $X(t)$ Puasono procesas su intensyvumu λ. T_n žymi n-tojo įvykio pasirodymo laiką. Tarkime, laiko intervale $(0, t)$ yra įvykęs vienas įvykis. Įrodykite, kad pirmojo įvykio pasirodymo momento sąlyginis skirstinys yra tolygusis intervale $(0, t)$ (t.y. $F(x) := P(T_1 \leq x | X(t) = 1)$ yra tolygaus intervale $(0, t)$ atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija).

SAVARANKIŠKO DARBO UŽDUOTYS: