Atsitiktinių procesų pratybos

Martingalai

2013/14 m.m. pavasario semestras

1. Tegu $(Y_n, n \geq 1)$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių tolygiai pasiskirsčiusių intervale $[-1, 1]$ seka. Tegu $S_0 = 0, S_n = Y_1 + \cdots + Y_n, n \geq 1$. Patikrinkite, ar duotos sekos yra martingalai:
   (a) $X_n = \sum_{k=1}^n S_{k-1}^2 Y_k, \quad X_0 = 0;$
   (b) $X_n = S_n^2 - \frac{n}{3}, \quad X_0 = 0.$
2. Tegu $X_1, X_2, \cdots$ nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir baigtine dispersija. Apibrėžkime dalines sumas $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Įsitikinkite, kad
$$T_n = S_n^2 = \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2$$
   yra submartingalas.
3. Tarkime, $Y, \mathcal{F}$ yra martingalas. Įrodykite, kad $E(Y_{n+m}|\mathcal{F}_n) = Y_n$ su visais $n, m \geq 0$.
4. Tarkime, kad $X_1, X_2, \cdots$ tokie atsitikniai dydžiai, kad $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ yra martingalas. Įrodykite, kad $E(X_i X_j) = 0$, jei $i \neq j$.
5. Tegu $(X_n, n \geq 0)$ yra atsitiktinių dydžių su baigtiniais vidurkiais seka, kuriai visiems $n \geq 1$ teisinga
$$E(X_{n+1}|X_0, X_1, \cdots, X_n) = aX_n + bX_{n-1},$$
   čia $0 < a, b < 1, \ a + b = 1$. Su kokia parametro α reikšme
$$S_n = \alpha X_n + X_{n-1}, \quad n \geq 1$$
   yra martingalas sekos (X_n) atžvilgiu?
6. Tegu $(X_n, n \geq 1)$ yra nepriklausomi normalieji atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu 0 ir dispersija σ^2. Tegu $Y_0 = 1$,
$$Y_n = exp\left\{ a \sum_{k=1}^n X_k - n\sigma^2 \right\}, \quad n \geq 1.$$
   Su kokia parametro a reikšme (Y_n) yra martingalas?
7. Tegu $((X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0)$ ir $((Y_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0)$ kvadratu integruojami martingalai. Įrodykite, kad
   (a) $E(X_m Y_n|\mathcal{F}_m) = X_m Y_m$ beveik tikrai visiems $m \leq n$;
   (b) $E(X_n Y_n) - E(X_0 Y_0) = \sum_{k=1}^n E((X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1}));$
   (c) $D(X_n) = D(X_0) + \sum_{k=1}^n D(X_k - X_{k-1}).$
8. Tegu U_i nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su tikimybėmis $P(U_i = 1) = p < 1$ ir $P(U_i = -1) = 1 - p = q$. Įrodykite, kad
$$Z_n = \left(\frac{q}{p} \right)^{S_n}, \quad S_0 = 0, \quad S_n = U_1 + \cdots + U_n$$
   yra martingalas.

9. Tegu $X_1, X_2, \ldots$ a.d. Apibrėžkime

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \mathbb{E}(X_i | X_1, \ldots, X_{i-1}) \right).$$

Parodykite, kad jei $\forall n \; \mathbb{E}|Z_n| < \infty$, tai $\{Z_n, n \geq 1\}$ yra martingalas.

10. Tarkime, S_n yra draudimo kompanijos kapitalas n-tųjų metų gale. n-tais metais gautas pelnas yra $c > 0$ ir išmokėta ξ_n išmokų. Tegu ξ_n yra $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ir $\mu < c$. Kompanija bankrutuoja, kai jos kapitalas pasidaro mažesnis ar lygus nuliui. Įrodykite, kad

$$P(bankrotas) \leq exp\left\{ \frac{-2(c-\mu)S_0}{\sigma^2} \right\}.$$

11. Tegu $(Y_n, n \geq 0$ nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su tikimybėmis $P(Y_k = 1) = P(Y_k = -1) = 0,5$ ir $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \cdots, Y_n)$. Apibrėžkime

$$S_0 = 0, \quad S_n = Y_1 + \cdots + Y_n, \quad n \geq 1$$

ir

$$M_0 = 0, \quad M_n = \sum_{k=1}^{n} sign(S_{k-1}) Y_k, \quad n \geq 1.$$

Koks submartingalo $(S_n^2, n \geq 0)$ kompensatorius? Įrodykite, kad $(M_n, n \geq 0)$ yra martingalas ir raskite submartingalo $(M_n^2, n \geq 0)$ kompensatorių.

