Atsitiktinių procesų pratybos

Martingalai (1 dalis)

2013/14 m.m. pavasario semestras

1. Tegu $(Y_n, n \geq 1)$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių tolygiai pasiskirsčiusių intervale $[-1, 1]$ seka. Tegu $S_0 = 0, S_n = Y_1 + \cdots + Y_n, n \geq 1$. Patikrinkite, ar duotos sekos yra martingalai:
   (a) $X_n = \sum_{k=1}^{n} S_{k-1}^2 Y_k, \quad X_0 = 0;$
   (b) $X_n = S_n^2 - \frac{n}{3}, \quad X_0 = 0.$
2. Tegu $X_1, X_2, \cdots$ nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir baigtine dispersija. Apibrėžkime dalines sumas $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Įsitikinkite, kad
$$T_n = S_n^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2$$
   yra submartingalas.
3. Tarkime, $Y, \mathcal{F}$ yra martingalas. Įrodykite, kad $E(Y_{n+m}|\mathcal{F}_n) = Y_n$ su visais $n, m \geq 0$.
4. Tarkime, kad $X_1, X_2, \cdots$ tokie atsitikniai dydžiai, kad $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ yra martingalas. Įrodykite, kad $E(X_i X_j) = 0$, jei $i \neq j$.
5. Tegu $(X_n, n \geq 0)$ yra atsitiktinių dydžių su baigtiniais vidurkiais seka, kuriai visiems $n \geq 1$ teisinga
$$E(X_{n+1}|X_0, X_1, \cdots, X_n) = aX_n + bX_{n-1},$$
   čia $0 < a, b < 1,\ a + b = 1$. Su kokia parametro α reikšme
$$S_n = \alpha X_n + X_{n-1}, \quad n \geq 1$$
   yra martingalas sekos (X_n) atžvilgiu?
6. Tegu $(X_n, n \geq 1)$ yra nepriklausomi normalieji atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu 0 ir dispersija σ^2. Tegu $Y_0 = 1$,
$$Y_n = exp\left\{ a \sum_{k=1}^{n} X_k - n\sigma^2 \right\}, \quad n \geq 1.$$
   Su kokia parametro a reikšme (Y_n) yra martingalas?
7. Tegu $((X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0)$ ir $((Y_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0)$ kvadratu integruojami martingalai. Įrodykite, kad
   (a) $E(X_m Y_n|\mathcal{F}_m) = X_m Y_m$ beveik tikrai visiems $m \leq n$;
   (b) $E(X_n Y_n) - E(X_0 Y_0) = \sum_{k=1}^{n} E((X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1}));$
   (c) $D(X_n) = D(X_0) + \sum_{k=1}^{n} D(X_k - X_{k-1}).$
8. Tegu U_i nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su tikimybėmis $P(U_i = 1) = p < 1$ ir $P(U_i = -1) = 1 - p = q$. Įrodykite, kad
$$Z_n = \left(\frac{q}{p} \right)^{S_n}, \quad S_0 = 0, \quad S_n = U_1 + \cdots + U_n$$
   yra martingalas.

9. Tegu $X_1, X_2, \ldots$ a.d. Apibrėžkime

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \mathbb{E}(X_i | X_1, \ldots, X_{i-1}) \right).$$

Parodykite, kad jei $\forall n\ \mathbb{E}|Z_n| < \infty$, tai $\{Z_n, n \geq 1\}$ yra martingalas.

SAVARANKIŠKO DARBO UŽDUOTYS: 7, 8, 9, pabaigti pratybų metu pradėtą 6.