12. Tegu $(N_t, t \geq 0$ Puasono procesas (žr. apbrėžimą 3.17pvz.). Apibrėžkime

$$Y_t = N_t - \lambda t.$$

Patikrinkite, ar Y_t yra martingalas atžvilgiu $\{Y_s, s \leq t\}$.

13. Tarkime, objektas startuoja pozicijoje 0 ir kiekvienu žingsniu pajuda per vieną poziciją į dešinę su tikimybe p arba per vieną poziciją į kairę su tikimybe $1-p$. Tarkime, vienas po kito einantys žingsniai yra nepriklausomi. Jei $p > \frac{1}{2}$, raskite vidutinį žingsnių skaičių, reikalingą pasiekti pozicijai $i, \; i > 0$.

14. Žaidėjai X, Y ir Z pradžioje žaidimo turi atitinkamai x, y ir z monetų. Kiekviename etape atsitiktinai vienas po kito parenkami du žaidėjai (visi galimi pasirinkimai vienodai tikėtini ir nepriklauso nuo ankstesnių žingsnių). Pirmasis iš jų duoda vieną monetą antrajam. Taip tęsiama, kol vienas iš trijų žaidėjų nebeturi monetų. Tada šis žaidėjas palieka žaidimą ir jį tęsia likę du žaidėjai, kol visos monetos atsiduria pas vieną iš žaidėjų. Kiek vidutiniškai reikės žaidimo etapų, kad visos monetos atsidurtų pas vieną žaidėją?

15. $X_1, X_2, \ldots$ nepriklausomi a.d. ir

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{su tikimybe } (2n)^{-1}, \\ 0, & \text{su tikimybe } 1 - n^{-1}, \\ -1, & \text{su tikimybe } (2n)^{-1}. \end{cases}$$

Tegu $Y_1 = X_1$ ir

$$Y_n = \begin{cases} X_n, & \text{jei } Y_{n-1} = 0, \\ nY_{n-1}|X_n|, & \text{jei } Y_{n-1} \neq 0, \end{cases}$$

kai $n \geq 2$. Ar Y_n yra martingalas $\sigma-$algebrų sekos $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ atžvilgiu?

16. Tegu, $(X_n, n \geq 0)$ yra atsitiktinių dydžių, įgyjančių reikšmes intervale $[0,1]$, seka ir $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Tarkime, kad $X_0 = a \in [0,1]$ ir

$$P\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} | \mathcal{F}_n \right) = 1 - X_n, \quad P\left(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2} | \mathcal{F}_n \right) = X_n.$$

Ar $(X_n, n \geq 0)$ yra martingalas $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ atžvilgiu?

17. Tegu $\{Z_i\}$ modifikuoti nepriklausomi Bernulio a.d., įgyjantys reikšmę 1 su tikimybe p ir -1 su tikimybe q. Apibrėžkime procesą

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i - n(p-q), \quad n \geq 1$$

Ar (Y_n) yra martingalas (Z_n) atžvilgiu?

18. Tegu $\{Z_i\}$ nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d. su nuliniu vidurkiu ir dispersija σ_Z^2. Apibrėžkime procesą

$$Y_n = \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^2 - n\sigma_Z^2, \quad n \geq 1.$$

Ar (Y_n) yra martingalas (Z_n) atžvilgiu?

2014.04.08 PRATYBŲ METU SPRĘSTI UŽDAVINIAI: 1-6
SAVARANKIŠKO DARBO UŽDUOTYS: 7, 8, 9, pabaigti pratybų metu pradėtą 6.